Практичне заняття № 2.2

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

1. **Різні види рівняння прямої на площині.**
2. **Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.**
3. **Відстань від точки до прямої.**

1. Різні види рівняння прямої на площині.

1) $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ – канонічне рівняння прямої, $\bar{l}=\{l;m\}$ – напрямний вектор;

2) $Ax+By+C=0$ – загальне рівняння прямої, $\bar{n}=\{A,B\}$ – нормальний вектор;

3) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0;y_0)$ перпендикулярно $\bar{n}=\{A,B\}$;

4) $y=kx+b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, b – відрізок, що його відтинає пряма на осі Oy;

5) $y-y_0=k(x-x_0)$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0;y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k;

6) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – рівняння прямої у відрізках, a,b – відрізки, що їх відтинає пряма на осях Ox, Oy відповідно;

7) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ або $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$ – рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$;

8) $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}$ – параметричні рівняння прямої, $\bar{l}=\{l;m\}$ – напрямний вектор;

9) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ – нормальне рівняння прямої, p – відстань до початку координат. Отримується з загального рівняння множенням на нормуючий множник $\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$.

Задача 1. Пряма задана точкою $M_0(-4;6)$ і нормальним вектором $\bar{n}=\{3;4\}$. Записати рівняння прямої, привести його до загального вигляду, переписати його “у відрізках на осях” і знайти відстань від прямої до початку координат.

Розв'язання:

Спочатку запишемо рівняння прямої (3), що проходить через дану точку з заданим нормальним вектором: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

У нашому випадку $x_0=-4;\ y_0=6;\ A=3;\ B=4$, отже $3(x+4)+4(y-6)=0$.

Приведемо його до загального вигляду (2): $3x+4y-12=0$.

Перепишемо його у відрізках: $3x+4y=12 \ \big|\div 12 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$.

Для того щоб знайти відстань від прямої до початку координат, запишемо нормальне рівняння даної прямої (9):

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5} \text{ – нормуючий множник.}$$

Тоді $\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{12}{5}=0$. Отже відстань p дорівнює $p=\dfrac{12}{5}=2{,}4$.

Відповідь: $3(x+4)+4(y-6)=0$; $3x+4y-12=0$; $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$; $p=2{,}4$.

Задача 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;1)$ і утворює з віссю Ox кут $\alpha=\pi/4$. Записати його в загальному вигляді.

Відповідь: $x-y-1=0$.

Задача 3. Записати рівняння прямої, що проходить через точки $M(3;1)$ і $N(5;4)$.

Відповідь: $3x-2y-7=0$.

Задача 4. Знайти точки перетину прямої $2x-3y-12=0$ з координатними осями і побудувати цю пряму.

Відповідь: $A(6;0)$, $B(0;-4)$.

Задача 5. Перевірити, чи належать точки $A(1;4)$, $B(-1;7)$ і $C(3;1)$ одній прямій.

Відповідь: так, точки належать одній прямій.

Задача 6. Записати загальне рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;-2)$ паралельно вектору $\bar{l}=\{3;2\}$.

Відповідь: $2x-3y-8=0$.

Задача 7. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(5;-4)$ та утворює з віссю Ox той самий кут, що і пряма $5x+2y-3=0$. Записати його в загальному вигляді.

Відповідь: $5x+2y-17=0$.

2. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

Кут між прямими на площині обчислюють за формулами

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}, \qquad \cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \qquad \cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}}.$$

Умова паралельності прямих: $k_1=k_2$ або $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$;

Умова перпендикулярності прямих: $k_1k_2=-1$ або $A_1A_2+B_1B_2=0$.

Задача 8. Записати рівняння прямої, що проходить через точку перетину двох прямих $2x-3y-1=0$ і $3x-y+2=0$ перпендикулярно до прямої $y=x+1$.

Розв'язання:

Знайдемо точку перетину прямих $2x-3y-1=0$ і $3x-y+2=0$:

$$\begin{cases}2x-3y-1=0\\3x-y+2=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad A(-1;-1).$$

Якщо шукана пряма перпендикулярна до прямої $y=x+1$ $(k_1=1)$, то їх кутові коефіцієнти задовольняють умові $k_1k_2=-1$. Отже $k_2=-1/k_1=-1$.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1;-1)$ з кутовим коефіцієнтом $k_2=-1$:

$$y-y_0=k(x-x_0) \quad\Rightarrow\quad y+1=-1\cdot(x+1) \quad\Rightarrow\quad x+y+2=0.$$

Відповідь: $x+y+2=0$.

Задача 9. Записати рівняння бісектриси кута між двома прямими $2x-y-2=0$ і $x+2y-6=0$.

Розв'язання:

Знайдемо точку перетину прямих $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2;\,2)$.

Знайдемо кутові коефіцієнти даних прямих:

(I) $2x - y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2$;

(II) $x + 2y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x/2 + 3 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -1/2$.

За формулою $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ запишемо кути між I прямою і бісектрисою, а також бісектрисою і II прямою. Ці кути рівні.

$$\frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} = \frac{k - k_2}{1 + k k_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2_1 - k}{1 + 2k} = \frac{k + 1/2}{1 - k/2} \quad \Rightarrow \quad 3k^2 + 8k - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = -3 \\ k_2 = 1/3 \end{array}\right..$$

Запишемо рівняння бісектрис у вигляді $y - y_0 = k(x - x_0)$:

1) $k = -3 \qquad y - 2 = -3 \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad 3x + y - 8 = 0$.

2) $k = 1/3 \qquad y - 2 = \dfrac{1}{3} \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad x - 3y + 4 = 0$.

Відповідь: $3x + y - 8 = 0$, $x - 3y + 4 = 0$.

Задача 10. Знайти кут між прямими $-2x + y - 3 = 0$ та $3x + y - 2 = 0$.

Відповідь: $\varphi = \pi/4$.

Задача 11. Визначити, які з прямих $3x - 2y + 7 = 0\,(I)$, $6x - 4y - 9 = 0\,(II)$, $6x + 4y - 5 = 0\,(III)$ та $2x + 3y - 6 = 0\,(IV)$ є паралельними або перпендикулярними.

Відповідь: $I \parallel II$, $I \perp IV$, $II \perp IV$.

Задача 12. Сторони *AB*, *BC* і *AC* трикутника *ABC* задано відповідно рівняннями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Визначити координати його вершин.

Відповідь: $A(2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(2;4)$.

Задача 13. Дано трикутник ABC з вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$ і $C(4;0)$. Записати рівняння сторін трикутника, його медіани AM та висоти AN.

Відповідь: $2x - y + 4 = 0\,(AB)$, $2x + y - 8 = 0\,(BC)$, $y = 0\,(AC)$, $2x - 5y + 4 = 0\,(AM)$, $x - 2y + 2 = 0\,(AN)$.

3. Відстань від точки до прямої.

Відстань d від точки $M(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Задача 14. Знайти відстань від точки $A(2;4)$ до прямої $6x - 8y - 10 = 0$.

Розв'язання:

В нашому випадку $A = 6,\quad B = -8,\quad C = -10,\quad x_0 = 2,\quad y_0 = 4$.

Відстань від точки до прямої дорівнює:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 \cdot 2 - 8 \cdot 4 - 10|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-30|}{10} = 3.$$

Відповідь: 3.

Задача 15. Знайти відстань від точки $A(4;3)$ до прямої $3x - 4y + 10 = 0$.

Відповідь: 2.

Задача 16. Знайти параметр k, якщо відомо, що пряма $y = kx + 5$ віддалена від початку координат на відстань $d = \sqrt{5}$.

Відповідь: $k = \pm 2$.

Задача 17. Знайти відстань між прямими $x - 2y + 1 = 0$ та $3x - 6y + 6 = 0$.

Відповідь: $d = 1/\sqrt{5}$.

Задача 18. Знайти проекцію точки $M(4;9)$ на пряму, що проходить через точки $A(3;1)$ та $B(5;2)$.

Відповідь: $2x + y - 17 = 0$.

Домашнє завдання

Задача 1. Пряма задана точкою $M_0(4;-5)$ і нормальним вектором $\bar{n} = \{5; 2\}$. Записати рівняння прямої, привести його до загального вигляду, переписати його "у відрізках на осях".

Задача 2. Скласти рівняння прямої, що відтинає на осі Oy відрізок $b=3$ і утворює з віссю Ox кут $\alpha=\pi/3$. Записати його в загальному вигляді.

Задача 3. Дано пряму $2x-3y+12=0$. Переписати рівняння цієї прямої через кутовий коефіцієнт та "у відрізках на осях".

Задача 4. Записати загальне рівняння прямої, що проходить через точки $M(2;5)$ і $N(3;-2)$.

Задача 5. Знайти довжину перпендикуляра, проведеного з початка координат на пряму $3x-6y+5=0$.

Задача 6. Знайти кут між прямими $3x-4y-6=0$ та $8x+6y-11=0$.

Задача 7. Визначити, чи є дані прямі паралельними або перпендикулярними:

1) $y=x-3$ і $y=1-x$; 2) $x-3y+2=0$ і $-2x+6y+1=0$.

Задача 8. Записати загальне рівняння прямої, що проходить через точку $M(5;-1)$ з напрямним вектором $\bar{l}=\{2;3\}$.

Задача 9. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(4;-2)$ та утворює з віссю Ox той самий кут, що і пряма $3x+2y-11=0$. Записати його в загальному вигляді.

Задача 10. Сторони AB, BC і AC трикутника ABC задано відповідно рівняннями $y+2=0$, $4x-y-18=0$ і $4x-7y-6=0$. Знайти координати точки N, що ділить сторону AB у відношенні 1:2.

Задача 11. Знайти проекцію точки $M(3;5)$ на пряму, що проходить через точки $A(0;1)$ та $B(2;2)$.