Тема 1

Лекція 3

План

1. Диференціювання складеної функції двох змінних.
2. Похідні функцій, заданих неявно.
3. Похідні вищих порядків. Частинні похідні другого порядку функції двох змінних.
4. Формула Тейлора.

Диференціювання складеної функції двох змінних

Розглянемо повний приріст функції $z = z(x;y)$:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \qquad \textbf{(1)}$$

Якщо функція $z = z(x;y)$ є складеною, **тобто** x, y **також є функціями** як однієї так і декількох змінних, то можливі різні варіанти залежності.

a) $z = z(x;y)$ - функція двох змінних, а $x = x(t)$, $y = y(t)$ - функції однієї змінної.

Теорема 1. Якщо функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ диференційовні в точці *t*, а функція $z = z(x;y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то складена функція $z = z(x(t); y(t))$ також диференційовна в точці t. Похідну функції $z = z(x(t); y(t))$ знаходять за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \quad (2)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & z(x;y) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x=x(t) \arrow[dr, dash] & & y=y(t) \arrow[dl, dash] \\ & z(t) & \end{tikzcd}$$

Розглянемо формулу для знаходження повного приросту:

$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$, розділимо ліву та праву частини рівності на Δt і візьмемо границю $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)}{\Delta t}=0,$$

отже $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$.

Приклад 1. Знайти похідну $\dfrac{dz}{dt}$, якщо:

$$z=\frac{x}{y},\ x=e^t,\ y=\ln t.$$

Встановлюємо **характер залежності**: $z=z(x;y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$

Виписуємо формулу $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$ і знаходимо відповідні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2},\ \frac{dx}{dt}=e^t\ ,\ \frac{dx}{dt}=e^t.$$

Відповідь. $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$, де $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}$, $\dfrac{dx}{dt}=e^t$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t}$.

Зауваження. Отримані вирази можна не підставляти в загальну формулу.

N3

$z(x;y)$

x $y(x)$

$z(x)$

б) Якщо $z=z(x;y)$ - функція двох змінних, x - незалежна змінна, а $y=y(x)$ залежить від x, то $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$.

Цю формулу також можна отримати з формули для повного приросту (1), або у формулі (2) покласти $t=x$.

Похідна $\dfrac{dz}{dx}$ називається **повною похідною** за x на відміну від частинної похідної $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Приклад 2

Знайти повну похідну $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z=z\left(x,y\right)$, $y=y\left(x\right)$:

$$z\left(x,y\right)=\operatorname{tg}\left(x^2+y\right);y\left(x\right)=5^x-x^5.$$

Встановлюємо вид залежності і виписуємо формулу: $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Знаходимо :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2(x^2+y)}\cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2(x^2+y)}$$

$$\frac{dy}{dx}=5^x\ln x-5x^4$$

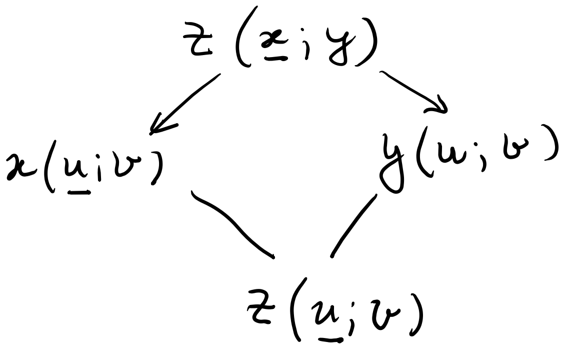
Відповідь. $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$, де $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2(x^2+y)}\cdot 2x$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2(x^2+y)}$, $\frac{dy}{dx}=5^x\ln x-5x^4$.

в) Якщо $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, $z=z(x;y)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$



Вивести самостійно за зразком.

Приклад 3 Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z=x^y$, $x(u,v)=u^2-v$, $y(u,v)=\frac{u}{v}$

Встановлюємо характер залежності: $z=z(x,y)$, $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$

Виписуємо формули $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$

Знаходимо похідні: $z=x^y$, тому $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

$x(u,v)=u^2-v$, тому $\dfrac{\partial x}{\partial u}=2u, \dfrac{\partial x}{\partial v}=-1,$

$y(u,v)=\dfrac{u}{v}$, тому $\dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{1}{v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}=-\dfrac{u}{v^2}$.

Тренувальні вправи

1. Знайти повну похідну $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z=z(x;y)$, $y=y(x)$:

а) $z=\sin\dfrac{x}{y}$, $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$;

б) $z=\dfrac{1}{\cos(xy)}+e^{\frac{x^2}{y^2}}$, $y=\ln^3(\sin x)$;

в) $z=\operatorname{arctg}\sqrt{xy}+\dfrac{1}{xy}$, $y=5$;

г) $z=x^2\sin y$, $y=\sqrt{\operatorname{tg}x}$.

2.Знайти $\dfrac{dz}{dt}$

а) $z=\ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$;

б) $z=\sqrt{y}\cdot e^{x^2+y^3}$, $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\operatorname{tg}(t^2)$;

в) $z=\arccos(x^2+y)$, $x=5\sqrt{t}$, $y=3t^4$.

3. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$

а) $z=2^{x\cos y}+\operatorname{tg}\sqrt{y}$, $x=\operatorname{tg}\dfrac{u}{v}$, $y=\dfrac{1}{u}$;

б) $z=\arccos xy$, $x=u\operatorname{tg}v^2$, $y=u^2+\dfrac{1}{v}$;

в) $z=y\sin x+x\sin y$, $x=\operatorname{tg}\dfrac{u}{v}$, $y=\sqrt{u\ln v}$.

Диференціювання ФБЗ, заданих неявно

Якщо функцію двох змінних задано неявно, тобто співвідношенням $F\left(x, y, z\left(x, y\right)\right)=0$,то продиференціювати її (при умові, що це можливо, тобто виконуються умови теореми існування) можна двома способами.

Приклад 4

$$x^2+y^2+z^2=4$$

$$z=z\left(x,y\right)$$

$2x+2z\cdot z'_x=0$ безпосередньо, пам’ятаючи, що z - функція

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$$

Або за **формулою:**

$$F\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)=0$$

$$F'_x+F'_z z'_x=0$$

$$z'_x=\frac{-F'_x}{F'_z}$$

Вправи. Знайти частинні похідні функцій, заданих неявно.

$a)\, y^2+z^2+x-3z=0$

$б)\, x^3+y^3+z^3+2z-5=0$

Частинні похідні другого порядку функції двох змінних

Якщо функція $z=z\left(x,y\right)$, задана в області D і має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ в усіх точках $\left(x,y\right)\in D$, то ці частинні похідні також можна розглядати як **деякі нові функції**, задані в області D.

Якщо існує частинна похідна за x від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$, то її називають частинною похідною другого порядку від функції $z=z\left(x,y\right)$ за змінною x і позначають $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (читають «де два зет за де ікс двічі») або z''_{xx}. Тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x.$$

Аналогічно визначається друга похідна за y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y$$

Якщо існує частинна похідна за змінною y від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$, то її називають **мішаною частинною похідною** другого порядку від функції $z = z(x, y)$ і позначають $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (читають «де два зет за де ікс де ігрек») або z''_{xy}. Тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y.$$

Для функції двох змінних $z = z(x, y)$ можна розглядати чотири похідні другого порядку: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Виникає питання: чи впливає порядок диференціювання на результат?

Іншими словами: чи дорівнюють мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$?

У загальному випадку відповідь негативна.

Однак при виконанні умов теореми Шварца про мішані похідні, рівність буде правильною.

Теорема. Якщо функція $z = z(x, y)$ визначена разом зі своїми похідними $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, причому мішані похідні z''_{xy}, z''_{yx} **неперервні** в цій точці, то вони рівні в цій точці, тобто

$$z''_{xy}\Big|_{M_0} = z''_{yx}\Big|_{M_0}.$$

Приклад 5.

Знайти похідні другого порядку від функції $z(x, y) = x^4 - x^3 y + y^3 + 5$

Розв'язання. Знаходимо похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 3x^2 y; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -x^3 + 3y^2.$$

Знаходимо похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(4x^3 - 3x^2 y\right)_x' = 12x^2 - 6xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(4x^3 - 3x^2 y\right)_y' = -3x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-x^3 + 3y^2\right)_x' = -3x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-x^3 + 3y^2\right)_y' = 6y$$