Розрахункова робота з теорії кривих та поверхонь

Теорія кривих

Завдання 1. Задано рівняння лінії L векторно параметричним рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Точці M_0 відповідає значення параметра t_0. Виконати завдання:

1) знайти координати векторів $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ базису Френе в даній точці M_0;

2) скласти рівняння дотичної прямої, головної нормалі, бінормалі даної кривої в точці M_0;

3) скласти рівняння стичної площини, нормальної площини і спрямної площини кривої в точці M_0;

4) знайти кривину та скрут кривої в точці M_0.

1. $\vec{r}(t)=(2-\sin t;\ t\cos t;\ 4e^t),\ t_0=0;$
2. $\vec{r}(t)=(\cos^2 t;\ \sin^2 t;\ \cos 2t),\ t_0=\pi/4;$
3. $\vec{r}(t)=(3-\sin t;\ 2(t-\cos t);\ e^t),\ t_0=0;$
4. $\vec{r}(t)=(3\cos t;\ e^{\sin t}\cos t;\ 2(t-\pi)),\ t_0=\pi;$
5. $\vec{r}(t)=(2t;\ \ln t;\ t^2),\ t_0=1;$
6. $\vec{r}(t)=(2-\sin t;\ t\cos t;\ 4e^t),\ t_0=0;$
7. $\vec{r}(t)=(e^{\sin t};\ (t-\pi)\cos t;\ 3\cos t),\ t_0=\pi;$
8. $\vec{r}(t)=(2t\ln t;\ t^3;\ e^{t-1}),\ t_0=1;$
9. $\vec{r}(t)=(e^{2(t-\pi)};\ e^{\sin t}\sin t;\ 4\cos t),\ t_0=\pi;$
10. $\vec{r}(t)=(e^{t-1};\ 2te^{t-1};\ t^2),\ t_0=1;$
11. $\vec{r}(t)=(e^{\cos t}\sin t;\ 2\sin t;\ 3\cos t),\ t_0=\pi/2;$
12. $\vec{r}(t)=(2\cos t;\ 3\sin t;\ e^{t-\pi}),\ t_0=\pi;$
13. $\vec{r}(t)=(2\cos t;\ 4\sin t;\ 3e^{\sin t}),\ t_0=\pi;$
14. $\vec{r}(t)=(\frac{2}{t};\ t\ln t;\ 3t^2),\ t_0=1;$
15. $\vec{r}(t)=(\sin^2 t;\ \sin t\cos t;\ 1-2\cos t),\ t_0=\pi/2;$
16. $\vec{r}(t)=(t-\cos t;\ 2(t+\sin t);\ e^t),\ t_0=0;$
17. $\vec{r}(t)=(2te^{t-1};\ 2(t-\ln t);\ t^3),\ t_0=1;$
18. $\vec{r}(t)=(2t-\cos t;\ 2t+\sin t;\ t+\cos t),\ t_0=0;$
19. $\vec{r}(t)=(2t\cos t;\ e^{\sin t}\cos t;\ 2t+1),\ t_0=0;$
20. $\vec{r}(t)=((t-\pi)\cos t;\ 3\sin t;\ 2e^{t-\pi}),\ t_0=\pi.$

Завдання 2. Знайти довжину дуги кривої між точками $M_1(t_1)$ і $M_2(t_2)$. Знайти натуральну параметризацію, скласти натуральні рівняння кривої.

1. $\vec{r}(t)=(t;\ \frac{1}{t};\ \sqrt{2}\ln t),\ t\in[1;+\infty)\ t_1=1,\ t_2=2;$
2. $\vec{r}(t)=(\sin t;\ \frac{1}{\sin t};\ \sqrt{2}\ln(\sin t)),\ \ t\in[\pi/2;\pi),\ t_1=\frac{\pi}{2},\ t_2=\frac{2\pi}{3};$
3. $\vec{r}(t)=(4\cos t;\ 4\sin t;\ 2t),\ t_1=0,\ t_2=\pi;$
4. $\vec{r}(t)=(tgt;\ \frac{1}{tgt};\ \sqrt{2}\ln(tgt)),\ \ t\in[\pi/4;\pi/2),\ t_1=\frac{\pi}{4},\ t_2=\frac{\pi}{3};$
5. $\vec{r}(t)=(e^t;\ \frac{1}{e^t};\ \sqrt{2}\,t),\ t\in[0;+\infty),\ t_1=0,\ t_2=1;$
6. $\vec{r}(t)=(6t+2;\ 5t^2;\ 8t),\ t_1=0,\ t_2=1;$
7. $\vec{r}(t)=(sht;\ \frac{1}{sht};\ \sqrt{2}\ln(sht)),\ \ t\in[\ln(1+\sqrt{2});+\infty),$

   $t_1=\ln(1+\sqrt{2}),\ t_2=\ln(2+\sqrt{2});$
8. $\vec{r}(t)=(\sqrt{2}\ln t;\ \frac{1}{t};\ t),\ t\in[1;+\infty),\ t_1=1,\ t_2=2;$
9. $\vec{r}(t)=(cht;\ sht;\ t),\ t\in[0;+\infty),\ t_1=0,\ t_2=1;$
10. $\vec{r}(t)=(t+3;\ 2t-4;\ 2t),\ t_1=3,\ t_2=8;$
11. $\vec{r}(t)=(2t^2+1;\ 2t^2-1;\ t^2),\ t_1=1,\ t_2=3;$
12. $\vec{r}(t)=(3\cos t;\ 3\sin t;\ 4t),\ t_1=0,\ t_2=\pi;$
13. $\vec{r}(t)=(t+3;\ 2t-5;\ 3t),\ t_1=0,\ t_2=2;$
14. $\vec{r}(t)=(t;\ \sqrt{2}\ln t;\ \frac{1}{t}),\ t\in[1;+\infty)\ t_1=1,\ t_2=2;$
15. $\vec{r}(t)=(6\cos t;\ 6\sin t;\ 8t),\ t_1=0,\ t_2=\pi;$
16. $\vec{r}(t)=(e^t;\sqrt{2}\,t;\ \frac{1}{e^t}),\ t\in[0;+\infty),\ t_1=0,\ t_2=1;$
17. $\vec{r}(t)=(2t-1;\ 3t+2;\ 4t),\ t_1=0,\ t_2=2;$
18. $\vec{r}(t)=(4t;\ 3\cos t;\ 3\sin t),\ t_1=0,\ t_2=\pi;$
19. 9. $\vec{r}(t)=(2cht;\ 2sht;\ 2t),\ t\in[0;+\infty),\ t_1=0,\ t_2=1;$
20. $\vec{r}(t)=(3t^2+1;\ t^2-1;\ \frac{3}{2}t^2),\ t_1=1,\ t_2=3;$

Завдання 3. Скласти параметричні рівняння плоскої кривої за її натуральним рівнянням.

1. $k=a$; **2.** $\frac{1}{k}=a\cdot s$; **3.** $\frac{1}{k}=\frac{a^2+s^2}{a^2}$; **4.** $s=ka^2$; **5.** $kas=5$, **6.** $k\cdot s=5a$.

Теорія поверхонь

Завдання 4. Задано поверхню $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, точку на ній M_0, що відповідає вказаним значенням параметрів u_0, v_0 і лінію $L: u=u(t), v=v(t)$ на цій поверхні, що проходить через точку M_0. Знайти:

1) для даної поверхні S у даній точці M_0 скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої;

2) першу квадратичну форму I поверхні S у точці M_0;

3) довжину дуги лінії $L: u=2t, v=t$ між точками $A(u_1=0, v_1=0)$ та $B(u_2=2, v_1=1)$;

4) кут між лініями $u=2v,\ v=2u$ у точці їх перетину;

5) другу квадратичну форму II поверхні S у точці M_0;

6) нормальну кривину k_n поверхні S у точці M_0 у напрямку дотичної до кривої $L: u=2t, v=t$;

7) головні кривини k_1 та k_2, повну (гауссову) K і середню H кривини поверхні S у точці M_0;

8) геодезичну кривину k_g кривої $L: u=2t, v=t$ на поверхні S у точці M_1, що відповідає параметру $t_1=v_0$.

1. $x=5\cos v,\ y=5\sin v,\ z=u,\ u_0=\pi/2, v_0=0$;
2. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=u^2,\ u_0=1, v_0=\pi/2$;
3. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=uv,\ u_0=1, v_0=\pi$;
4. $x=u,\ y=v,\ z=2u^2-v^2,\ u_0=1,\ v_0=1$;
5. $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv,\ u_0=2,\ v_0=1$;
6. $x=5u-v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3-v^3,\ u_0=2,\ v_0=1$;
7. $x=2u+\cos v,\ y=2u-\sin v,\ z=3v,\ u_0=1,\ v_0=0$;
8. $x=2u\cos v,\ y=2u\sin v,\ z=u+v,\ u_0=1,\ v_0=0$;
9. $x=2u\sin v,\ y=2u\cos v,\ z=5u^2,\ u_0=1,\ v_0=\pi/2$;
10. $x=u+3,\ y=2v+1,\ z=u^2+v^2,\ u_0=2,\ v_0=1$;
11. $x=2\cos u\cos v,\ y=7\sin u\cos v,\ z=3\sin v,\quad u_0=\pi/2, v_0=\pi/2$;
12. $x=u^2+v^2,\ y=3u^2-v^2,\ z=5uv,\quad u_0=1, v_0=2$;
13. $x=2u-v,\ y=4uv,\ z=u^3+v^3,\ u_0=2,\ v_0=1$;
14. $x=2u+\cos v,\ y=u-\sin v,\ z=u+3,\ u_0=2,\ v_0=\pi$;
15. $x=3u,\ y=u^2-5v,\ z=u^3+3uv,\quad u_0=2, v_0=2$;
16. $x=8u\cos v,\ y=8u\sin v,\ z=5v,\ u_0=1,\ v_0=\pi/2$;
17. $x=2u\cos v,\ y=2u\sin v,\ z=3u+2v,\ u_0=1,\ v_0=0$;
18. $x=u^2+v^2,\ y=u^2-v^2,\ z=uv,\quad u_0=2, v_0=1$;

19. $x = 3u,\ y = u^2 - 5v,\ z = u^3 + 3uv, \quad u_0 = 2, v_0 = 2;$

20. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = 3u^2 + 5,\ u_0 = 2, \quad v_0 = \pi / 2.$