МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Практичний посібник з вищої математики
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
та 193 «Геодезія та землеустрій»

КИЇВ 2024

УДК 517.95
ББК 22.311

Укладачі: Н.В.Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
О.В.Забарило, канд. фіз.-мат. наук, доцент
В.В.Отрашевська, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Л.В.Соколова, канд. фіз.-мат. наук, доцент
А.О.Краснєєва, ст. викладач

Рецензент Ю.П. Філонов, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 11 від 25 березня 2024 р.

Інтеграли та їх застосування: Практичний посібник з вищої математики для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія» та 193 «Геодезія та землеустрій»/ Уклад.: Н.В. Бондаренко, О.В. Забарило, В.В. Отрашевська, Л.В. Соколова, А.О. Краснєєва. – К.: КНУБА, 2024. – 70 с.

Призначено для студентів будівельних спеціальностей.

Містить основні теоретичні відомості та тридцять варіантів навчальних завдань по темі «Інтегральне числення функції однієї змінної».

РОЗДІЛ І

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Літерою I позначимо один з числових проміжків дійсної прямої **R**: $[a;b]$, $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$, $(-\infty;b)$, $(-\infty;b]$, $(a;+\infty)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$.

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на числовому проміжку I, якщо $F(x)$ диференційована на I і $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$.

Теорема. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку *I*, то функція $F\left(x\right)+C$, де C – довільна стала, також буде первісною даної функції на *I*.

Правильним є й обернене твердження: кожну функцію, що є первісною функції $f(x)$ на проміжку *I*, можна подати у вигляді $F\left(x\right)+C$, де C – довільна стала.

Операція знаходження для функції всіх її первісних називається *інтегруванням* функції і є оберненою операцією відносно диференціювання.

Вираз $F\left(x\right)+C$, де $C \in \mathbf{R}$, називається *невизначеним інтегралом* і позначається $\int f\left(x\right)dx$, тобто $\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right)+C$. При цьому вираз $f\left(x\right)dx$ називається підінтегральним виразом, а функція $f(x)$ підінтегральною функцією.

Отже, для того, щоб знайти невизначений інтеграл від заданої функції $f(x)$, потрібно знайти одну з первісних даної функції та додати до неї довільну сталу. Правильність інтегрування перевіряють диференціюванням: $\left(F\left(x\right)+C\right)' = f\left(x\right)$.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

2. $\int dF(x) = F(x) + C$,

3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, де $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$,

4. $\int\left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,

5. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Зокрема,

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \qquad (1)$$

де a, b – довільні сталі, $a \neq 0$, $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на I.

Властивість 5 називають *інваріантністю формули інтегрування*. Вона означає, що значення невизначеного інтегралу не змінюється від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$	**2.** $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$	**4.** $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	**6.** $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	**8.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	**10.** $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	**12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$
13. $\int shxdx = chx + C$	**14.** $\int chxdx = shx + C$

Основні методи інтегрування

1. Метод безпосереднього інтегрування

Даний метод застосовують до інтегралів, у яких підінтегральна функція є сумою елементарних функцій або піддається таким алгебраїчним перетворенням, що для відшукання інтегралу можна застосувати властивості лінійності інтегралу, табличні інтеграли та інваріантність формул інтегрування.

Приклад 1.1 Знайти невизначений інтеграл

$$\int (x^{12} - 2\sin 5x + \frac{3}{x^2+4} - \frac{1}{x-2} + 3^x)dx.$$

Розв'язок. Заданий інтеграл є сумою табличних інтегралів.

$$\int (x^{12} - 2\sin 5x + \frac{3}{x^2+4} - \frac{1}{x-2} + 3^x)dx =$$

$$= \int x^{12}dx - 2\int \sin 5x dx + 3\int \frac{1}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x-2}dx + \int 3^x dx =$$

$$= \frac{x^{13}}{13} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{3}{2} arctg\frac{x}{2} - \ln(x-2) + \frac{3^x}{\ln 3} + C,\ \ C \in \mathbf{R}.$$

Відповідь: $\frac{x^{13}}{13} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{3}{2} arctg\frac{x}{2} - \ln(x-2) + \frac{3^x}{\ln 3} + C,\ \ C \in \mathbf{R}.$

Приклад 1.2 Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3 e^x}{x^3} dx$.

Розв'язання. Подамо даний інтеграл у вигляді суми табличних інтегралів:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3 e^x}{x^3} dx = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{x^3 e^x}{x^3} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{8}{3}} - \frac{1}{x} + e^x \right) dx =$$

$$\int x^{-\frac{8}{3}} dx - \int \frac{dx}{x} + \int e^x dx = \frac{x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}} - \ln|x| + e^x + C =$$

$$-\frac{3}{5x\sqrt[3]{x^5}} - \ln|x| + e^x + C.$$

Відповідь: $-\frac{3}{5x\sqrt[3]{x^5}} - \ln|x| + e^x + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Приклад 1.2 Знайти $\int \frac{x^2+1}{x^2+4} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+4} dx = \int \frac{x^2+1+3-3}{x^2+4} dx = \int \frac{\left(x^2+4\right)-3}{x^2+4} dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$x - \frac{3}{2} arctg \frac{x}{2} + C.$$

Відповідь: $x - \frac{3}{2} arctg \frac{x}{2} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

ЗАДАЧА 1. (1.1-1.30). Знайти інтеграл безпосереднім інтегруванням.

1. $\int \frac{x^2-2}{x^2-1} dx$	2. $\int \frac{x^3-8}{x-2} dx$	3. $\int \frac{x^2+2x-7}{\sqrt{x}} dx$

4. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-x}dx$	5. $\int \frac{x^2-2^x x^3+x}{x^3}dx$	6. $\int \frac{x^2+2x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$
7. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$	8. $\int \frac{x-3^x x^3+x^2}{x^3}dx$	9. $\int \frac{x^2-3x+1}{\sqrt[5]{x^4}}dx$
10. $\int \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$	11. $\int \frac{2-x^4}{1+x^2}dx$	12. $\int \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{5x}}dx$
13. $\int \frac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx$	14. $\int tg^2 x dx$	15. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$
16. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$	17. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$	18. $\int ctg^2 x dx$
19. $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$	20. $\int \frac{x^2\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x}}dx$	21. $\int \frac{1}{\cos 2x+\sin^2 x}dx$
22. $\int \frac{2+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$	23. $\int \sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+x\right)dx$	24. $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$
25. $\int \frac{3tg^2 x-2}{\sin^2 x}dx$	26. $\int \frac{5-4ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$	27. $\int \frac{x^3-5x+4}{\sqrt[5]{x}}dx$
28. $\int \frac{x-3e^x\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^4}}dx$	29. $\int \frac{x^3-3\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}}dx$	30. $\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{1+\sqrt{x}}dx$

2. Метод внесення функції під знак диференціала

Метод внесення функції під знак диференціала доцільно застосовувати, якщо підінтегральний вираз можна подати у вигляді добутку деякої функції та її диференціала, тобто

$$\int f(x)dx=\int g\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx=\int g\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)=\int g(u)du, u=\varphi(x).$$

Наведемо деякі корисні співвідношення (таблиця диференціалів):

$x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}d\left(x^{\alpha+1}\right),\ \alpha\neq-1$	$\frac{1}{x}dx=d\left(\ln\lvert x\rvert\right)$	$\sin xdx=-d\left(\cos x\right)$
$\cos xdx=d\left(\sin x\right)$	$\frac{1}{\cos^2 x}dx=d\left(tgx\right)$	$\frac{1}{\sin^2 x}dx=-d\left(ctgx\right)$
$a^{x}dx=\frac{1}{\ln a}d\left(a^{x}\right)$, $e^{x}dx=de^{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d\left(\arcsin x\right)$ $=-d\left(\arccos x\right)$	$\frac{1}{1+x^2}dx=d\left(arctgx\right)$ $=-d\left(arcctgx\right)$

ЗАДАЧА 2 (2.1-2.30) Знайти невизначений інтеграл за допомогою метода введення функції під знак диференціала.

ПРИКЛАД 2.1 Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{(5x-1)^4}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{(5x-1)^4}=\frac{1}{5}\int(5x-1)^{-4}5dx=\frac{1}{5}\int(5x-1)^{-4}d(5x-1)=$$

$$=\frac{1}{5}\int u^{-4}du=\frac{1}{5}\cdot\frac{u^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{15(5x-1)^3}+C$$

Відповідь. $-\frac{1}{15(5x-1)^3}+C$

ПРИКЛАД 2.2 Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, що знаходиться у знаменнику підінтегрального виразу: $x^2+6x+10=x^2+6x+9+1=(x+3)^2+1$. Враховуючи, що $d(x+3)=(x+3)'dx=dx$, знаходимо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+10}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1}=arctg(x+3)+C$$

Відповідь. $arctg\left(x+3\right)+C$

ЗАДАЧА 2. Індивідуальні завдання

1. $\int(3x+5)^7\,dx$	2. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^5}}$	3. $\int\sqrt[3]{2x-1}\,dx$
4. $\int\frac{dx}{4+3x}$	5. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2+5x)^2}}$	6. $\int e^{-x^2}x\,dx$
7. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$	8. $\int\frac{dx}{x^2-2x-3}$	9. $\int\frac{dx}{x^2-6x+13}$
10. $\int\sin\left(\frac{x}{3}\right)dx$	11. $\int\cos(2x+1)dx$	12. $\int tg(2-3x)dx$
13. $\int ctg\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$	14. $\int e^{\frac{x}{2}+5}\,dx$	15. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$
16. $\int e^{2x+3}dx$	17. $\int 3^{\frac{x}{4}}\,dx$	18. $\int 5^{1-2x}\,dx$
19. $\int e^{-3x+1}dx$	20. $\int\frac{dx}{\sin^2(4x+1)}$	21. $\int\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-1\right)}$
22. $\int\frac{dx}{\sin^2(4x-1)}$	23. $\int\sin(4x+5)dx$	24. $\int\cos\left(1-\frac{x}{3}\right)dx$
25. $\int\sin^2 x\cos x\,dx$	26. $\int\frac{x}{x^2+2}\,dx$	27. $\int\frac{x^2}{x^3+1}\,dx$
28. $\int\frac{x^3}{x^4+1}\,dx$	29. $\int\frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$	30. $\int\sqrt{\cos x+5}\,\sin x\,dx$

3. Метод інтегрування частинами

Для знаходження інтегралів від добутку многочленів на трансцендентну функцію (1,2)

1. $$\int P_n(x)\begin{bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ a^x\end{bmatrix}dx$$

2. $$\int P_n(x)\begin{bmatrix}\arcsin bx\\ arc\cos bx\\ \log_a bx\end{bmatrix}dx,$$ а також інтегралів виду

3. $$\int e^{ax}\begin{bmatrix}\sin bx\\ \cos bx\end{bmatrix}dx$$ та інші

застосовують формулу

$$\int udv = uv - \int vdu, \qquad (1)$$

де $u(x), v(x)$ - диференційовані функції. В інтегралах першого типу за u слід брати многочлен, а за dv ту частину підінтегрального виразу, що залишилась. В результаті інтеграл $\int vdu$ має стати простішим порівняно з початковим. В інтегралах другого типу навпаки за u приймаємо логарифмічну чи обернену тригонометричну функції. В інтегралах третього типу отримуємо лінійне рівняння відносно початкового інтеграла.

ЗАДАЧА 3 (3.1-3.30) Знайти невизначений інтеграл за допомогою методу інтегрування частинами.

ПРИКЛАД 3.1 Знайти інтеграл $\int (2x+3)\sin 3xdx$.

Розв'язання. Покладаємо $u = 2x+3, dv = \sin 3xdx$, тоді $du = 2dx$, $v = \int \sin 3xdx = -\frac{1}{3}\cos 3x$. Згідно з формулою інтегрування частинами маємо: $\int(2x+3)\sin 3xdx = -\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{3}\int \cos 3xdx =$

$-\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3xdx + C$.

Відповідь. $-\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3xdx + C$

ПРИКЛАД 3.2 Знайти інтеграл $\int x\ln^2 xdx$.

Розв'язання. Покладаємо $u=\ln^2 x$, $dv = xdx$, тоді $du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx$, $v=\int xdx = \frac{x^2}{2}$. Застосувавши формулу інтегрування частинами, отримуємо: $\int x\ln^2 xdx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x^2 \ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln xdx$. Інтеграл $\int x\ln xdx$ також знаходимо методом інтегрування частинами. Покладаємо $u=\ln x, dv = xdx$, тоді $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$, $\int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x$ - $\frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$+C.

Остаточно маємо: $\int x\ln^2 xdx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}$+C

Відповідь. $\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}$+C

ЗАДАЧА 3. Індивідуальні завдання

1. $\int x\ln\left(1+x^2\right)dx$	2. $\int\left(x^2-2x+2\right)e^{-x}dx$	3. $\int(2x+3)2^x dx$
4. $\int\left(x^2+32\right)\sin 3xdx$	5. $\int(x+1)\cos 5xdx$	6. $\int(3x+5)e^{4x}dx$
7. $\int\left(x^2-2x+2\right)e^{-x}dx$	8. $\int arctgxdx$	9. $\int\sqrt{x}\ln^2 x\, dx$
10. $\int\left(x^2+1\right)\ln xdx$	11. $\int x^2e^{5x}dx$	12. $\int x^2\sin 2x\, dx$

13. $\int(2x-3)\cos x dx$	14. $\int\left(x^2+3x\right)\sin 2x dx$	15. $\int\left(x^2+2\right)3^x dx$
16. $\int(2x-1)5^x dx$	17. $\int x^2\cos 2x\, dx$	18. $\int x\arcsin x\, dx$
19. $\int\frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$	20. $\int x\arccos 3x\, dx$	21. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$
22. $\int x\cos^2 x\, dx$	23. $\int x\sin^2 x\, dx$	24. $\int e^{2x}\left(3x^2+1\right)dx$
25. $\int\left(x^2+x\right)e^{-x}dx$	26. $\int(x+2)3^x dx$	27. $\int(4-x)e^{-5x}dx$
28. $\int\frac{xdx}{\sin^2 3x}$	29. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$	30. $\int e^{-x}\sin x dx$

4. Метод заміни змінної

Нехай в інтегралі $\int f(x)dx$ проведено заміну змінної $x=\varphi(t)$. Якщо функція $f(x)$ неперервна, функція $\varphi(t)$ оборотна і має неперервну похідну, то $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt+C$ (2)

Формула (2) називається формулою заміни змінної у невизначеному інтегралі. Можлива також обернена заміна $t=\psi(x)$. Метод заміни змінної доцільно застосовувати для приведення початкового інтегралу до табличного.

ЗАДАЧА 4 (4.1-4.30) Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної.

ПРИКЛАД 4.1 Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Розв'язання. Проведемо заміну змінної $x=t^2$, тоді $dx=2tdt$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=2\int\frac{tdt}{t+1}=2\int\frac{(t+1)-1}{t+1}dt=2\int dt-2\int\frac{d(t+1)}{t+1}=$$

$$2t-2\ln|t+1|+C=$$

$$=2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$$

Відповідь. $2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$

ПРИКЛАД 4.2 Знайти інтеграл $\int \sqrt{\cos 5x + 1} \cdot \sin 5x dx$

Розв'язання. Проведемо заміну змінної $t = \cos 5x + 1$, тоді $dt = -5\sin 5x dx$, а $\sin 5x dx = -\frac{1}{5} dt$.

$$\int \sqrt{\cos 5x + 1} \cdot \sin 5x dx = \int t^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{5}\right) dt = -\frac{1}{5} \int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{5} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} =$$

$$-\frac{2}{15} t\sqrt{t} + C =$$

$$= -\frac{2}{15}(\cos 5x + 1)\sqrt{\cos 5x + 1} + C$$

Запропоновані перетворення рівносильні введенню під знак диференціала функції $\cos 5x + 1$.

Відповідь. $-\frac{2}{15}(\cos 5x + 1)\sqrt{\cos 5x + 1} + C$

ЗАДАЧА 4. Індивідуальні завдання

1. $\int \cos\sqrt{x}\, dx$	2. $\int \sin\sqrt[3]{x}\, dx$	3. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\, dx$

4. $\int \frac{\cos\left(3\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}dx$	5. $\int \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x^3}-3\right)dx$	6. $\int \frac{xdx}{\cos^2\left(3x^2+\frac{1}{2}\right)}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$	8. $\int \frac{e^{\sqrt{\sin x}}}{\sqrt{\sin x}}\cos xdx$	9. $\int x^3\sin^2 x^4\cos x^4\,dx$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}\arcsin\frac{x}{5}}$	11. $\int \frac{dx}{\left(1+4x^2\right)arctg^2 x}$	12. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3+\cos^2 x}}dx$
13. $\int \frac{1-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	14. $\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(tg^2\frac{x}{2}-9\right)}$	15. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+4}dx$
16. $\int \frac{3^{3x}}{3^{5x}-16}dx$	17. $\int \frac{\sin 2xdx}{\cos^2 2x-5}$	18. $\int \frac{x^2}{\sqrt{7+2x^3}}dx$
19. $\int \left(3-2^{\frac{1}{x}}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin^2 x+4}}$	21. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$
22. $\int \sqrt[3]{\cos 5x}\sin 5x\,dx$	23. $\int \frac{2+tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	24. $\int \frac{\cos\frac{1}{x}+4}{x^2}dx$
25. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{(1+2\cos x)^5}}dx$	26. $\int \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}dx$	27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^6}}dx$
28. $\int \frac{2x-x^3}{\sqrt{25+x4}}dx$	29. $\int \frac{2arctg 2x}{1+4x^2}dx$	30. $\int \frac{\sqrt{tg 2x}}{\cos^2 2x}dx$

5.Інтегрування раціональних дробів.

Функція виду $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}$, де $Q_m(x), P_n(x)$-многочлени степеня m і n з дійсними коефіцієнтами називається раціональним дробом. Якщо раціональний дріб неправильний $(m \geq n)$, то необхідно виділити цілу частину з цього дробу, тобто подати його у вигляді суми цілої раціональної функції та правильного раціонального дробу $(m < n)$. Розрізняють правильні раціональні дроби 4-х основних типів:

1. $\frac{A}{x-\alpha}$; 2. $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$; 3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

5. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k=2;3;...;A,B,\alpha,p,q \in R,\ p^2-4q<0$.

Дроби першого та другого типів інтегруються достатньо просто:

$$\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\int \frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} = A\ln|x-\alpha|+C;$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx = A\int (x-\alpha)^{-k}d(x-\alpha) = \frac{A(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1}+C$$

При знаходженні інтегралів від дробу третього типу виділяють повний квадрат знаменника і виконують заміну $x+\frac{p}{2}=t$, в результаті отримують два простих інтеграла. Розглянемо наступний приклад.

ЗАДАЧА 5 (5.1-5.30) Знайти невизначений інтеграл від раціонального дробу.

ПРИКЛАД 5.1 Знайти інтеграл $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+13}dx$

Розв'язання.

$$\int \frac{3x+5}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{3x+5}{(x+2)^2+9}dx = \begin{bmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{3t-1}{t^2+9}dt = 3\int \frac{t}{t^2+9}dt - \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+9\right)}{t^2+9} - \int \frac{dt}{t^2+3^3} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(t^2+9\right) - \frac{1}{3}arctg\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+4x+13\right) - \frac{1}{3}arctg\frac{x+2}{3} + C$$

Відповідь. $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4x+13\right) - \frac{1}{3}arctg\frac{x+2}{3} + C$

Інтеграл від дробу четвертого типу після виділення повного квадрату в знаменнику дробу та заміни $x+\frac{p}{2}=t$ зводиться до знаходження двох інтегралів. Один з них легко береться методом введення функції під знак диференціалу, а другий інтеграл виду $\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}, a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ може бути знайденим за допомогою рекурентної формули

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n+2}I_{n-1} + \frac{t}{(2n-2)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right),$$ або за

допомогою тригонометричної підстановки $t = a\cdot tgx$.

Інтегрування правильного дробу зводиться до інтегрування простіших дробів. Для цього рекомендується дотримуватись наступного алгоритму **розкладання правильного дробу на простіші дроби**:

1. Розкласти знаменник дробу на дійсні множники виду $(x-\alpha)^k, \left(x^2+px+q\right)^l, p^2-4q<0, k,l\in N$.

2. Розкласти дріб на суму простіших дробів з невизначеними коефіцієнтами, причому множнику виду $(x-\alpha)^k$ відповідає сума k доданків $\sum_{s=1}^{k}\frac{A_s}{(x-\alpha)^s}$, а множнику виду $\left(x^2+px+q\right)^l$, l доданків виду $\sum_{s=1}^{l}\frac{B_s x+C_s}{\left(x^2+px+q\right)^s}$

3. Привести обидві частини рівності до спільного знаменника та прирівняти чисельники.

4. В отриманій тотожності прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x і скласти систему лінійних рівнянь з невідомими $A_{s,}B_s,C_s$.

5. Розв'язати отриману систему та підставити знайдені значення коефіцієнтів у формулу розкладання.

ПРИКЛАД 5.2 Знайти інтеграл $\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}dx$

Розв'язання. Подамо підінтегральний вираз у вигляді суми простих дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$. Приведемо праву частину до спільного знаменника та прирівняємо чисельники:

$$3x^2+2x+1=A\left(x^2+1\right)+B(x+1)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)(x+1)^2;$$

$$3x^2+2x+1=(B+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(B+C+2D)x+(A+B+D);$$

Прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях x в лівій та правій частині рівності:

$$
\begin{array}{l|c}
x^3 & B+C=0 \\
x^2 & A+B+2C+D=3 \\
x & B+C+2D=2 \\
x^0 & A+B+D=1
\end{array}
$$

Розв'язавши систему відносно A,B,C,D отримуємо: $A=1, B=-1, C=1, D=1.$

Таким чином

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx =$$

$$\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} - \int \frac{d(x+1)}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$-\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - arctgx + C$$

Відповідь. $-\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - arctgx + C$

ЗАДАЧА 5. Індивідуальні завдання

1. $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)}dx$	2. $\int \frac{dx}{x^3-8}dx$	3. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}$
4. $\int \frac{5-4x}{x^2-x-2}dx$	5. $\int \frac{x^2-72}{x(x+4)(x-3)}dx$	6. $\int \frac{dx}{x\left(x^2+16\right)}dx$
7. $\int \frac{6+8x-x^2}{x\left(x^2+3x+2\right)}dx$	8. $\int \frac{x^2-7x-6}{\left(x^2+4\right)(x-3)}dx$	9. $\int \frac{x^2+6x-18}{(x-2)\left(x^2+2x+5\right)}dx$
10. $\int \frac{x}{x^3+8}dx$	11. $\int \frac{x^3-7x^2-3}{\left(x^2+4\right)x^2}dx$	12. $\int \frac{8x-15}{x\left(x^2-4x+5\right)}dx$

13. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$	14. $\int \frac{dx}{(x-1)\left(x^2+1\right)}$	15. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$
16. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$	17. $\int \frac{\left(x^3+4x^2+6\right)dx}{(x+1)^2\left(x^2+2\right)}$	18. $\int \frac{\left(x^2-5x+9\right)dx}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}$
19. $\int \frac{xdx}{(x+1)^2(x+2)}$	20. $\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx$	21. $\int \frac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x}dx$
22. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$	23. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$	24. $\int \frac{dx}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}$
25. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$	26. $\int \frac{dx}{x^4-1}$	27. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$
28. $\int \frac{dx}{(x+1)\left(x^2+1\right)}$	29. $\int \frac{2x^2dx}{x^2-16}$	30. $\int \frac{x-3}{x^4+4x^2}dx$

6.Інтегрування ірраціональних функцій

ЗАДАЧА 6 (6.1-6.30) Знайти невизначений інтеграл від ірраціональної функції.

Інтеграл виду $\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, ..., x^{\frac{p_k}{q_k}}\right)dx$, де R – раціональна функція, $p_i, q_i\ (i=1,2,...,k)$- натуральні числа, підстановкою $x=t^s, s$ – найменше спільне кратне чисел $q_1, q_2, ..., q_k$, зводиться до інтегралу від раціональної функції аргументу *t*.

ПРИКЛАД 6.1

Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \int R\left[(x+1)^{\frac{1}{2}};(x+1)^{\frac{1}{3}}\right]dx$. Оскільки НСК$(2;3)=6$, то підстановкою $x+1=t^6, dx=6t^5dt$ раціоналізуємо підінтегральну функцію

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = 6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{\left(t^3-1\right)+1}{t+1}dt =$$

$$=6\int\left(t^2+t+1\right)dt + 6\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 6\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right)+6\ln|t+1|+C.$$

Оскільки $t=\sqrt[6]{x+1}$. то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = 2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+C$$

Відповідь. $2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+C$

Інтеграл виду $\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx, a,b\in R, m,n,p\in Q$ називають **інтегралом від диференціального біному**. Даний інтеграл можна подати у вигляді інтеграла від раціональної функції тільки в трьох випадках в залежності від чисел *p, m, n.*

1	p – ціле число	заміна $x=t^s, s-$ найменше спільне кратне знаменників дробів *m, n*
2	$\frac{m+1}{n}$ - ціле число	заміна $ax^n+b=t^s, s-$ знаменник *p*
3	$\frac{m+1}{n}+p$ - ціле число	заміна $\frac{ax^n+b}{x^n}=t^s, s$ - знаменник *p*

ПРИКЛАД 6.2 Знайти інтеграл $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx$

Розв'язання. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int x^3\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{2}}dx,\ p=-\frac{1}{2}, m=3, n=2, \frac{m+1}{n}=2$ - ціле число, що відповідає випадку 2, тому застосуємо заміну $x^2+2=t^2, x^2=t^2-2, 2xdx=2tdt$. Маємо

$\int \frac{x^2\cdot xdx}{\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{\left(t^2-2\right)tdt}{t} = \int\left(t^2-2\right)dt = \frac{t^3}{3}-2t+C$. Враховуючи, що $t=\sqrt{x^2+2}$, отримуємо відповідь.

Відповідь. $\frac{\sqrt{\left(x^2+2\right)^3}}{3}-2\sqrt{x^2+2}+C$

Інтегрування інтегралів виду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Заміною $x=t-\frac{b}{2a}$ зазначений інтеграл зводиться до одного з видів (1-3), кожний з яких інтегрується за допомогою відповідної тригонометричної підстановки.

1	$\int R\left(t,\sqrt{t^2+\alpha^2}\right)dt$	можливі підстановки: $t=\alpha\cdot tgz, t=\alpha\cdot ctgz, t=\alpha shz$
2	$\int R\left(t,\sqrt{t^2-\alpha^2}\right)dt$	$t=\frac{\alpha}{\cos z}, t=\frac{\alpha}{\sin z}, t=\alpha\cdot chz$
3	$\int R\left(t,\sqrt{\alpha^2-t^2}\right)dt$	$t=\alpha\cdot\sin z, t=\alpha\cdot\cos z, t=\alpha\cdot thz$

ПРИКЛАД 6.3 Знайти інтеграл $\int \frac{x^3}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$

Розв'язання. Застосуємо заміну $x=\sin t, dx=\cos t dt$, тоді $\int\frac{x^3}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx=$

$$\int\frac{\sin^3 t\cdot\cos t dt}{\cos^3 t}=\int\frac{\sin^2 t\cdot\sin t dt}{\cos^2 t}=-\int\frac{\left(1-\cos^2 t\right)d\cos t}{\cos^2 t}=-\int\frac{d\cos t}{\cos^2 t}+\int d\cos t=$$

$\frac{1}{\cos t}+\cos t+C$**.** Враховуючи, що $x=\sin t, \cos t=\sqrt{1-x^2}$, маємо відповідь**.**

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+C$

Інтеграли виду $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}dx, A, B, p, q\in R$ інтегруються так як раціональні дроби третього типу.

ПРИКЛАД 6.4 Знайти інтеграл

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx=\int\frac{x+3}{\sqrt{\left(x+2\right)^2+1}}dx=\begin{bmatrix}x+2=t\\x=t-2\\dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}dt=$$

$$=\int\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt+\int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^2+1}}+\int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt=\sqrt{t^2+1}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=$$

$$=\sqrt{x^2+4x+5}+\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$$

Відповідь. $\sqrt{x^2+4x+5}+\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$.

ЗАДАЧА 6. Індивідуальні завдання

1. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$	2. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$	3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{5-x^2}}dx$
4. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$	5. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$	6. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+13}}dx$
7. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+4x^2}}dx$	8. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$	9. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$
10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}}dx$	11. $\int \frac{x^3}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}dx$	12. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$
13. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$	14. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$	15. $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2+2x}}dx$
16. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$	17. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$	18. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$
19. $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx$	20. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$	21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$
22. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$	23. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$	24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
25. $\int \frac{2-5x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$	26. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$	27. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+1}}$
28. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$	29. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}dx$	30. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$

6. Інтеграли від тригонометричних функцій.

ЗАДАЧА 7 (7.1-7.30) Знайти невизначений інтеграл від тригонометричної функції.

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx, R(u,v)$ – раціональна функція двох змінних, $u = \sin x, v = \cos x,$ приводяться до інтегралів від раціональної функції нового аргументу підстановкою $t = tg\frac{x}{2}$. Користуючись відомими формулами тригонометрії

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, x \neq (2n+1)\pi, n \in Z$$, маємо

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

ПРИКЛАД 7.1 Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

Розв'язання. Покладаємо $t = tg\frac{x}{2}$, тоді

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = 2\int \frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2+6t+9} = \int \frac{d(t+3)}{(t+3)^2} =$$

$$-\frac{2}{(t+3)} + C = -\frac{2}{tg\frac{x}{2}+3} + C$$

Відповідь. $-\frac{2}{tg\frac{x}{2}+3} + C$

В наступних випадках інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можна знайти простіше:

1	Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$, $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	підстановка $\cos x = t$
2	Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$, $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	підстановка $\sin x = t$

3	Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно обох функцій, $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	підстановка $tgx = t$

ПРИКЛАД 7.2 Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$**.**

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$, то можна застосувати підстановку $\cos x = t, -\sin x dx = dt$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt = t - 2arctgt + C =$$
$$= \cos x - 2arctgx + C$$

Відповідь. $\cos x - 2arctgx + C$

Розглянемо **інтеграл виду** $\int R\left(\sin^m x, \cos^n x\right) dx, m, n \in N$, що є окремим випадком раніше розглянутого інтеграла $\int R(\sin x, \cos x) dx$. Для знаходження таких інтегралів рекомендується:

1	Якщо *m* – ціле додатне непарне число	підстановка $\cos x = t$
2	Якщо *n* – ціле додатне непарне число	підстановка $\sin x = t$
3	Якщо *m, n* - цілі додатні парні числа	застосовуємо формули пониження степеня

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ - формули пониження степеня.

ПРИКЛАД 7.3 Знайти інтеграл $\int \sin^3 x dx$

Розв'язання.

$$=\int \sin^3 x dx=\int \sin^2 x\cos x dx=-\int\left(1-\cos^2 x\right)d\cos x=-\int d\cos x+\int \cos^2 x\cdot d\cos x=$$

$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

Відповідь. $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

ПРИКЛАД 7.4 Знайти інтеграл $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$

Розв'язання.

$$\int \sin^2 x\cos^4 x dx=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2 x dx=\int\frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x dx=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x=$$

$$=\frac{1}{16x}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$$

Відповідь. $\frac{1}{16x}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$

Інтеграли виду $\int \sin\alpha x\cos\beta x dx, \int \sin\alpha x\sin\beta x dx, \int \cos\alpha x\cos\beta x dx,$ зводяться

до алгебраїчної суми табличних інтегралів за допомогою формул:

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right)$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right)$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\right)$$

ПРИКЛАД 7.5 Знайти інтеграл $\int \sin 5x\cos 3x dx$

Розв'язання.

$$\int \sin 5x\cos 3x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

Відповідь. $-\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$

ЗАДАЧА 7. Індивідуальні завдання

1. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$	2. $\int \frac{dx}{5-\cos x}$	3. $\int \sin^4 x\, dx$
4. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$	5. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$	6. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$
7. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$	8. $\int \frac{\cos^3 x}{(\sin x + 1)^5}\, dx$	9. $\int \frac{dx}{2\sin^3 x \cos x}$
10. $\int \sin 3x \cos 4x\, dx$	11. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$	12. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$
13. $\int \sin 8x \cos 2x\, dx$	14. $\int \sin^5 x\, dx$	15. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$
16. $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$	17. $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$	18. $\int \cos^4 x\, dx$
19. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$	20. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$	21. $\int \frac{\sin^3 x}{(1+\cos x)^3} dx$
22. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$	23. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}$	24. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$
25. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx$	26. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$	27. $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} dx$
28. $\int \cos^4 2x\, dx$	29. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$	30. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx$

ВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ

Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $a \le x \le b, a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ - довільне розбиття відрізка на n частин, то інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається сума виду $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, x_{k-1} \le \xi_k \le x_k, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, ..., n$

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називають скінчену границю інтегральної суми S_n, якщо найбільша з різниць Δx_k прямує до нуля, і при цьому не залежить від способу розбиття відрізка $[a;b]$ та вибору точок ξ_k і позначають $\lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$ і *F(x)* одна з її первісних, то визначений інтеграл обчислюється за **формулою Ньютона-Лейбниця:** $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Наприклад, обчислимо інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}$.

Розв'язання. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$

Відповідь. $\frac{1}{2}\ln 2$

ЗАДАЧА 8 (8.1-8.30) Обчислити визначений інтеграл за допомогою методу інтегрування частинами.

Метод інтегрування частинами.

У визначеному інтегралі інтегрування частинами виконують за формулою**:** $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu, u(x), v(x)$ – функції, диференційовані на $[a;b]$.

ПРИКЛАД 8.2 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 xe^x dx$

Розв'язання. $\int\limits_0^1 xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = dx \\ v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$

Відповідь. 1

ПРИКЛАД 8.3 Обчислити інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$

Розв'язання.

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, dv = \dfrac{dx}{x^5} \\ du = \dfrac{dx}{x}, v = -\dfrac{dx}{4x^4} \end{matrix} \right| = -\frac{\ln x}{4x^4}\Big|_1^2 + \frac{1}{4}\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16x^4}\Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}$$

Відповідь. $-\frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}$.

ЗАДАЧА 8. Індивідуальні завдання

1. $\int\limits_0^1 x \arcsin 2x\, dx$	2. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} arctg 3x\, dx$	3. $\int\limits_0^{0,5} \arcsin x\, dx$

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 3x\,dx$	5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos\frac{x}{2}\,dx$	6. $\int\limits_1^2 (3x+2)\ln(x+3)\,dx$
7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin 4x\,dx$	8. $\int\limits_{-1}^1 \arccos\frac{x}{2}\,dx$	9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2-x)\sin 3x\,dx$
10. $\int\limits_1^{e^4} \sqrt{x}\ln\frac{x}{16}\,dx$	11. $\int\limits_1^e \sin(\ln x)\,dx$	12. $\int\limits_0^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
13. $\int\limits_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}\,dx$	14. $\int\limits_1^{\pi} (\pi-x)\sin x\,dx$	15. $\int\limits_{-2}^2 (1-x)\sin \pi x\,dx$
16. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\,dx$	17. $\int\limits_2^3 \ln(x-1)\,dx$	18. $\int\limits_1^2 x\log_2 x\,dx$
19. $\int\limits_0^{2\pi} x\sin 2x\,dx$	20. $\int\limits_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$	21. $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-2x}\,dx$
22. $\int\limits_1^2 x\ln(5x+1)\,dx$	23. $\int\limits_0^{\pi} e^{2x}\cos^2 x\,dx$	24. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos\frac{x}{3}\,dx$
25. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,arctg\,\frac{x}{3}\,dx$	26. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\cos 2x\,dx$	27. $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$
28. $\int\limits_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}\,dx$	29. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^2}\,dx$	30. $\int\limits_0^2 \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx$

Метод заміни змінної

Нехай в інтегралі $\int\limits_a^b f(x)dx$ проведено заміну змінної $x=\varphi(t)$. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$, функція

$\varphi(t)$ диференційована і визначена на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $a \le \varphi(t) \le b, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то має місце формула заміни змінної у визначеному інтегралі: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. При застосуванні даної формули слід пам'ятати про необхідність заміни границь інтегрування. Можлива також обернена заміна $t = \psi(x)$.

ЗАДАЧА 9.(9.1-9.30) Обчислити визначений інтеграл за допомогою методу заміни.

ПРИКЛАД 9.1 Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Розв'язання. Застосуємо підстановку $x = 2\sin t$. Границі інтегрування знаходимо із співвідношень $2\sin t = 0, t_1 = 0$ і $2\sin t = 1, t_2 = \frac{\pi}{6}$. Функції $x = 2\sin t$ та її похідна $x' = 2\cos t$ неперервні на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$, що підтверджує законність даної підстановки. Отже маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}2\cos t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 2\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

ЗАДАЧА 9. Індивідуальні завдання

1. $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$	2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$	3. $\int\limits_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

4. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$	5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x+1}}$	6. $\int\limits_{0}^{3} x\sqrt{1+x}dx$
7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x}$	8. $\int\limits_{0}^{64} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}dx$	9. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^{2}x}$
10. $\int\limits_{4\sqrt{2}}^{8} \frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-16}}$	11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$	12. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^{2}x+2}dx$
13. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^{x}-1}dx$	14. $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$	15. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$
16. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\left(9-x^{2}\right)^{2}}$	17. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^{2}}dx}{x^{2}}$	18. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^{2}dx}{\sqrt{x+1}}$
19. $\int\limits_{15}^{99} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+3}$	20. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{\left(4-x^{2}\right)^{3}}dx$	21. $\int\limits_{4}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$
22. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{\left(16+x^{2}\right)^{3}}}$	23. $\int\limits_{27}^{125} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2}$	24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{2}}{(x+1)^{4}}dx$
25. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^{2}}$	26. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$	27. $\int\limits_{4}^{9} \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x}+1}$
28. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$	29. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{5\cos^{2}x-1}$	30. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^{2}}\,dx$

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Означення. Невласним інтегралом від неперервної функції *f(x)* на $[a,+\infty)$ на інтервалі $[a,+\infty)$ називається $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (3)$$

Якщо ця границя скінченна, то кажуть, що невласний інтеграл збігається, якщо ж границя (3) не існує або нескінченна, то інтеграл називається розбіжним.

Аналогічно, за означенням, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Для визначення інтеграла на інтервалі $(-\infty,+\infty)$ розіб'ємо заданий інтервал довільною точкою c на два: $(-\infty,c]$, $[c,+\infty)$. Тоді, якщо кожний із невласних інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ і $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ і дорівнює їх сумі:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Якщо ж хоча б один із невласних інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ або $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

ЗАДАЧА 10 (10.1 - 10.30). Обчислити невласний інтеграл з нескінченними границями інтегрування.

ПРИКЛАД 10.1. Обчислити невласний інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}.$$

Розв'язання. В цьому прикладі обидві границі інтегрування нескінченні, тому розбиваємо заданий інтеграл на два:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2+2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)^2+2}.$$

Далі, за означенням, маємо

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2+2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)^2+2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2+2}+$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{(x+3)^2+2}=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{2}}\Bigg|_{a}^{0}+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{2}}\Bigg|_{0}^{b}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{3}{\sqrt{2}}-\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{a+3}{\sqrt{2}}+$$

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{b+3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{3}{\sqrt{2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

ЗАДАЧА 10. Індивідуальні завдання

1. $\int_{1}^{\infty}\frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$	2. $\int_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$	3. $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{2x^2-3x+4}$
4. $\int_{\frac{5}{8}}^{\infty}\frac{dx}{4x^2-5x+2}$	5. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}$	6. $\int_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(1+x)^3}}$
7. $\int_{1}^{\infty}\frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	8. $\int_{1}^{\infty}\frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$	9. $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x dx}{x^3}$

10. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{x^2dx}{e^{\frac{x}{2}}}$	11. $\int\limits_{5}^{\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$	12. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{2dx}{2x^2+17}$
13. $\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}dx$	14. $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x}}$	15. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx$
16. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln^8 x}}$	17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{4}{5+2x+x^2}dx$	18. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{4dx}{x^2-7x+12}$
19. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{3dx}{x+x^3}$	20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$	21. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$
22. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$	23. $\int\limits_{0}^{\infty}x\sin 3xdx$	24. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$
25. $\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-\frac{x}{2}}dx$	26. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{1+2x}}$	27. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$
28. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6}$	29. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$	30. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

ЗАДАЧА 11 (11.1 – 11.30). Обчислити невласний інтеграл від розривної функції.

Нехай функція *f(x)* визначена і неперервна при $a \le x < b$ і необмежена поблизу точки *b*, тобто $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$. Крім того, функція *f(x)* інтегровна на кожному з інтервалів $[a, b-\varepsilon]$, де $\varepsilon > 0$, тобто має місце інтеграл

$$I(\varepsilon)=\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx.$$

Означення. Границя змінної $I(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ називається невласним інтегралом від розривної функції *f(x)* на інтервалі від *a* до *b* :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (4)$$

Якщо існує скінченна границя в правій частині формули (4), то невласний інтеграл називається збіжним, якщо ця границя не існує, то розбіжним.

Аналогічно, якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо функція *f(x)* має розрив в деякій точці $x=c$ в середині відрізка $[a,b]$, то покладемо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

якщо обидва інтеграли в правій частині збігаються.

Зауваження. Точку b називають особливою, якщо або $b=\infty$, або $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$. Тоді, якщо первісна функції *f(x)* на $[a,c]$, де c скінченне число і $c<b$, неперервна, то для невласних інтегралів має місце узагальнена формула Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, де $F(b)=\lim\limits_{x\to b} F(x)$.

ПРИКЛАД 11.1. Обчислити невласний інтеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

Розв'язання. Перетворимо даний інтеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\int_{-1}^{1}x^{\frac{4}{3}}dx + 2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3I_1+2I_2.$$

Інтеграл I_1 в силу неперервності підінтегральної функції обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$I_1 = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{6}{7}$$

Інтеграл I_2 називається невласним, оскільки підінтегральна функція в точці $x = 0$ має нескінченний розрив. Тому

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}} = \int_{-1}^{0} x^{-\frac{2}{3}} dx + \int_{0}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} x^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{0+\varepsilon_2}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} 3\varepsilon_1^{\frac{1}{3}} + 3 + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} 3\varepsilon_2^{\frac{1}{3}} + 3 = 6.$$

Остаточно $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3 \cdot \frac{6}{7} + 2 \cdot 6 = 14\frac{4}{7}$.

ПРИКЛАД 11.2 Обчислити невласний інтеграл

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ має нескінченний розрив в точці $x = 1$, але її первісна $F(x) = 3\sqrt[3]{x-1}$ неперервна на $[1,2]$. Тому тут можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3\sqrt[3]{x-1} = 3.$$

Зауваження. Є також можливим дослідження невласних інтегралів на збіжність без безпосереднього їх обчислення.

ЗАДАЧА 11. Індивідуальні завдання

1. $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{(x-2)^4}$	2. $\int\limits_{1}^{2}\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$	3. $\int\limits_{1}^{3}\frac{2xdx}{(x-3)^5}$
4. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-x-1}}$	5. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$	6. $\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$
7. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$	8. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{dx-1}{x\ln^2 x}$	9. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$
10. $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\frac{dx}{x^2-3x+2}$	11. $\int\limits_{1}^{3}\frac{3dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$	12. $\int\limits_{0}^{4}\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$
13. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$	14. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{5dx}{x^3-x^2}$	15. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$
16. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{4-x^2}$	17. $\int\limits_{2}^{3}\frac{4xdx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$	18. $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{\frac{2+x}{8-x}}dx$
19. $\int\limits_{0}^{3}\sqrt{\frac{x^2}{9-x^2}}dx$	20. $\int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$	21. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$
22. $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$	23. $\int\limits_{0}^{\ln\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt[3]{3-e^{2x}}}$	24. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$
25. $\int\limits_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$	26. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{2x\sqrt{1-x}}$	27. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$
28. $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$	29. $\int\limits_{3}^{6}\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-25}}$	30. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ

1. **Обчислення площ фігур.**

Площа фігури, обмеженої знизу віссю ОХ, зверху – графіком неперервної функції $y = f(x)$, зліва і справа – ординатами в точках a і b (рис. 1), рівна

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (5)$$

Площа фігури, обмеженої знизу графіком неперервної функції $y = f_1(x)$, зверху – графіком неперервної функції $y = f_2(x)$ (рис. 2) обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (6)$$

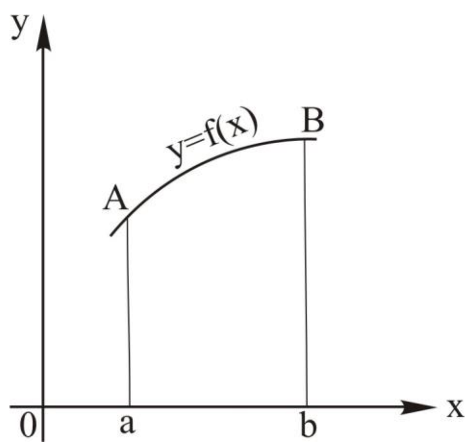


Рис. 1

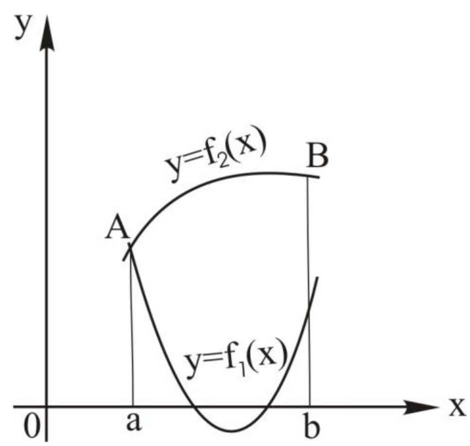


Рис. 2

Інтервал інтегрування $[a,b]$ являє собою проекцію фігури на вісь OX.

Часто неперервні функції, що обмежують фігуру, задані декількома аналітичними виразами. Наприклад, нехай неперервна лінія, що обмежує фігуру зверху, задана рівнянням (рис. 3):

$$
f_2(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & a \le x \le c, \\ \varphi_2(x), & c \le x \le d, \\ \varphi_3(x), & d \le x \le b. \end{cases} \qquad (7)
$$

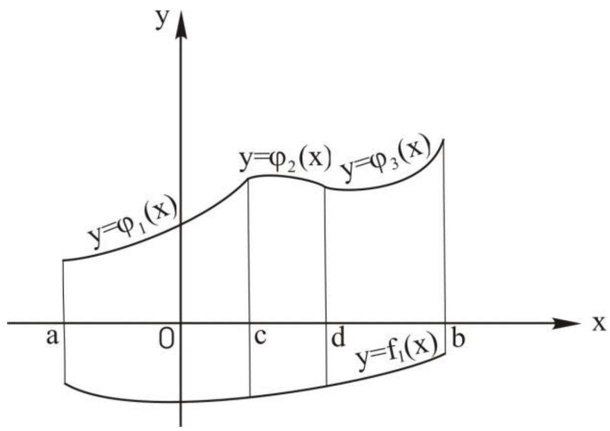


Рис. 3

В цьому випадку фігура розбивається на стільки частин, скількома аналітичними виразами задана $f_2(x)$, а площа обчислюється як сума площ побудованих фігур.

Таким чином, при обчисленні площ в прямокутних координатах потрібно:

– зробити схематичний рисунок фігури, площу якої потрібно знайти;

– знайти границі інтегрування. Для цього слід спроектувати фігуру на вісь *OX* і визначити, який відрізок осі *OX* займає ця проекція чи проекції частин фігури;

– скласти, а потім обчислити визначений інтеграл.

Зауваження. Фігура може бути розміщена як на рис. 4 і 5.

В цьому випадку формули для обчислення площ мають наступний вигляд

$$
S = \int_c^d f(x)dx \qquad\qquad S = \int_c^d (f_2(y) - f_1(y))dy \qquad (8)
$$

При визначенні меж інтегрування необхідно фігуру спроектувати на вісь *OY*.

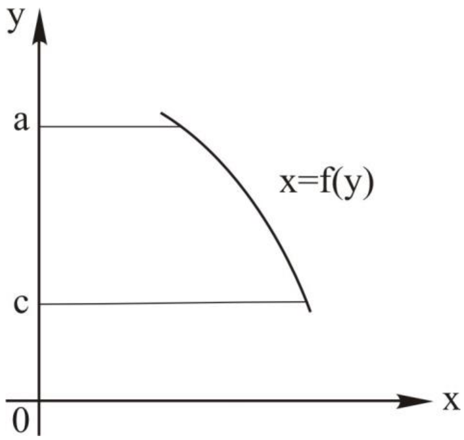


Рис. 4

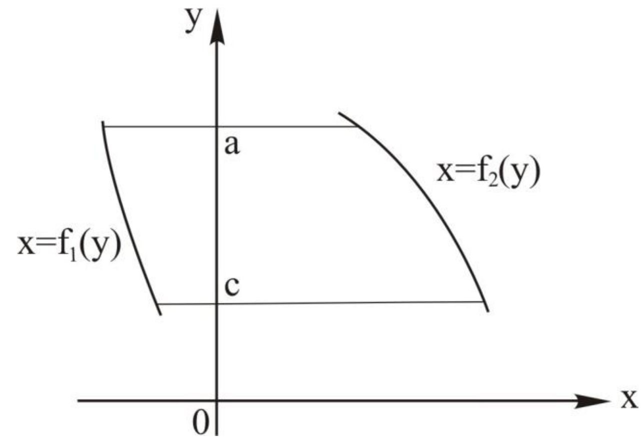


Рис. 5

ЗАДАЧА 12 (12.1 – 12.30). Обчислити площу вказаних плоских фігур.

ПРИКЛАД 12.1_Знайти площу фігури, обмежену параболою, яка задана рівнянням $y = x^2$ і прямою лінією, рівняння якої має вигляд $x + y = 2$.

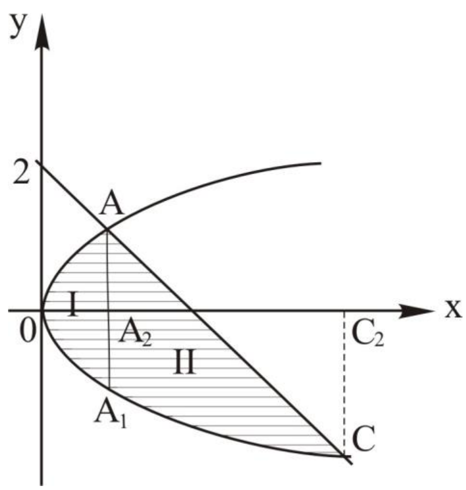


Рис. 6

Розв'язання 1. Побудуємо схематичний рисунок заданої фігури. Будуємо пряму та параболу (рис. 6).

З рисунка визначаємо, що фігура знизу обмежена дугою параболи OC і відрізком прямої AC. Через точку A проведемо пряму, паралельну осі OY і розіб'ємо фігуру на дві частини. Тоді $S = S_I + S_{II}$. Проекція фігури I на вісь OX – це відрізок OA_2, проекція фігури II – відрізок A_2C_2.

Абсциса точки O $x = 0$. Для знаходження абсциси точки A_2 або точки A необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Розв’язуючи систему, отримуємо два значення для x: $x_1 = 1$ і $x_2 = 4$. Це пов’язано з тим, що пряма і парабола мають дві точки перетину *A* і *C*. Таким чином, отримані одночасно абсциси точок A_2 і C_2. Звідси маємо, що інтервали інтегрування для обчислення площ S_I - це [0,1] і S_{II} - це [1,4].

Фігура I знизу обмежена напівпараболою $y = -\sqrt{x}$, зверху – напівпараболою $y = \sqrt{x}$. Отже,

$$S_I = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))dx = \int_0^1 2\sqrt{x}dx.$$

Фігура II знизу обмежена напівпараболою $y = -\sqrt{x}$, зверху прямою $-x + y = 2$ або $y = 2 - x$. Тому

$$S_{II} = \int_1^4 (2 - x - (-\sqrt{x}))dx = \int_1^4 (2 - x + \sqrt{x})dx;$$

$$S = \int_0^1 2\sqrt{x}dx + \int_1^4 (2 - x + \sqrt{x})dx.$$

Після обчислення отриманих інтегралів, знаходимо, що $S = \frac{9}{2}$ кв. од.

Розв'язання 2. Задану фігуру можна проектувати на вісь *OY* (рис. 7). і використовувати для розв’язання задачі формулу (8). Проекція фігури на вісь *OY* займає відрізок C_1A_1. Розв’язуючи систему

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

знаходимо ординати точок A_1 і C_1: $y_1 = 1$, $y_2 = -2$. Рівняння параболи і прямої перепишемо так, щоб змінна y була аргументом. Зліва фігура обмежена параболою $x = y^2$, справа – прямою $x + y = 2$ або $x = 2 - y$:

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2) dy = (2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3})\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2} \text{ кв. од.}$$

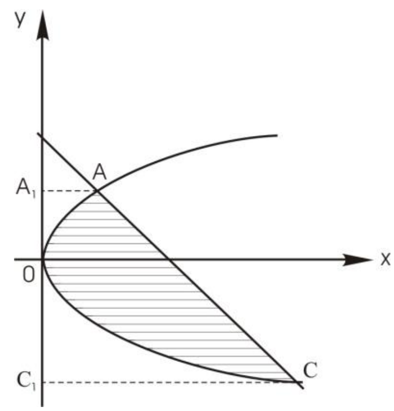


Рис. 7

Зауваження. Для розв'язання задачі було запропоновано два способи. Оскільки розв'язок 2 приводить до обчислення одного інтеграла, а розв'язок 1 – двох інтегралів, то, очевидно, розв'язок 2 більш раціональний. Звідси випливає, що приступаючи до розв'язання аналогічної задачі, необхідно вибрати той шлях, який приводить до найменшого числа інтегралів або до більш простих інтегралів.

Якщо крива, що обмежує криволінійну трапецію (див. рис. 1), задана параметрично $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ і якщо $x = a$ при $t = t_0$ і $x = b$ при $t = T$, то площу криволінійної трапеції можна обчислити за формулою (5), зробивши при цьому у визначеному інтегралі заміну змінної: $y = f(x) = \psi(x)$, $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi\,'(t)dt$, $S = \int_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi\,'(t)dt$.

ПРИКЛАД 12.2_Обчислити площу фігури, яка обмежена еліпсом $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$.

Розв'язання. Побудуємо схематичний рисунок. Фігура симетрична відносно осей OX та OY і розбита ними на 4 рівні за площею

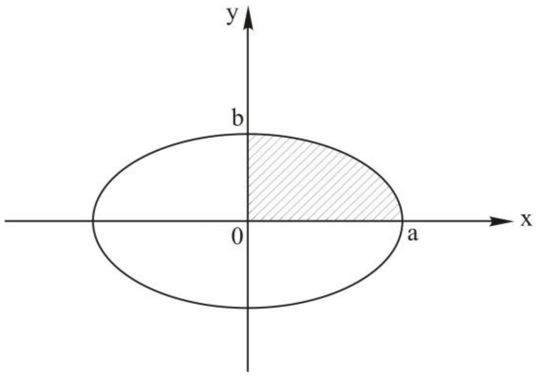


Рис. 8

частини (рис. 8). Тому можна знайти площу однієї з частин і помножити її на 4: $S = 4S_1$ або $S = \int_0^a y dx$, де за умовою задачі $y = b\sin\varphi$, $dx = -a\sin t dt$. Далі знайдемо границі інтегрування. Складемо наступну таблицю (таблиця отримана із формули $x = a\cos\varphi$):

Рис. 8

x	t
0	$\frac{\pi}{2}$
a	0

Зробивши заміну у визначеному інтегралі, отримаємо

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt .$$

Після обчислення інтеграла знаходимо, що $S = \pi ab$. Якщо фігура являє собою криволінійний сектор (рис. 9), що обмежений двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ та неперервною кривою, яка задана рівнянням в полярній системі координат, то площа такої фігури обчислюється за формулою

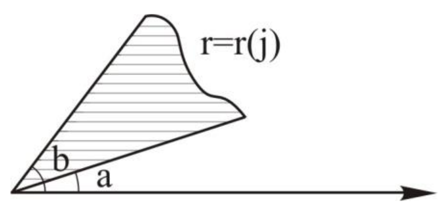


Рис. 9

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(\rho(\varphi)\right)^2 d\varphi . \qquad (9)$$

ПРИКЛАД 12.3_Обчислити площу фігури, що обмежена кривою $\rho = a\sin 3\varphi$.

Розв'язання. Побудуємо схематичний рисунок. Знайдемо період функції $\rho = a\sin 3\varphi$. За означенням період T - це найменше число, для якого має місце тотожність $a\sin 3(\varphi + T) \equiv a\sin 3\varphi$, $\sin 3(\varphi + T) \equiv \sin 3\varphi$ $\Rightarrow$ $\sin 3\varphi \cdot \cos 3T + \cos 3\varphi \cdot \sin 3T \equiv \sin 3\varphi$. Звідси випливає, що $\cos 3T = 1$, $\sin 3T = 0$. Отже, $3T = 2\pi$, $T = \dfrac{2\pi}{3}$. Таким чином, криву достатньо розглянути лише в секторі $0 \le \varphi \le \dfrac{2\pi}{3}$. Оскільки полярний радіус ρ за означенням має бути додатнім, то межі зміни кута φ слід обмежити інтервалом $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$. На інтервалі, що залишився $\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{2\pi}{3}$, $\rho < 0$ точок даної кривої не буде.

При зміні кута φ від 0 до $\dfrac{\pi}{6}$ функція $\sin 3\varphi$ зростає від 0 до 1, а при зміні кута φ від $\dfrac{\pi}{6}$ до $\dfrac{\pi}{9}$ – спадає від 1 до 0. Враховуючи викладене

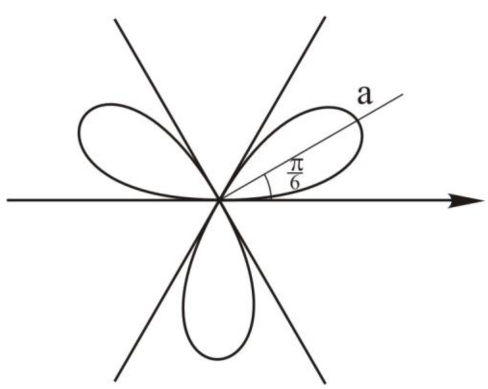


Рис. 10

вище, будуємо графік функції $\rho = a\sin 3\varphi$ для $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$ в полярній системі координат. Так як період функції $\rho = a\sin 3\varphi$ дорівнює $\dfrac{2\pi}{3}$, то в повному куті 2π будуть міститися три аналогічні петлі: друга петля буде на проміжку $\dfrac{2\pi}{3} \le \varphi \le \pi$ і третя петля – на проміжку $\frac{4\pi}{3} \le \varphi \le \frac{5\pi}{3}$ (рис. 10). За формулою (9)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\varphi \cdot d\varphi.$$

Після обчислення визначеного інтеграла отримуємо $S = \frac{1}{4}a^2\pi$ кв. од.

ЗАДАЧА 12 Індивідуальні завдання

1	$y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$	$\rho = 4\cos 3\varphi$, $\rho = 2\ \ (\rho \ge 2)$	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$
2	$y = (x+1)^2$, $y^2 = x + 1$	$\rho = 4\cos 4\varphi$	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \\ x = 1\ \ (x \ge 1). \end{cases}$
3	$y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$	$\rho = \cos 2\varphi$	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t),\ \ \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}, \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 0. \end{cases}$
4	$y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0,\ x = 0,\ x = 1$	$\rho = \sin 6\varphi$.	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \\ y = 4\ \ (y \ge 4). \end{cases}$
5	$y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$	$\rho = \sin\varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{4}\ \ \left(\varphi \ge \frac{\pi}{4}\right)$	$\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$

6	$x=\sqrt{e^{y}-1},\ x=0,$ $y=\ln 2$	$\rho=2\cos\varphi,$ $\rho=3\cos\varphi.$	$\begin{cases} x=t-\sin \boldsymbol{t}\ , \\ y=1-\cos \boldsymbol{t}\ , \\ y=1\ (y\ge 1), \end{cases}$ $0<x<2\pi$
7	$x=(y-2)^{3},$ $x=4y-8$	$\rho=\cos\varphi,$ $\rho=2\cos\varphi$	$\begin{cases} x=8\cos^{3}t\ , \\ y=8\sin^{3}t\ , \\ x=1\ \ (x\ge 1). \end{cases}$
8	$y=\dfrac{x}{(x^{2}+1)^{2}},$ $y=0, x=1$	$\rho=5\sin\varphi,$ $\varphi=\dfrac{\pi}{3}\ \left(\varphi\ge\dfrac{\pi}{3}\right).$	$\begin{cases} x=32\cos^{3}t\ , \\ y=\sin^{3}t\ , \\ x=4\ \ (x\ge 4). \end{cases}$
9	$x=4-y^{2},$ $x=y^{2}-2y$	$\rho=1+\sqrt{2}\cos\varphi,$ $\rho=2\ \ (\rho\ge 2)$	$\begin{cases} x=3\cos t\ , \\ y=8\sin t\ ,\ \ y=4\ (y\ge 4) \end{cases}$
10	$y^{2}=x-1,$ $y=(x-1)^{2}$	$\rho=2\sin 4\varphi$	$\begin{cases} x=9\cos t\ , \\ y=4\sin t\ , \\ y=2\ \ (y\ge 2). \end{cases}$
11	$x=\sqrt{4-y^{2}}\ ,$ $x=0,\ \ y=0,\ \ y=1$	$\rho=2\cos 6\varphi.$	$\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \\ y=0,\ 2\pi\le t\le 5\pi. \end{cases}$
12	$y=\dfrac{2a^{3}}{a^{3}+x^{2}},\ y=1$	$\rho=1+\sqrt{2}\sin\varphi.$	$\begin{cases} x=8(t-\sin t), \\ y=8(1-\cos t), \\ y=12,\ y\ge 12,\ \ 0\le t\le 16\pi. \end{cases}$
13	$y=\lvert\ln x\rvert,$ $y=10$	$\rho=3\sin\varphi,$ $\rho=5\sin\varphi.$	$\begin{cases} x=2t-t^{2} \\ y=2t^{2}-t^{3} \end{cases}$

14	$y=5x^3+x,$ $y=8,\ \ x=\pm 1$	$\rho=\frac{5}{2}\sin\varphi,$ $\varphi=\frac{\pi}{4}\ \left(\varphi\le\frac{\pi}{4}\right).$	$\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \\ x=3\sqrt{3}\ \left(x\ge 3\sqrt{3}\right). \end{cases}$
15	$x=x^2+y^2,$ $x+2y=1$	$\rho=4\cos 4\varphi$	$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3\sin t, \\ x=-1, x=1, -1\le x\le 1 \end{cases}$
16	$x^2+y^2=8x,$ $y=2$	$\rho=1+\cos\varphi,$ $\rho=1(\rho\ge 1)$	$\begin{cases} x=10(t-\sin t), \\ y=10(1-\cos t), \\ y=15,\ 0\le x\le 6\pi\ \ y\ge 15. \end{cases}$
17	$ay^2=x^3,\ \ y=0,,$ $x=a$	$\rho=1-\cos\varphi,$ $\rho=1(\rho\ge 1)$	$\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \\ x=2\ \ (x\ge 2). \end{cases}$
18	$y=x^2e^{-x},$ $y=e^{-x}$	$\rho=1+\sin\varphi,$ $\rho=1(\rho\ge 1)$	$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=3\sqrt{2}\sin t, \\ y=3\ \ (y\ge 3). \end{cases}$
19	$a^2y=8x^2,$ $x=a,\ \ y=0/$	$\rho=1+\sin\varphi,$ $\rho=\frac{1}{2}\left(\rho\ge\frac{1}{2}\right)$	$\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \\ x=3\sqrt{3}\ \left(x\ge 3\sqrt{3}\right). \end{cases}$
20	$2y=3\sqrt{4-x^2},$ $2y=4-x^2$	$\rho=1+\cos\varphi,$ $\rho=\frac{3}{2}\left(\rho\le\frac{3}{2}\right)$	$\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \\ y=3,\ 0\le x\le 6\pi\ \ y\ge 3. \end{cases}$

21	$y=3\sqrt{1-x^2}$, $x=\sqrt{1-y},\ x=0$	$\rho=1+\cos\varphi$, $\rho=1\,(\rho\ge 1)$	$\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \\ y=0, y=6, \\ 0\le x\le 2\pi, 0\le y\le 6. \end{cases}$
22	$2y=-3\sqrt{4-x^2}$, $4y=4-x^2$	$\rho=2\cos 2\varphi$, $\rho=1\,(\rho\ge 1)$	$\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \\ x=2\ \ (x\ge 2). \end{cases}$
23	$y=\dfrac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$	$\rho=4\sin 2\varphi$, $\rho=2\,(\rho\ge 2)$	$\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \\ y=2, y=3, \\ 0\le x\le 4\pi, 2\le y\le 3. \end{cases}$
24	$y=\sqrt{(x-2)^3}$, $y=0,\ x=6$	$\rho=\sqrt{3}\cos\varphi$, $\rho=\sin\varphi$	$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=5\sqrt{2}\sin t, \\ y=-5\ (y\ge -5) \end{cases}$
25	$y^2=x(1-x)$, $y^2=\dfrac{1}{2}-x$	$\rho=\cos\varphi+\sin\varphi$	$\begin{cases} x=\dfrac{t}{3}(6-t) \\ y=\dfrac{t^2}{8}(6-t) \end{cases}$
26	$y=-\sqrt{4-x^2}$, $x=0,\ y=0,\ x=1$	$\rho=\cos^2\varphi$	$\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \\ y=6,\ 0\le x\le 4\pi\ \ y\ge 6. \end{cases}$

27	$y=(x+2)^2,$ $y=x+2$	$\rho=\sin^2\varphi$	$\begin{cases} x=4\cos^3 t\,, \\ y=8\sin^3 t\,, \\ y=1, y=3\sqrt{3} \\ 1\le y\le 3\sqrt{3}. \end{cases}$
28	$x=4-(y+1)^2,$ $x=y^2+2y-3$	$\rho=4\sin 2\varphi$ $\rho=2\,(\rho\ge 2)$	$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t\,, \\ y=4\sqrt{2}\sin t\,, \\ y=-4\ (y\le -4) \end{cases}$
29	$y=\ln x,$ $y=\ln^2 x$	$\rho=2-\cos 2\varphi$	$\begin{cases} x=8(t-\sin t), \\ y=8(1-\cos t), \\ y=4, y=12, \\ 0\le x\le 2\pi, 4\le y\le 12. \end{cases}$
30	$x=4-(y-1)^2$ $x=y^2-4y+3$	$\rho=1-\cos\varphi,$ $\rho=1\,(\rho\le 1)$	$\begin{cases} x=8\cos^3 t\,, \\ y=2\sin^3 t\,, \\ x=-1\ (x\le -1). \end{cases}$

2. ЗНАХОДЖЕННЯ ДОВЖИНИ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ

Довжина дуги гладкої плоскої кривої, заданої рівнянням $y=f(x)$ на відрізку $a\le x\le b$, обчислюється за формулою

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (10)$$

Якщо ж крива задана параметрично:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t_0\le t\le T\,,$$

то

$$L=\int_{t_0}^{T}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (11)$$

Крива може бути задана в полярній системі координат:

$$\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta.$$

Тоді

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi. \qquad (12)$$

ЗАДАЧА 13. (13.1. а, б – 13.30. а, б.). Обчислити довжину дуги заданої плоскої кривої

Приклад 13.1 Знайти довжину дуги лінії кардіоїди, що задана рівнянням $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$.

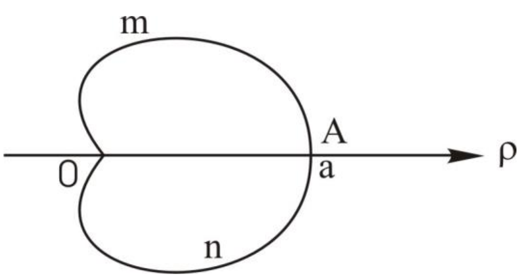


Рис. 11

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок кардіоїди (рис. 11). З рисунок видно, що крива складається з двох симетричних частин, одна з яких *(AmO)* відповідає зміні кута φ від 0 до π, друга – (*O n A*) – від π до 2π. Тому достатньо обчислити довжину половини дуги і подвоїти результат. Крива задана в полярній системі координат. Тому для розв’язання задачі потрібно використати формулу (12).

Спочатку знаходимо довжину дуги *(AmO)*, що описується при зміні кута φ від 0 до π:

$$L_{(AmO)}=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(a(1+\cos\varphi)\right)^2+(-a\sin\varphi)^2}\,d\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi.$$

Так як $\cos\frac{\varphi}{2} \ge 0$ при $\varphi \in [0, \pi]$, то $\quad |\cos\frac{\varphi}{2}| = \cos\frac{\varphi}{2}$ і

$$L_{(AmO)} = 2a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a, \quad L = 2L_{(AmO)} = 8a \text{ лін. од.}$$

ПРИКЛАД 13.2. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y^2 = (x-p)^3$, що вирізана параболою $y^2 = \frac{1}{2}p^2 x$.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис. 12) З рисунка видно, що в задачі потрібно знайти довжину дуги *BAB*', що складається з двох симетричних частин. Тому достатньо обчислити довжину дуги *AB* і подвоїти результат. Для знаходження меж інтегрування достатньо знайти абсцису точки *B*, оскільки абсциса точки *A* уже відома і рівна *p*. Розв’яжемо систему рівнянь двох парабол:

$$\begin{cases} y^2 = (x-p)^3 \\ y^2 = \frac{1}{2}p^2 x \end{cases} \Rightarrow (x-p)^3 = \frac{1}{2}p^2 x.$$

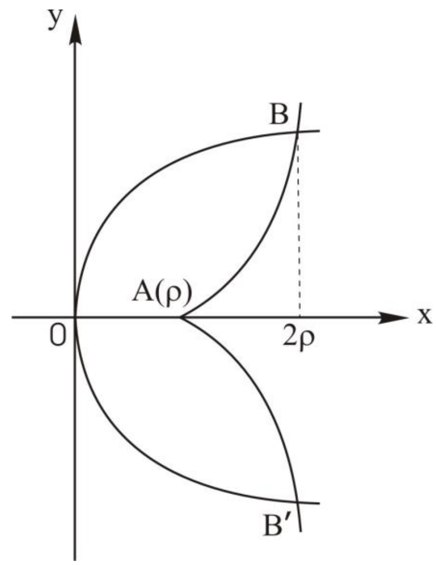


Рис. 12

Отримали кубічне рівняння, розв’язок якого знаходимо підбором: $x = 2p$.

Так як функцію можна записати рівнянням $y = f(x)$, то для розв’язання задачі використовується формула (10), де $a = p$, $b = 2p$, $f(x) = \sqrt{(x-p)^3}$,

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x-p)^{\frac{1}{2}}.$$

$$L = 2\int_{p}^{2p}\sqrt{1+(\frac{3}{2}(x-p)^{\frac{1}{2}})^2}dx = 2\int_{p}^{2p}\sqrt{1+\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}p}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-\frac{9}{4}p+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{p}^{2p} = \frac{16}{27}(\sqrt{(1+\frac{9}{4}p)^3}-1).$$

Зауваження. 1. Якщо при обчисленні довжин дуг, межі інтегрування відомі, будувати рисунок не обов'язково.

2. В деяких випадках при використанні формули (10) доцільно в якості значення функції покласти змінну x і формула (10) матиме вигляд $L = \int_{c}^{d}\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}dy$, де дуга кривої буде задана рівнянням $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$.

ЗАДАЧА 13. Індивідуальні завдання

1. а) $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$.	б) $\begin{cases} x = 5(t-\sin t), \\ y = 5(1-\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.
2.а) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2$.	б) $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{3}},\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

3. а) $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.	б) $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$
4 а) $y=\ln\frac{5}{2x}$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.	б) $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$
5. а) $y=-\ln\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$.	б) $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t), \\ y=4(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2$
6. а) $y=2+\sqrt{x-x^2}$, $\frac{3}{4}\ge x\ge\frac{1}{4}$.	б) $\rho=1-\sin\varphi$
7.а) $y=e^x+6, \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$.	б) $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi$.
8. а) $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$.	б) $\rho=5(1-\cos\varphi)$.
9. а) $y=\ln(x^2-1)$, $2\le x\le 3$.	б) $\begin{cases} x=10\cos^3 t, \\ y=10\sin^3 t. \end{cases}$
10. а) $y=\ln(1-x^2)$, $0\le x\le\frac{1}{4}$.	б) $\rho=3(1+\sin\varphi)$.
11. а) $y=2+chx$, $0\le x\le 1$.	б) $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi$
12. а) $y=1-\ln\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$.	б) $\rho=5e^{\frac{5\varphi}{12}}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$
13.а) $y=e^x+13$, $\ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}$.	б) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$ $\pi\le t\le 2\pi$.
14.а) $y=2-\sqrt{x-x^2}$, $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}$.	б) $\rho=4(1-\sin\varphi)$.
15.а) $y=2-e^x$, $\ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$.	б) $\begin{cases} x=3(\cos t+t\sin t), \\ y=3(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

16. а) $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$.	б) $\rho = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$.
17.а) $y = 21 - \ln\cos x$, $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$.	б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.
18. а) $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \le x \le 4$.	б) $\rho = 6(1 + \sin\varphi)$.
19.а) $y = 5 + \ln\sin x$, $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{4}$.	б) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t. \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.
20. а) $y = \sqrt{1 - x^2} - \arccos x + 1$.	б) $\rho = 8\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.
21. а) $y = \ln\sin x$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.	б) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.
22.а) $y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.	б) $\rho = 3\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.
23. а) $y = chx + 3$, $0 \le x \le 1$.	б) $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.
24. а) $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$.	б) $\rho = 4(1 - \sin\varphi)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$.
25. а) $y = \ln\cos x + 2$, $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$	б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$.
26.а) $y = e^x + 26$, $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}$.	б) $\rho = 8\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.
27.а) $y = -\sqrt{x - x^2} + 4$, $0 \le x \le \frac{3}{4}$.	б) $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.

28.а) $y=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}+3)$, $0\le x\le 2$.	б) $\rho=12e^{\frac{12\varphi}{5}}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$
29.а) $y=e^{x}+e$, $\ln\sqrt{x}\le x\le\ln\sqrt{15}$.	б) $\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t,\end{cases}$ $0\le t\le\frac{3\pi}{2}$.
30. а) $y=\frac{1}{2}(1-e^{x}-e^{-x})$, $0\le x\le 3$	б) $\rho=8(1-\cos\varphi)$.

3.ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ ТА ОБ'ЄМІВ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Нехай задана криволінійна трапеція (рис. 13), що спирається на вісь *OX* і обмежена неперервною кривою $y=f(x)$. Обертаючи таку трапецію навколо осі *OX*, отримаємо тіло обертання, об'єм якого обчислюється за формулою

$$V_{OX}=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx. \qquad (13)$$

Якщо ж трапеція спирається на вісь *OY* (мал. 14) і обертається навколо осі *OY*, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V_{OY}=\pi\int_c^d (\varphi(y))^2\,dy \qquad (14)$$

Зауваження 1. Якщо крива, що обмежує трапецію, задається *n* аналітичними виразами, то задана трапеція розбивається на *n* трапецій. Тоді обчислюють об'єм тіл, отриманих обертанням кожної з *n* трапецій, і результати сумують.

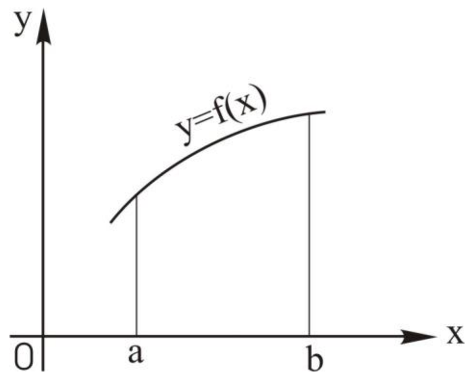


Рис. 13

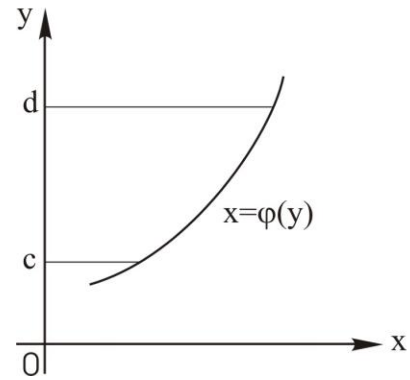


Рис. 14

Зауваження 2. Якщо тіло утворюється обертанням фігури, що не є трапецією (рис. 15), то воно розкладається на трапеції: знаходять об'єм тіл обертання кожної з побудованих трапецій. Тоді результуючий об'єм $V=V_{\text{об. A1 A m B B1}}$ -. $V_{\text{об. A1 A n B B1}}$.

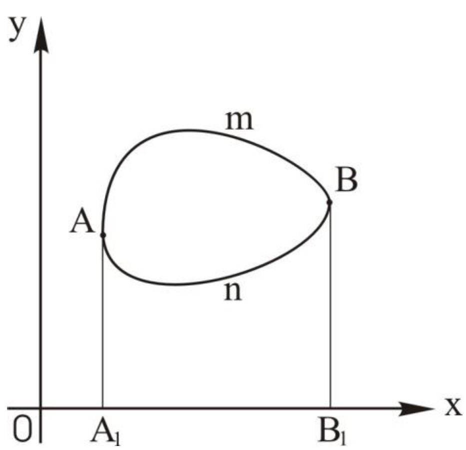


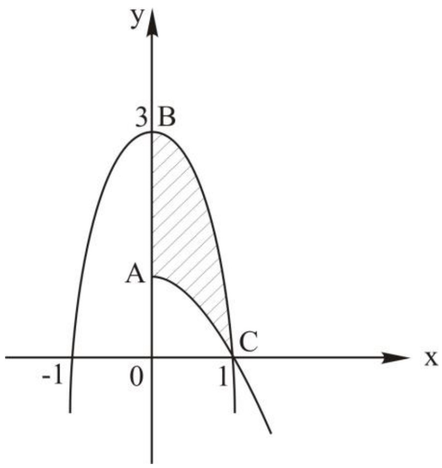
Рис. 15

3. У випадку параметрично заданої кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$ слід у формулах (13), (14) покласти $y = y(t)$, $dx = x'(t)dt$, $x = x(t)$, $dy = y'(t)dt$ і знайти відповідні межі зміни змінної *t*. Схема розв'язання задачі обчислення об'єма тіла обертання наступна:

1) виконати схематичний малюнок фігури, об'єм тіла обертання якої потрібно знайти;

2) знайти межі інтегрування (див. схему розв'язку задачі 9);

3) скласти, а потім і обчислити визначений інтеграл.



ЗАДАЧА 14. (14.1 – 14.30). Обчислити об’єм тіла обертання або площу поверхні тіла обертання.

ПРИКЛАД 14.1 Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *OX* фігури, обмеженої напівеліпсом $y = 3\sqrt{1-x^2}$, напівпараболою $x = \sqrt{1-y}$ і віссю *OY*.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок. Рівняння $y = 3\sqrt{1-x^2}$ задає верхню пловину еліпса $\frac{y^2}{9} + x^2 = 1$; рівняння $x = \sqrt{1-y}$ задає праву вітку параболи $x^2 = 1-y$ з вершиною в точці (0,1), що перетинає вісь *OX* в точках (1,0), (-1,0). Навколо осі *OX* обертається заштрихована фігура *ABC*. Об’єм тіла обертання знайдемо як різницю об’ємів, отриманих від обертання трапецій *OBC* та *OAC*. Використаємо формулу (13):

$$V = \pi\int_0^1 9(1-x^2)dx - \pi\int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \pi(9x - 3x^3)\Big|_0^1 -$$

$$-(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5})\Big|_0^1 = 5\frac{7}{15}\pi \text{ куб. од.}$$

Якщо навколо осі координат обертається дуга кривої *AB* (рис. 16, 17), то утворюється поверхня обертання, площа *P* якої обчислюється за наступними формулами:

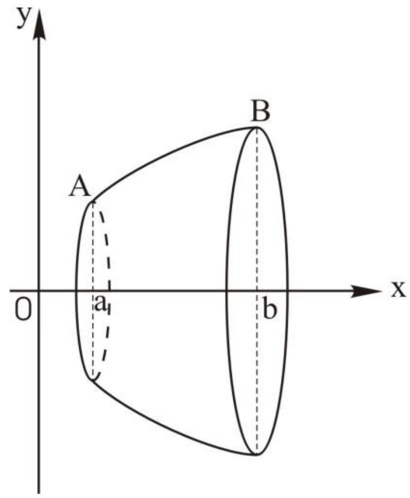


Рис. 16

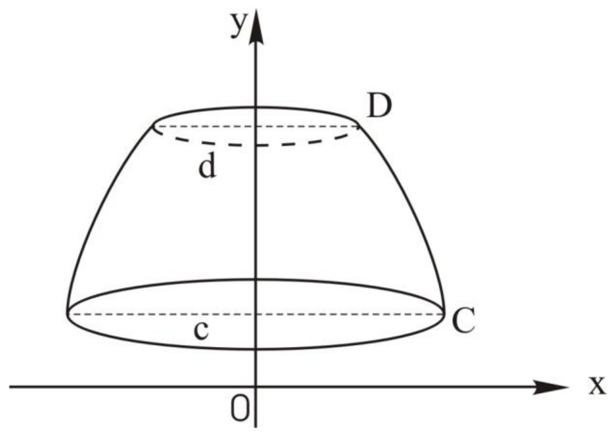


Рис. 17

крива задана явним рівнянням $y = f(x)$ і обертається навколо осі *OX*, $a \le x \le b$:

$$P_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx; \qquad (15)$$

крива задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le T$ і обертається навколо осі *OX*:

$$P_{OX} = 2\pi \int_{t_0}^{T} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt; \qquad (16)$$

крива задана явним рівнянням $x = \varphi(y)$ і обертається навколо осі *OY* (рис. 17):

$$P_{Oy} = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\,dy; \qquad (17)$$

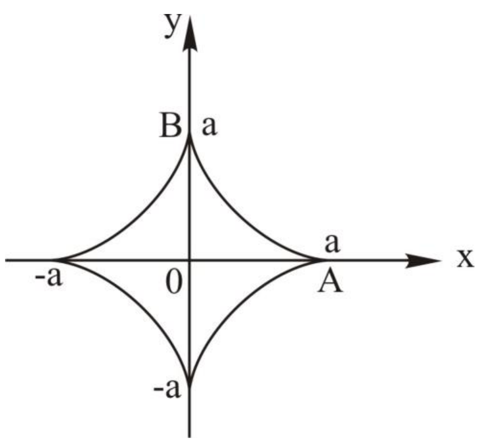
крива задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le T$ і обертається навколо осі *OY*:

$$P_{OY} = 2\pi \int_{t_0}^{T} x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \qquad (18)$$

ПРИКЛАД 14.1_Знайти площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ навколо осі *OX*.

Розв'язання. Будуємо схематичний рисунок поверхні, утвореної обертанням астроїди в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$



Астроїда симетрична відносно осей координат. Тому для розв'язання задачі достатньо обчислити площу поверхні, отриманої обертанням дуги *AB*, що розміщення в першій четверті, і результат помножити на 2.

Розв’язання 1. Для обчислення площі поверхні обертання астроїди навколо осі *OX* використаємо параметричне задання кривої, а отже, формулу (16). Так як дуга АВ описується при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то

$$\rho = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \sqrt{(-3a\cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3a\sin^3 t \cdot \cos t)^2}\, dt =$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\cos t \cdot \sin t dt = 12\pi a^2 \left. \frac{\sin^5 t}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

Шукана площа $P = \frac{12}{5}\pi a^2$ (кв. од.).

Розв'язання.2. Для розв’язання використаємо початкове рівняння астроїди, а отже, формулу (15). З рівняння астроїди

$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot y'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

За формулою (15)

$$P_{OX}=2\cdot 2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=4\pi\int_0^a \frac{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=$$

$$=-\frac{4\pi a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}a^{\frac{1}{3}}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a=\frac{12}{5}\pi a^2 \quad \text{(кв. од.)}$$

Зауваження. Порівнюючи наведені два розв’язки, бачимо, що перший спосіб приводить до більш простих операцій обчислювального характеру. В деяких випадках перехід до параметричної форми задання кривої може значно спростити інтеграл, отриманий в результаті розв’язку задачі.

ЗАДАЧА 14. Індивідуальні завдання

Знайти об’єм тіл обертання навколо кривої *OX* фігур, обмежених графіками функцій.

14.1 $y=3\sin x,\ y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$.

14.2 $2x-x^2-y=0,\ 2x^2-4x+y=0$.

14.3 $x=\sqrt[3]{y-2},\ x=1,\ y=1$.

14.4 $y=xe^x,\ y=0,\ x=1$.

14.5 $y=2x-x^2,\ y=-x+2,\ x=0$.

14.6 $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

14.7 $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

14.8 $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = \sqrt{y-2}$, $x = 1$.

14.9 $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

14.10 $y = \sin(\frac{\pi x}{2})$, $y = x^2$.

Знайти об’єм тіл обертання навколо осі *OY* фігур, обмежених графіками функцій.

14.11 $y = \arccos\left(\frac{x}{3}\right)$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

14.12 $y = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$, $y = \arcsin x$, $y = \frac{\pi}{2}$

14.13 $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

14.14 $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0{,}5$.

14.15 $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$

14.16 $y = (x-1)^2$, $y = 1$

14.17 $y = \arccos\left(\frac{x}{5}\right)$, $y = \arccos\left(\frac{x}{3}\right)$, $y = 0$

14.18 $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$

14.19 $y = \arccos\left(\frac{x}{5}\right)$, $y = \arccos(x)$, $y = 0$

14.20 $y = (x-1)^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

Знайти площі поверхонь обертання навколо осі *OX* кривих графіків функцій.

14.21 $y=\frac{1}{3}ch3x$, $0\le x\le 1$.

14.22 $y=\frac{1}{3}x^3$, $-1\le x\le 1$.

14.23 $y=e^{-\frac{x}{2}}$, $0\le x\le 2$.

14.24 $\begin{cases} x=a(3\cos t-\cos 3t), \\ y=a(3\sin t-\sin 3t), \end{cases}$ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

14.25 $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le \pi$.

Знайти площі поверхонь обертання навколо осі *OY* кривих графіків функцій

14.26. $9y^2=4x^3$, $0\le x\le 1$.

14.27 $\begin{cases} x=3\cos t-\cos 3t, \\ y=3\sin t-\sin 3t, \end{cases}$ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

14.28 $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

14.29 $x=\frac{1}{3}y^3$, $0\le y\le 2$.

14.30 $4x^2+y^2=4$.

4. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

ЗАДАЧА 15 (15.1 – 15.30). Використовуючи визначений інтеграл, розв’язати задачу механіки.

ПРИКЛАД 15.1 Обчислити силу тиску рідини на вертикально опущену в неї пластину (рис. 18), якщо рівняння бокових ліній $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$. Густина рідини ρ, прискорення вільного падіння $g = 10$ м/с^2. Відомо, що тиск рідини на глибині x рівний $\rho g x$. На глибині x виділяємо елемент площі $ds = (|f_1(x)| + |f_2(x)|)dx$. Сила тиску рідини на виділену смугу

$$dF = \rho g x \cdot ds = \rho g x\left(|f_1(x)| + |f_2(x)|\right)dx.$$

Сила тиску рідини на всю пластину

$$F = \int_0^h \rho g x(|f_1(x)| + |f_2(x)|)dx. \quad (19)$$

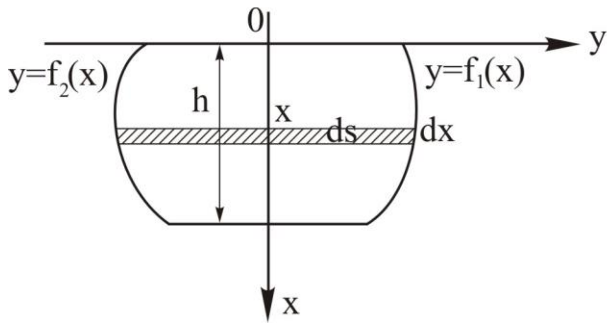


Рис. 18

ПРИКЛАД 15.2 Обчислити силу, з якою вода тисне на пластину; переріз пластини являє собою рівнобедрений трикутник, висота якого рівна *h*, а основа – *a*, причому основа трикутника співпадає з поверхнею води.

Розв'язання. Будуємо систему координат так, щоб вісь *OX* збігалася з висотою трикутника, а вісь *OY* – з основою (рис. 19). Так як Δ ABC симетричний відносно осі *OX*, то достатньо знайти силу тиску води на ΔCDB і результат подвоїти. Щоб використати формулу (19) потрібно знайти рівняння бокових сторін трикутника. Точка B має координати $B(0, \frac{a}{2})$, точка $C(h, 0)$. Рівняння прямої BC: $\frac{x}{h} + \frac{y}{a/2} = 1$ або $y = \frac{a(h-x)}{2h}$.

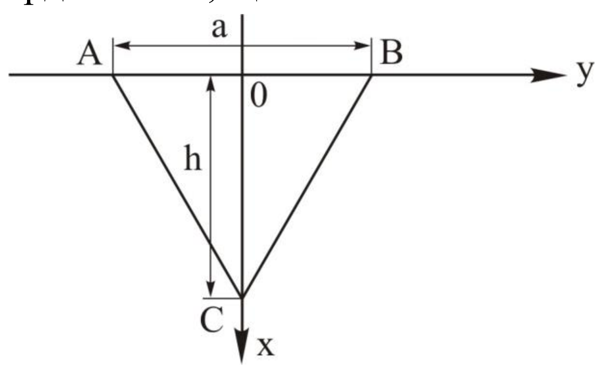


Рис. 19

За формулою (19)

$$F = 2\int_0^h \rho g x \frac{a(h-x)}{2h} dx = \frac{\rho g a}{2h} \cdot 2\int_0^h x(h-x) dx =$$

$$= \frac{\rho g a}{h}\left(\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \frac{\rho g a}{h}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{\rho g a h^2}{6} \quad \text{(од. сили).}$$

ЗАДАЧА 15. Індивідуальні завдання

Знайти силу, з якою вода тисне на пластину, переріз якої має форму рівнобічної трапеції (рис. 20).

15.1. a = 4,5 м; b = 6,6 м; h = 3,0 м.
15.2. a = 4,8 м; b = 7,2 м; h = 3,0 м.
15.3. a = 5,1 м; b = 7,8 м; h = 3,0 м.
15.4. a = 5,4 м; b = 8,4 м; h = 3,0 м.
15.5. a = 5,7 м; b = 9,0 м; h = 4,0 м.
15.6. a = 6,0 м; b = 9,6 м; h = 4,0 м.
15.7. a = 6,3 м; b = 10,8 м; h = 4,0 м.
15.8. a = 6,6 м; b = 10,8 м; h = 5,0 м.
15.9. a = 6,9 м; b = 11,4 м; h = 5,0 м.
15.10. a = 7,2 м; b = 12,0 м; h = 5,0 м.
15.11. a = 7,5 м; b = 12,5 м; h = 5,0 м.
15.12. a = 7,8 м; b = 13 м; h = 6,0 м.
15.13. a = 8 м; b = 13,2 м; h = 6,0 м.
15.14. a = 8,1 м; b = 13,4 м; h = 6,0 м.
15.15. a = 8,3 м; b = 13,5 м; h = 7,0 м.

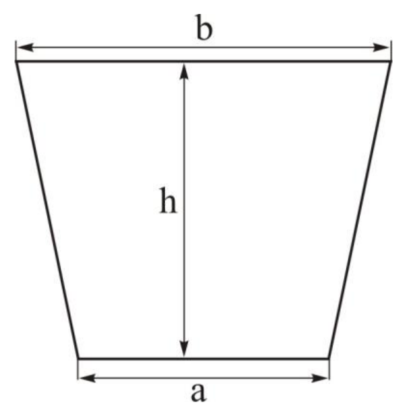


Рис. 20

ЗАДАЧА 15.3 Обчислити роботу змінної сили, при цьому використовуючи формулу

$$I = \int_a^b F(x) dx, \qquad (20)$$

де $F(x)$ – змінна сила, що діє на відрізку $[a,b]$.

ПРИКЛАД 15.3 Обчислити роботу, яку потрібно витратити для побудови піраміди з квадратною основою, якщо висота піраміди h, сторона основи a, питома вага матеріалу γ.

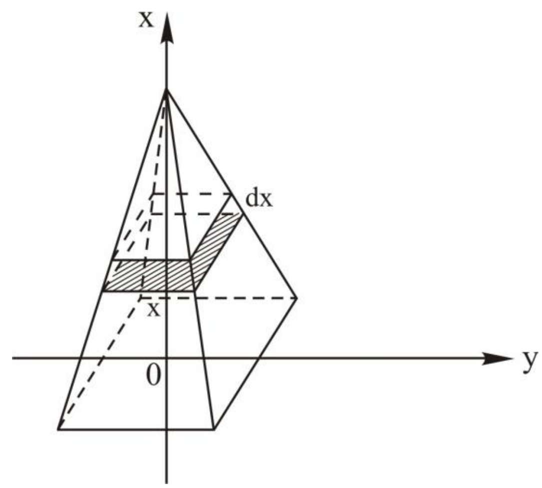


Рис. 21

Розв'язання. Розташуємо осі координат як показано на рис. 21. Для підйому на висоту x будівельного матеріалу об'ємом dv – буде витрачена робота $dA = xd\rho$, де $d\rho$ - вага об'єму dv, рівна γdv. Отже, $dA = x\gamma dv$. Оскільки об'єм dv (рис. 21) має малу товщину dx, то можна вважати, що він являє собою прямокутний паралелепіпед з квадратною основою і висотою dx. Звідси $dv = sdx$.

Знайдемо S. З геометрії відомо, що $\dfrac{S}{S_{OCH}} = \dfrac{h_x^2}{h^2}$.

Звідси $S = S_{OCH} \cdot \dfrac{h_x^2}{h^2} = a^2 \dfrac{(h-x)^2}{h^2}$ і $dv = \dfrac{a^2}{h^2}(h-x)^2 dx$;

$$dA = x\gamma \frac{a^2}{h^2}(h-x)^2 dx.$$

Повна робота $A = \int\limits_0^h x\gamma \dfrac{a^2}{h^2}(h-x)^2 dx = \gamma \dfrac{a^2}{h^2}\int\limits_0^h x(h-x)^2 dx$.

Остаточно $A = \dfrac{1}{12}\gamma a^2 h^2$ (од. роб.)

Знайти роботу, яку потрібно витратити, щоб викопати котлован циліндричної форми радіуса R і висоти H, якщо питома вага породи γ.

15.16. R=10 м, H=5,4 м.
15.17. R=8,2 м, H=6 м.
15.18. R=8,4 м, H=6,3 м.
15.19. R=8,9 м, H=4,5 м.
15.20. R=12 м, H=4,8 м.
15.21. R=10,5 м, H=7,8 м.
15.22. R=15,2 м, H=6,2 м.
15.23. R=15,8 м, H=5,8 м.
15.24. R=14,5 м, H=3,3 м.
15.25. R=12,8 м, H=7,4 м.
15.26. R=12,4 м, H=10 м.
15.27. R=10,3 м, H=8,5 м.
15.28. R=10,6 м, H=12,3 м.
15.29. R=15,4 м, H=5,7 м.
15.30. R=25,1 м, H=10,4 м.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, гл. X, XI, XII. – М.: Наука, 1978.

2. *Бугров Я.С., Никольский С.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления, гл. V, VI, VII. – М.: Наука, 1980.

3. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977.

4. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. – М.: Высш. шк., 1983.

5. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Вища шк., 1993.-648с.

6. *Денисюк В.П., Репета В.К.* Вища математика. Модульна технологія навчання: Навчальний посібник :У 4-х ч. –Ч. 2.-К.: Книжкове вид-во НАУ,2005.-276с.

Навчально-методичне видання

ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Практичний посібник з вищої математики
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
та 193 «Геодезія та землеустрій»

Укладачі: БОНДАРЕНКО Наталія В'ячеславівна
ЗАБАРИЛО Олексій Віталійович
ОТРАШЕВСЬКА Валентина Володимирівна
СОКОЛОВА Людмила Віталіївна
КРАСНЄЄВА Анна Олександрівна

Підписано до друку 27.03. 2024. Формат 60х80$_{1/16.}$
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 3,72. Обл.-вид. арк. 4,0. Ум. фарбовід 13.
Електронний документ. Вид. № 112/ІІІ-08 Замовлення № 90/2-09

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.