МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

І.С. Безклубенко, О.І. Баліна, Ю.П. Буценко

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Модуль 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія,

елементи математичного аналізу.

Конспект лекцій
для студентів спеціальностей
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Київ 2021

УДК 517

В41

Рецензент О.О. Терентьєв, д-р. техн. наук. професор.

Затверджено на засіданні навчально-методичної ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол №___від «____» _________ 2020 р.

Безклубенко І.С., Баліна О.І., Ю.П. Буценко

В41 Математичний аналіз. Модуль 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, елементи математичного аналізу.: конспект лекцій / І.С. Безклубенко,О.І. Баліна, Ю.П. Буценко – Київ: КНУБА, 2021. – 64 с.

Розглянуто лінійні перетворення матриць, добуток матриць, розв'язання систем лінійних рівнянь методами Крамера, Гаусса, методом оберненої матриці, розв'язання задач просторової геометрії з застосуванням векторної алгебри, поняття функції, правила диференціювання, повне дослідження функції з допомогою похідних та побудова графіка функцій. Містить необхідний теоретичний та довідковий матеріал, приклади розв'язання задач та питання для самоконтролю.

Призначений для студентів спеціальностей 151«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

УДК 517

ЗМІСТ

Вступ 4
Лекція 1. Матриці. Дії над матрицями 5
Лекція 2. Визначники 7
Лекція 3. Матричні рівняння. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь 11
Лекція 4. Правило Крамера 12
Лекція 5. Матричний спосіб розв’язання систем лінійних рівнянь................13
Лекція 6. Метод Гаусса 15
Лекція 7. Ітераційні методи розв’язування систем лінійних рівнянь..............19
Лекція 8. Вектори і дії над ними. Базис..22
Лекція 9. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів......................24
Лекція 10. Пряма на площині 29
Лекція 11. Криві на площині 31
Лекція 12. Алгебраїчні криві другого порядку...32
Лекція 13. Площина в просторі 36
Лекція 14. Пряма в просторі 38
Лекція 15. Змінні величини. Поняття функції 40
Лекція 16. Границя послідовності. Границя функції 43
Лекція 17. Розкриття невизначеностей...45
Лекція 18. Порівняння нескінченно малих функцій 47
Лекція 19. Неперервність функцій. Класифікація точок розриву....................49
Лекція 20. Означення похідної та правила диференціювання функцій 52
Лекція 21. Застосування похідної 56
Лекція 22. Дослідження функцій та побудова графіків функцій....................58
Список літератури 64

Вступ

Конспект лекцій «Математичний аналіз Модуль 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, елементи математичного аналізу» розраховано для студентів спеціальностей 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» та 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» і містить 22 лекції, підготовлені у відповідності до навчальної робочої програми з Модуля 1. «Лінійна алгебра, аналітична геометрія, елементи математичного аналізу», дисципліни «Математичний аналіз» , яка викладається в першому семестрі.

В конспекті лекцій детально описані методи розв’язування систем лінійних рівнянь, підходи до розв’язання просторових геометричних задач за допомогою елементів векторної алгебри, методи обчислення границь послідовностей, повне дослідження функцій і побудова графіків.

Після вивчення курсу лекцій «Математичний аналіз» студент повинен вміти:

- обчислити визначник та ранг матриці різними способами;
- розв’язувати системи лінійних рівнянь методами Крамера, Гаусса, методом оберненої матриці;
- дослідити систему рівнянь за Теоремою Крамера-Капеллі;
- розв’язати просторову геометричну задачу з застосуванням векторної алгебри;
- знайти границю послідовності;

дослідити функцію та побудувати її графік.

Мета написання конспекту лекцій - розкриття змісту основних понять і теорем розділу, що надає можливість сформувати знання з фундаментальних розділів математичного аналізу в обсязі, необхідному для володіння його апаратом та методами в процесі розв’язування прикладних задач, побудови та аналізу моделей природних, техногенних, економічних та соціальних об'єктів і процесів інформатизації, а також для наступного вивчення навчальних дисциплін, зокрема: диференціальні рівняння, теорія ймовірностей та математична статистика, методи оптимізації та дослідження операцій.

-

Лекція 1. МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

У лекції розглядаються основні поняття пов'язані з матрицями, операції над матрицями і властивості операцій над матрицями. Усі властивості та означення ілюструються прикладами.

Матрицею розміром $m \times n$ називається множина з $m \cdot n$ елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right), \text{де} \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.1}$$

Якщо $m = n$, то матриця квадратна.

Квадратну матрицю (a_{ij}) порядку n називають:

- *верхньою трикутною матрицею*, якщо $a_{ik} = 0$, для всіх $i>k$;
- *нижньою трикутною матрицею*, якщо $a_{ik} = 0$, для всіх $i<k$;
- *діагональною матрицею*, якщо $a_{ik} = 0$, для всіх $i \neq k$;
- *одиничною матрицею* $E=(a_{ij})$, якщо

$$a_{ik} = \begin{cases} 0, \text{при} & i \neq j; \\ 1, \text{при} & i = j \end{cases}. \tag{1.2}$$

Матрицю $\left(a_{1,j}\right)$, $j = \overline{1,n}$, називають *матрицею -рядком*:

$$A = \left(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}\right).$$

Матрицю $\left(a_{i,j}\right)$, $i = \overline{1,m}$, називають *матрицею -стовпцем:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, її називають *нуль-матрицею* та позначають O.

Рівність матриць. Дві матриці $A=\left(a_{ij}\right)$ та $B=\left(b_{ij}\right)$ рівні $\left(A=B\right)$, якщо вони мають однаковий розмір $m\times n$ та всі відповідні елементи рівні між собою.

Сумою $A+B$ розміру $m\times n$ матриці $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ називають матрицю $C=\left(c_{ij}\right)$ того самого порядку, кожний елемент c_{ij} якої дорівнює $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Добутком αA матриці $A=\left(a_{ij}\right)$ на число α називають матрицю $B=\left(b_{ij}\right)$, елементи якої $b_{ij} = \alpha\ a_{ij}$.

Добутком $A\cdot B$ розміру $m\times n$ матриці $A=\left(a_{ij}\right)$ на матрицю $B=\left(b_{ij}\right)$ розміром $(n\times k)$ називають $(m\times k)$ C – матрицю $C=\left(c_{ij}\right)$, елемент якої c_{ij}, що стоїть в i-му рядку та j-му стовпці дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B:

$$c_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}b_{\nu i}, \quad i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,k}. \tag{1.3}$$

Операції додавання і множення матриці на число називають *лінійними операціями*. Вони мають такі властивості:

1. $A+B=B+A$ – комутативність додавання.

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – асоціативність додавання.

3. Існує протилежна до A матриця $-A$ така, що $A+(-A)=O$.

4. Якщо $\alpha\in$R, та $\mu\in$R, то $(\alpha\mu)A=\alpha(\mu A)$.

5. $1\cdot A=A$; $\quad 0\cdot A=O$; $\quad O\cdot\alpha=O$; $\quad \left(-1\right)\cdot A=-A$.

Властивості операцій множення двох матриць.

1. $AB\neq BA$, тобто добуток матриць некомутативний у загальному випадку. Якщо $AB=BA$, матриці називають *комутативними* або переставними.

2. $A\left(BC\right)=\left(AB\right)C$ - асоціативність множення.

3. Існує матриця E, така що $AE=EA=A$.

4. $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$ - дистрибутивність відносно додавання.

Приклад 1. Дано матриці *A, B*:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Обчислити $2A+3B$; $A\cdot B$.

Розв'язання.

$$2A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 10 & -8\end{pmatrix};\ 3B=\begin{pmatrix}9 & 12\\ 6 & 15\end{pmatrix}.$$

$$2A+3B=\begin{pmatrix}15 & 8\\ 16 & 7\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 3\cdot 4+(-2)\cdot 5\\ 5\cdot 3+(-4)\cdot 2 & 5\cdot 4+(-4)\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}.$$

Операція транспонування. Нехай $A=\left(a_{ij}\right)$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Матриця $A^T=\left(a_{ji}\right)$, $j=\overline{1,n}$; $i=\overline{1,m}$, отримана з матриці *A* заміною рядків стовпцями, а стовпців рядками, називається *транспонованою* до матриці *A*.

Очевидно, що $\left(A^T\right)^T=A$; $\left(A\cdot B\right)^T=B^T\cdot A^T$.

<u>Запитання для самоконтролю:</u>

1. Що таке матриця?
2. Операції додавання матриць і множення матриці на число.
3. Властивості лінійних операцій.
4. Правило множення матриць.
5. Властивості операцій множення двох матриць.

Лекція 2. **ВИЗНАЧНИКИ**

У лекції розглядаються визначники другого та третього порядків, способи їх обчислення. Вводиться поняття алгебраїчного доповнення та оберненої матриці. Наведені приклади, що ілюструють кожен спосіб обчислення.

Визначником квадратної матриці A порядку n (або просто визначником) *називається число*

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.1)$$

Визначник 2-го порядку – це число Δ таке, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (2.2)$$

Визначником 3-го порядку називається число Δ таке, що

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \qquad (2.3)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Визначник 3-го порядку обчислюють за правилом трикутника (рис.1) та Саррюса (рис. 2).

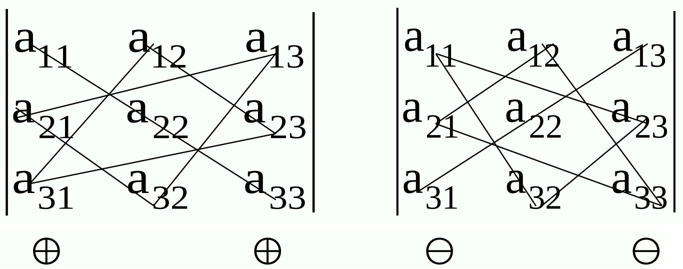

Рис. 1. Правило трикутника

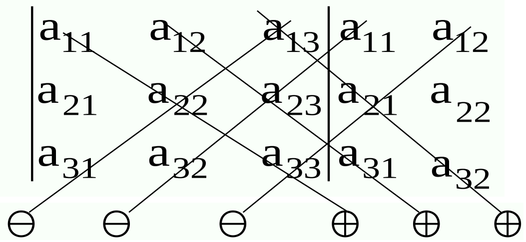

Рис. 2. Правило Саррюса

Приклад 2. Обчислити:

$$а)\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} \qquad б)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$а)\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\cos 2\alpha.$$

$$б)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.=1*3*3+2*1*1+0*4*0-0*3*1-1*1*4-0*2*3=9+2-4=7.$$

Якщо у визначнику порядку n закреслити j*-й* стовпець та i*-й* рядок, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}, то одержаний визначник (n-1)-порядку називають *мінором* елемента a_{ij} (M_{ij}), а число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – його *алгебраїчним доповненням*.

Визначник порядку $n \geq 4$ обчислюється за методом зниження порядку визначника за формулою

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}\text{, або } \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}\ .$$

Відношення $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ називають розкладом визначника по i-му рядку, а відношення $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$ - розкладом по j-му стовпцю.

Обернена матриця. Квадратна матриця A називається особливою, якщо $\det A = 0$, та неособливою, якщо $\det A \neq 0$.

Якщо A – неособлива матриця, то існує єдина матриця A^{-1} така, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де Е – одинична матриця. A^{-1} - називають *оберненою матрицею* до A.

Одним з основних методів обчислення оберненої матриці є метод перетворення. Справедлива рівність:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці.

Приклад 3. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 5 + 3\cdot(-2)(-1) + 2\cdot 2\cdot 4 - 4\cdot 0\cdot(-1) -$$

$$-(-2)\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 5 = -4 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \; A_{21} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 7/4 & 9/4 & 5/4\\ 3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}.$$

<u>Запитання для самоконтролю</u>:

1. Метод Саррюса?
2. Метод зірочки?
3. Чим мінор відрізняється від алгебраїчного доповнення?
4. Формула для знаходження оберненої матриці.

Лекція 3. МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

У лекції розглядається загальний вигляд системи n лінійних рівнянь з n невідомими, а також їх зв'язок з матричними рівняннями. Наводяться приклади запису систем лінійних рівнянь в різних формах.

Існує три типи матричних рівнянь $AX=B$; $XA=B$; $AXB=C$, де X – невідома матриця; A, C, B - відомі матриці.

Розв'яжемо ці рівняння.

1. $AX=B$; $\quad A^{-1}AX=A^{-1}B$; $\quad X=A^{-1}B$.
2. $XA=B$; $\quad XAA^{-1}=BA^{-1}$; $\quad X=BA^{-1}$.
3. $AXB=C$; $\quad A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$; $\quad X=A^{-1}CB^{-1}$.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь складають, коли йдеться про взаємодію кількох процесів, кожен з яких можна описати лінійним рівнянням. Розв'язати систему – означає знайти таку взаємодію.

Система n – лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (3.4)$$

або в матричному вигляді

AX=B,

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - матриця системи;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - матриця невідомих; $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$ - матриця вільних членів.

Запитання для самоконтролю:

1. Яка система лінійних рівнянь називається квадратною?
2. Яка система лінійних рівнянь називається визначеною?
3. Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?
4. Яка система лінійних рівнянь називається лінійною?

Лекція 4. ПРАВИЛО КРАМЕРА

У лекції розглядається дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою Теореми Крамера. Наводиться приклад розв’язання системи.

Якщо в системі $\det A \neq 0$, тобто матриця має обернену, то система має єдиний розв'язок $X = A^{-1}B$ або $X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$; $i = \overline{i,n}$.

Визначник Δ_i отриманий з визначника Δ заміною *i*-го стовпця на стовпець вільних членів.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_1 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + 7x_2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -4.$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = 1; \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = 1; \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = 1.$$

Відповідь: $x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$.

Запитання для самоконтролю:

1. Коли система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок?
2. Коли система лінійних алгебраїчних рівнянь не має розв'язків?
3. Коли система лінійних алгебраїчних рівнянь має безліч розв'язків?

Лекція 5. МАТРИЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У лекції розглядаються приклади розв'язання систем рівнянь матричним способом за допомогою матричного рівняння.

Запишемо систему у вигляді матричного рівняння: $AX = B$.
Тоді $X = A^{-1}B$.

Приклад 5. Розв'язати матричним методом систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + 7x_2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо матрицю *A* та обчислимо det*A*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}; \quad \det A = -4; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Матричне рівняння системи має вигляд: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$.
Знайдемо обернену матрицю. Для цього визначимо алгебраїчні доповнення.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 11; \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Тоді $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Звідси

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14+0+10 \\ 6+0-10 \\ 22-16-10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = x_2 = x_3 = 1.$

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке обернена матриця?
2. Умови існування оберненої матриці?
3. Що таке транспонована матриця алгебраїчних доповнень?

Лекція 6. МЕТОД ГАУССА

У лекції розглядається застосування метода Гаусса до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Наводиться практичний приклад розв'язання системи методом Гаусса.

Суть методу Гаусса полягає в тому, що послідовним виключенням невідомих дана система перетворюється в еквівалентну їй *трикутну систему*. Метод Гаусса можна використовувати при розмірах системи $m \times n$ та $n \times n$.

Спочатку нормують перше рівняння, поділивши його коефіцієнти на a_{11}. Утворене рівняння множать на перші коефіцієнти усіх інших рівнянь і послідовно віднімають від решти рівнянь. У результаті першу змінну буде виключено з усіх рівнянь, крім першого. На наступному етапі розв'язання така процедура застосовується до решти n-1 рівнянь, з яких виключається друга змінна. Процедура повторюється доти, поки після n кроків система не буде зведена до трикутного вигляду.

Математично цю процедуру можна описати так: на k-му кроці процесу виключення нормовані коефіцієнти k-го рівня мають вигляд:

$$b_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}}, \qquad (6.1)$$

а нові коефіцієнти в наступних рівняннях записуються так:

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{ik} b_{ki}, \qquad i = k. \qquad (6.2)$$

Головні коефіцієнти рівнянь $(a_{11}, a_{22}^{(1)}, ..., a_{nn}^{(n-1)})$ не дорівнюють нулю. Цієї умови можна дотримуватись, виконавши відповідні перетворення.

Схема зведення системи рівнянь до трикутного вигляду називається *схемою єдиного ділення*.

Процес визначення коефіцієнтів b_{ij} трикутної системи називається прямим ходом. З останнього рівняння трикутної системи, яке містить одну змінну, знаходимо її значення, а далі зворотним ходом обчислюємо значення решти змінних.

Отже, алгоритм Гаусса складається з двох етапів:
1) побудова допоміжної матриці (прямий хід);
2) знаходження розв'язків побудованої системи (зворотний хід).

Розглянутий метод дає змогу розв'язувати і так звані погано обумовлені системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Зауважимо, що оскільки йдеться про матриці твердості, то метою при виборі основної системи є отримання на головній діагоналі таких елементів, які були б значно більшими за решту. При цьому, якщо найбільший елемент у кожному рядку матриці взяти за головний, то можна відразу зменшити можливість поганої обумовленості.

Розробка алгоритмів розв'язання задач і створення відповідних програм обчислень є насамперед справою спеціалістів з числових методів. При розв'язуванні прикладних задач значна частина машинного часу витрачається на відшукання розв'язків систем алгебраїчних рівнянь і обернення матриць. Бажано, щоб студент мав уявлення про те, за якими схемами реалізуються відповідні програми.

Приклад 6. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання.

x_1	x_2	x_3	x_4	Вільні члени
1	1	1	-1	2
1	-1	-1	1	0
2	1	-1	2	9
3	1	2	-1	7
1	1	-1	-1	2
0	2	-2	-2	2
0	1	3	-4	-5
0	2	1	-2	2
	1	1	-1	1
		-2	3	6
		1	0	3
		1	-3/2	-3
			-3/2	-6
			1	4
		1		3
	1			2
1				1

Прямий хід

A(4×4)

B(3×3)

C(2×2)

Зворотній хід

Корені системи рівнянь

$$x_3 \cdot 1 - 3/2 \cdot 4 = -3; \qquad x_3 = -3 + 6 = 3;$$
$$x_2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 1; \qquad x_2 = 1 + 4 - 3 = 2;$$
$$x_1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2; \qquad x_1 = 2 + 4 - 3 - 2 = 1.$$

Виконавши прямий хід, дістанемо матрицю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Зворотнім ходом знаходимо корені: x_1=1; x_2=2; x_3=3; x_4=4.

Приклад 7. Розв’язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \qquad \text{Розмір } 5\times 4.$$

Розв’язання. Складемо розширену матрицю системи та зведемо її до трикутної:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \to$$

Четвертий рядок пропорційний другому і тому його відкидаємо, а другий скорочуємо на -2.

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Запишемо систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ \qquad 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ \qquad\quad -6x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

З третього рівняння маємо $x_3 = \frac{5x_4 + 1}{6}$;

з другого – $x_2 = \frac{1 - 7x_4}{2}$;

з першого – $x_1 = \frac{-1 + 5x_4}{6}$.

<u>Запитання для самоконтролю</u>:

1. В чому полягає прямий хід метода Гаусса ?
2. Що таке розширена матриця системи?
3. В чому полягає зворотній хід метода Гаусса?

Лекція 7. ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У лекції розглянуто один з ітераційних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Приведемо достатні умови збіжності ітераційного процесу і приклад розв'язання системи лінійних рівнянь третього порядку.

Ітераційні схеми розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовуються до систем, зведених до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - ... - a_{1n}x_n + b_1); \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - ... - a_{2n}x_n + b_2); \\ .... \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - ... - a_{nn}x_{n-1} + b_n). \end{cases} \qquad (7.1)$$

(перше рівняння розв'язане відносно x_1, друге – відносно x_2 і т.д.). Праві частини рівнянь системи можна розглядати як функції від *n* аргументів x_1, x_2, … , x_n. Позначимо праву частину *i*-го рівняння через $L_i(x_1, x_2, \dots , x_n)$

(зберігаючи єдиний підхід, не зважаємо на те, що у правій частині *i*-го рівняння x_i відсутнє).

Тоді система матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = L_1(x_1, x_2, ..., x_n); \\ x_2 = L_2(x_1, x_2, ..., x_n); \\ \qquad .... \\ x_n = L_n(x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases} \qquad (7.2)$$

Задамо початкові (нульові) наближення коренів цієї системи: $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$. Тоді перші наближення дістаємо, підставивши у праві частини початкові наближення:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = L_1(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}); \\ x_2^{(1)} = L_2(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}); \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(1)} = L_n(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}). \end{cases} \qquad (7.3)$$

Одержані перші наближення можна використати для знаходження других і т.д. Ітераційний процес продовжується доти, доки $x^{(k)}$ не стануть достатньо близькі до $x^{(k-1)}$, тобто почне виконуватись нерівність

$$M^k = \max(x_i^k - x_i^{k-1}) \le \varepsilon, \qquad (7.4)$$

де i=1,2…, n; ε – задана точність.

Краще порівнювати з ε не абсолютні, а відносні різниці сусідніх величин, розглядаючи нерівність

$$\max\left|\frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}}\right| < \varepsilon. \qquad (7.5)$$

Щоб систему лінійних рівнянь можна було обчислити методом ітерацій, треба перевірити достатні умови збіжності ітераційного процесу.

Достатньо використати такі умови:

1) $A = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$ - максимальна сума модулів відношень коефіцієнтів будь-якого рядка до діагонального коефіцієнта менша одиниці. Нерівність буде виконуватися, якщо діагональні елементи системи задовольняють умову:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{i \neq 1 \\ j=1}}^{n} \left|a_{ij}\right|; \tag{7.6}$$

2) $A = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| < 1$ - максимальна із сум модулів коефіцієнтів при невідомих у правій частині системи, взятих по стовпцях, повинна бути меншою одиниці;

3) $A = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2} < 1$ - сума квадратів усіх коефіцієнтів при невідомих у правій частині системи повинна бути меншою одиниці.

Приклад 8. Дано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7; \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = 8; \\ 8x_1 - 2x_2 + 11x_3 = 9. \end{cases}$$

Звести систему до виду зручному для ітерації.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов збіжності:

$$|5| > |2| + |-2| = 4;$$
$$|-6| > |3| + |1| = 4;$$
$$|11| > |8| + |-2| = 10.$$

Отже, ця умова виконується.

Зведемо дану систему до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = 1/5(7 - 2x_2 + 2x_3); \\ x_2 = 1/6(-8 + 3x_1 + x_3); \\ x_3 = 1/11(9 - 8x_1 + 2x_2). \end{cases}$$

Припустимо, що

$$x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z.$$

Тоді систему запишемо так:

$$\begin{cases} x = 1,4 - 0,4y + 0,4z; \\ y = -1,33 + 0,5x + 0,167z; \\ z = 0,818 - 0,727x + 0,182y. \end{cases}$$

<u>Запитання для самоконтролю</u>:

1. Які умови збіжності ітераційного процесу?

2. Як вибрати нульові корені системи?
3. Коли ітераційний процес зупиняється?

Лекція 8. ВЕКТОРИ І ДІЇ НАД НИМИ. БАЗИС

У лекції розглядаються поняття вектора, способи завдання і дії над векторами. Розглядається розвинення вектора по базису векторів в трьох вимірному просторі.

Геометричним вектором називають направлений відрізок $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$, який отримано прикладанням вектора до точки A. Довжина вектора називається модулем вектора і позначається $|\vec{a}|; |\overrightarrow{AB}|$.

Вектор нульової довжини називається *нуль-вектором* і позначається символом $\vec{0}$. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають *рівними* $\left(\vec{a}=\vec{b}\right)$, якщо вони колінеарні (паралельні), однаково направлені і модулі їх рівні.

Одиничним вектором, або ортом $\overrightarrow{a_0}$ вектора $\vec{a}$, називають вектор, довжина якого дорівнює 1, а напрям співпадає з напрямом $\vec{a}$. Якщо вектор можна переносити паралельно самому собі, його називають *вільним*. Якщо вектор можна переміщувати вздовж однієї прямої, його називають *ковзним*. Якщо вектор жорстко зв'язаний з точкою прикладення, то він називається *зв'язаним*.

Додавання векторів здійснюється за правилами трикутника чи паралелограма (рис. 3,4) при n>2 за правилом многокутника (рис. 5).

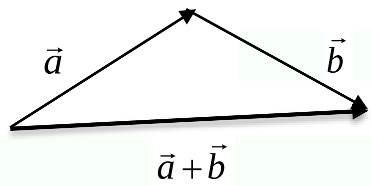

Рис.3

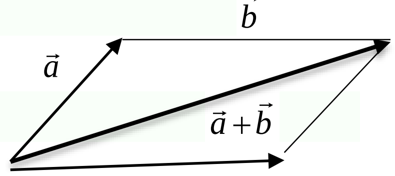

Рис.4

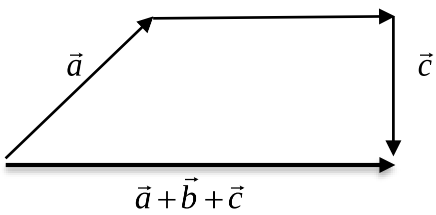

Рис.5

Різницею $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, такий, що $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}.$

Добутком вектора $\vec{a}$ на $\lambda \in R$ називається вектор $\lambda\vec{a}$ такий, що $\left|\lambda\vec{a}\right|=\left|\lambda\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$ і напрям його збігається з напрямом $\vec{a}$, якщо $\lambda>0,$ або протилежний $\vec{a}$, якщо $\lambda<0$.

Приклад 1. Обчислити $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$, якщо $|\vec{a}|=2, \left|\vec{b}\right|=3;\ \widehat{\vec{a}\vec{b}}=60°.$

Розв'язання.

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos 60°+\left|\vec{b}\right|^2=4+2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+9=19.$$

Довільний геометричний вектор має єдине зображення у вигляді $\vec{a}=\alpha_1\vec{l}_1+\alpha_2\vec{l}_2+\alpha_3\vec{l}_3$,де $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$ - три впорядковані некомпланарні вектори в просторі R_3, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - координати вектора в даному базисі, а $\vec{a}=\alpha_1\vec{l}_1+\alpha_2\vec{l}_2+\alpha_3\vec{l}_3$ - розклад вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$.

Базис $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$ називають *прямокутним*, якщо вектори $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$ попарно перпендикулярні і довжина їх дорівнює одиниці. В такому випадку їх позначають $\vec{l}_1=\vec{i}, \vec{l}_2=\vec{j}, \vec{l}_3=\vec{k}.$

Проекцією вектора $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{l}$ називають число

ПР $_{\vec{l}}\,\vec{a}=|a|\cdot\cos\varphi,$ де $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{l}})$ - кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{l}$ $(0\le\varphi\le\pi).$

В прямокутному базисі $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z),$

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$ числа $\cos\alpha=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}})=\frac{x}{|\vec{a}|};$ $\cos\beta=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}})=\frac{y}{|\vec{a}|};$

$\cos\beta=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{k}})=\frac{z}{|\vec{a}|}$ називають напрямними косинусами вектора $\vec{a}.$

Якщо точки $A(x_1,y_1,z_1)$ та $B(x_2,y_2,z_2)$ - довільні точки простору R_3, то координати вектора $\overline{AB}$ записуються так:

$$\overline{AB}=((x_2-x_1);(y_2-y_1);(z_2-z_1)).$$

Приклад 2. Дано вектори: $\vec{x}(-2;4;7);$ $\vec{a}(0;1;2);$ $\vec{b}(1;0;1);$ $\vec{c}(-1;2;4).$

Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{a},\vec{b},\vec{c}.$

Розв'язання. В базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $\quad x = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Тоді $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Звідси $\begin{cases} -2 = 0\cdot\alpha + \beta - \gamma; \\ 4 = \alpha + 0\cdot\beta + 2\gamma; \\ 7 = 2\alpha + \beta + 4\gamma. \end{cases}$

Розв'язавши систему, отримаємо: $\alpha = 10;\ \beta = -1;\ \gamma = -3$. В даному базисі $\vec{x} = 10\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}$.

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке вектор?
2. Основні операції над векторами.
3. Що називається базисом?
4. Як знайти проекцію одного вектора на інший?

Лекція 9. СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

У лекції розглядаються означення скалярного, векторного та мішаного добутку, їх властивості та вираз через координати векторів.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають число, що дорівнює добутку цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha. \tag{9.1}$$

Фізичне тлумачення скалярного добутку двох векторів полягає в тому, що такий добуток означає роботу, виконану переміщенням матеріальної точки під дією одного вектора вздовж другого.

Властивості скалярного добутку.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$.
3. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.
4. $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b},\ \lambda\in R$.
5. $\vec{a}\cdot(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a}\cdot\vec{b}_1 + \vec{a}\cdot\vec{b}_2$.

Якщо вектори $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ задані координатами в прямокутному базисі, то скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Приклад 3. Знайти координати вектора $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}(2;1;-1)$ та задовольняє умову $\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6.$

Розв'язання. Якщо вектори колінеарні, то координати їх пропорційні.

Нехай $\vec{x}(x, y, z)$, тоді

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} = t; \Rightarrow x = 2t; \quad y = t; \quad z = -t.$$

Вектор $\vec{b}(2;-1;1)$; $\vec{x} \cdot \vec{b} = -6 \Rightarrow 4t - t - t = -6;$ $t = 3,$

Звідси

$$\vec{x}(-6;-3;3).$$

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє такі умови:

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$.

2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

3. Вектор $\vec{c}$ напрямлений у той бік, з якого поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ на найменший кут здійснюється проти руху стрілки годинника (рис.6).

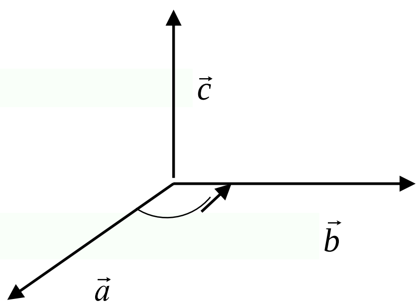

Рис. 6

Геометричний зміст векторного добутку. Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, сторонами якого є дані вектори.

Властивості векторного добутку.

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}.$

2. $\lambda\cdot\vec{a}\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}),\quad \lambda\in R.$

3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c}).$

4. $\vec{a}\times\vec{b} = 0,$ якщо $\vec{a}\parallel\vec{b}.$

Для векторів прямокутної системи координат:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад 4. Обчислити площу трикутника *ABC* (рис.7).

Розв'язання. Нехай задано трикутник *ABC* з вершинами $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.

Розглянемо два вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1);$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

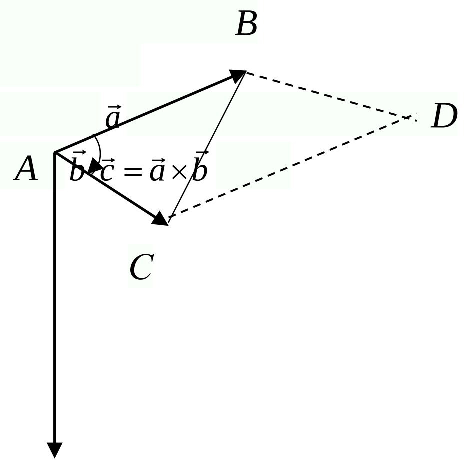

Рис. 7

Тоді $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = S_{ABCD}$ площа паралелограма побудованого на векторах як на основі.

Таким чином, площа трикутника *ABC* дорівнює половині площі паралелограма:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Знайдемо добуток:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}.$$

Отже, $S=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$

Приклад 5. Обчислити площу трикутника *ABC*, якщо *A*(1,0,2), B(1,2,0), C(0,1,2).

Розв'язання. Знайдемо вектори $\overline{AB}=(0,2,-2)$ та $\overline{AC}=(-1,1,0).$ Тоді

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=0\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=$$

$=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k};$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+4}=\frac{1}{2}\sqrt{12}=\frac{2}{2}\sqrt{3}.$$

Отже, $S_{ABC}=\sqrt{3}.$

Окремим є випадок, коли трикутник *ABC* лежить в одній з координатних площин, наприклад *xOy*. Тоді $z_1=z_2=z_3,$ а добуток

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k},\text{ де }\alpha=\beta=0,\text{ а }\gamma=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$$

Площа трикутника $S=\frac{1}{2}\cdot|\gamma|.$

Визначник другого порядку можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ z_1 & z_2 & 1\end{vmatrix}.$$

Тоді площа трикутника з вершинами $A(x_1,y_1),$ $B(x_2,y_2),$ $C(x_3,y_3)$ Виражається формулою

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 6. Знайти площу трикутника *ABC*, якщо *A*(1,2), *C*(3,2).
Розв'язання. Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+6-3-2-0=2.$$

Тоді $S=\frac{1}{2}\cdot 2=1;\quad S_{ABC}=1.$

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається сукупність операцій $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$

Геометричний зміст. Модуль мішаного добутку – це об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Якщо $\vec{a}(x_1,y_1,z_1);\ \vec{b}(x_2,y_2,z_2);\ \vec{c}(x_3,y_3,z_3),$ то

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (9.2)$$

Властивості мішаного добутку.

1. Якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - компланарні, то $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0.$
2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

Об'єм піраміди, побудованої на векторах, можна записати у вигляді

$$V=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (9.3)$$

Приклад 7. Чи належать точки A(2;-3;5), B(0;2;1), C(-2;-2;3) та D(3;2;4) одній площині?

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ (рис.8), якщо вони колінеарні, то $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD} = 0,$ і всі точки належать одній площині.

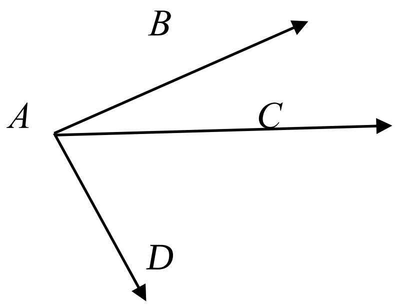

Рис. 8

$\overrightarrow{AB} = (0-2; 2+3; 1-5) = (-2; 5; -4);$

$\overrightarrow{AC} = (-2-2; -2+3; 3-5) = (-4; 1; -2);$

$\overrightarrow{AD} = (3-2; 2+3; 4-5) = (1; 5; -1).$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0.$$

Тобто точки не належать одній площині.

<u>Запитання для самоконтролю</u>:

1. Як знайти довжину вектора?
2. Умова перпендикулярності векторів.
3. Означення векторного добутку.
4. Умова колінеарності векторів.
5. Означення мішаного добутку.
6. Умова компланарності трьох векторів.

Лекція 10. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

У лекції розглядається загальне рівняння прямої, рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом, рівняння прямої, що проходить через фіксовану точку з заданим кутовим коефіцієнтом, рівняння прямої, що проходить через дві задані точки та параметричне рівняння прямої.

Пряма на площині в декартовій прямокутній системі координат XOY може бути задана рівнянням одного з таких видів:

1. $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої.

2. $y = kx + b$ – рівняння з кутовим коефіцієнтом.

3. $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ - рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A,B)$.

4. $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$ - рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{s}(l,m)$.

5. $x = x_0 + lt;\ \ y = y_0 + mt;\ \ t\in(-\infty;+\infty)$ - параметричні рівняння прямої, які у векторній формі мають вигляд $\vec{\rho}=\vec{\rho}_0+\vec{s}t$, де $\vec{\rho}_0(x_0;y_0)$ радіус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{s}(l,m)$ - напрямний вектор прямої.

6. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ - рівняння прямої у відрізках, де a, b – величини напрямних відрізків, що відтинає пряма від координатних осей.

7. $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$.

8. $x\cos\alpha + y\cos\beta - \rho = 0$ - нормальне рівняння прямої, $\cos\alpha$ та $\cos\beta$ – напрямні косинуси вектору $\vec{n}(A,B)$ прямої, а $\rho > 0$ – відстань від початку координат до прямої. Загальне рівняння приводиться до нормального виду шляхом множення на нормуючий множник

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ (знак береться протилежний знаку } C\text{).} \qquad (10.1)$$

Відстань від точки $M_1(x_1,y_1)$ до прямої l обчислюється за формулою

$$d=\left|x_1\cdot\cos\alpha+y_1\cdot\cos\beta-\rho\right|=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \qquad (10.2)$$

Приклад 1. Загальне рівняння прямої $11x-4y-44=0$.

Записати рівняння прямої у вигляді рівнянь:

1) з кутовим коефіцієнтом;

2) у відрізках;

3) у нормальному виді;

4) у параметричному виді.

Розв'язання.

Розв'яжемо рівняння відносно y.

$$y = \frac{11}{4}x - 4;\ \ k = \frac{11}{4};\ \ b = -4.$$

Перенесемо вільний член вправо і поділимо на нього рівняння $\frac{11x}{44} - \frac{4y}{44} = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-11} = 1.$ $|\vec{a}| = 4;$ $|\vec{b}| = 11.$ Пряма проходить через точки A(4;0) та B(0;-11), що зображено на рисунку 9.

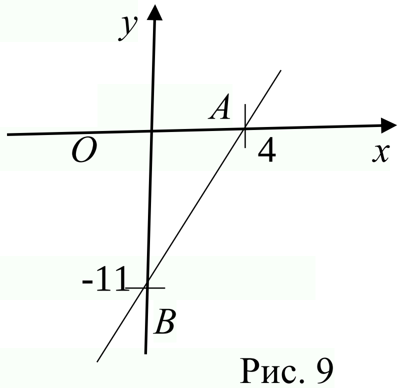

Рис. 9

Далі знайдемо $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{137}}$. Тоді $\frac{11}{\sqrt{137}}x - \frac{4}{\sqrt{137}}y - \frac{44}{\sqrt{137}} = 0,$ де

$\cos\alpha = \frac{11}{\sqrt{137}};$ $\cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{137}};$ $\rho = \frac{44}{\sqrt{137}}$.

Нехай $x = t$, тоді $y = \frac{11}{4}t - 4,$

$$\begin{cases} x = t; \\ y = \frac{11}{4}t - 4 \end{cases}$$ - параметричне рівняння прямої.

<u>Запитання для самоконтролю:</u>

1. Яке рівняння називається нормальним?
2. Як знайти відстань від точки до прямої?
3. Що таке напрямний вектор прямої?

Лекція 11. КРИВІ НА ПЛОЩИНІ

У лекції розглядається задача знаходження рівняння кривої, кожна точка якої знаходиться на однаковій відстані від двох заданих точок.

Кажуть, що крива L в системі координат xOy має рівняння $F(x,y)=0$, якщо виконується умова: точка $M(x,y)$ належить кривій L тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють відношення $F(x,y)=0$.

Приклад 2. Написати рівняння кривої, кожна точка якої знаходиться на однаковій відстані від точок $M_1(3;2)$ та $M_2(2;3)$.

Розв'язання. Нехай L – шукана крива. $M(x,y)\in L$ тоді і тільки тоді, коли

$$\left|\overrightarrow{M_1M}\right|=\left|\overrightarrow{M_2M}\right|.\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1)=(x-3;y-2);\overrightarrow{M_2M}(x-2;y-3),$$

Тоді $\overrightarrow{M_1M}^2=\overrightarrow{M_2M}^2\Rightarrow(x-3)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+4=x^2-4x+4+y^2-6y+9;$$

$2x=2y$ або $x=y$.

Як бачимо, шукана крива є прямою лінією.

<u>Запитання для самоконтролю</u>:

1. Відстань між двома точками.
2. Що означає що точка $M(x,y)$ належить кривій L?

Лекція 12. АЛГЕБРАЇЧНІ КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У лекції розглядається загальне рівняння кривих другого порядку, а також виводяться рівняння еліпса, параболи, гіперболи.

Алгебраїчною кривою другого порядку називають криву L, рівняння якої в декартовій системі координат має вигляд:

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, де не всі A, B, C одночасно дорівнюють нулю.

У загальному випадку може статися, що рівняння визначає вироджену криву (порожню множину, точку, пряму, пару прямих). Якщо крива невироджена, то для неї знайдеться така система координат, що рівняння матиме один із видів:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0 \text{ – } \textit{еліпс};\tag{12.1}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0;\ b>0 \text{ – } \textit{гіпербола};\tag{12.2}$$

$$y^2=2px,\ p>0 \text{ – } \textit{парабола}.\tag{12.3}$$

Еліпс з канонічним рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ $a > b > 0$ має форму, зображену на рис. 10. Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ - *вершини* еліпса, осі симетрії *Ox* та *Oy* – *головні* осі еліпса, $O(0;0)$ – *центр* еліпса.

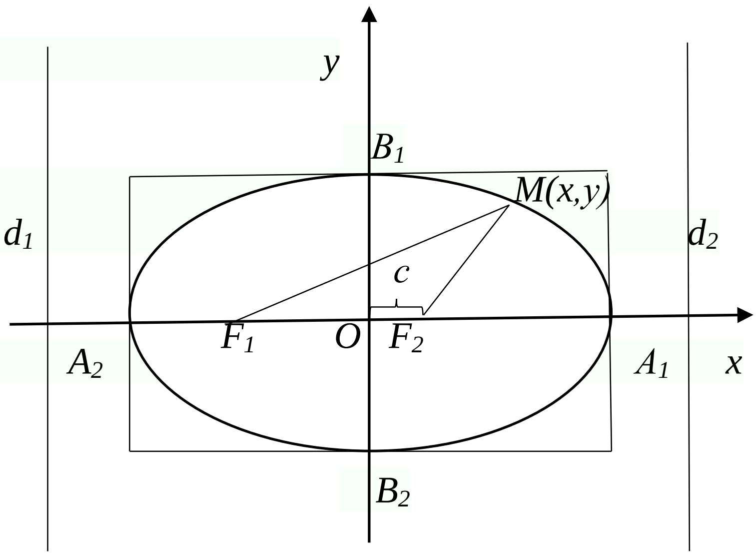

Рис. 10

Точки $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, де $c=\sqrt{a^2-b^2}$ називають *фокусами* еліпса, а числа $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ та $r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ - *фокальними радіусами* точки *M*, якщо $r_1=r_2$, фокуси співпадають з центром, $x^2+y^2=a^2$ - рівняння кола радіуса a з центром в точці $O(0;0)$.

Число $e=\frac{c}{a}$ $(0\le e<1)$ називається ексцентриситетом еліпса.

Прямі d_1 та d_2: $x=-\frac{a}{e}$; $x=\frac{a}{e}$ називаються *директрисами* еліпса.

Гіпербола з канонічним рівнянням $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$ $a > 0;$ $b > 0$ має форму, зображену на рис.11.

Параметри a та b називають *піввісями* гіперболи, точки $A_1(a;0)$ та $A_2(a;0)$ - її *вершинами*, осі симетрії *Ox* та *Oy* – *дійсними* та *уявними* вісями, а центр симетрії *O* – *центром* гіперболи. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ - *асимптоти* гіперболи, де $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ називають фокусами гіперболи, $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ та $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ - *фокальними радіусами* точки M, що належить гіперболі.

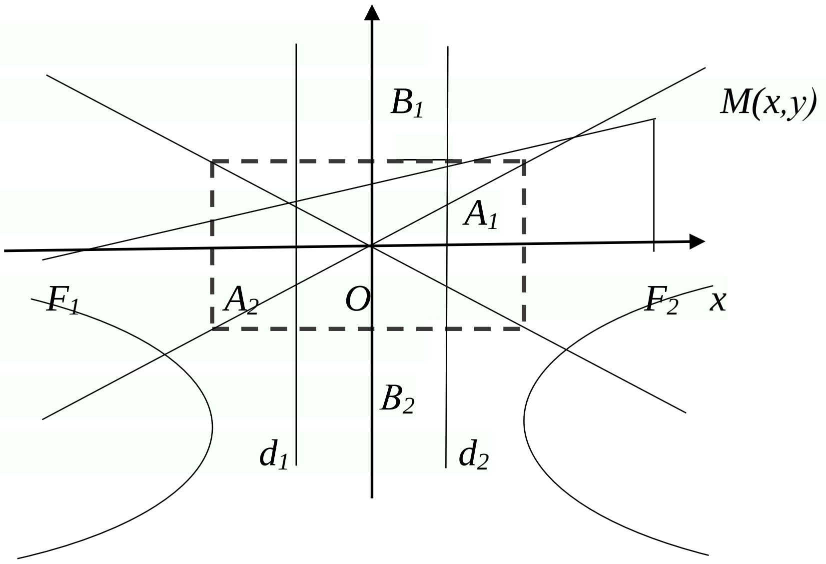

Рис. 11

Число $e = \dfrac{c}{a}$ $(1 < e < +\infty)$ - ексцентриситет гіперболи. Якщо $a=b$, гіперболу називають *рівносторонньою*.

Прямі d_1 та d_2 : $x = -\dfrac{a}{e}$; $x = \dfrac{a}{e}$ називаються *директрисами* гіперболи.

Парабола з канонічним рівнянням $y^2 = 2px;\ p > 0$ зображена на рис.12.

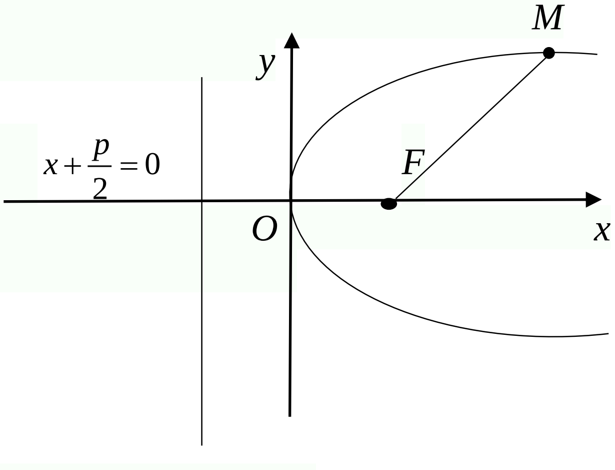

Рис. 12

Пряма $x=-\frac{p}{2}$ називається директрисою параболи. p – параметр параболи, $O(0,0)$ – її *вершина,) Ox* – вісь параболи. Точка $F=\left(\frac{p}{2};0\right)$ - *фокус* параболи, а $r=|\overrightarrow{FM}|$ - *фокальний радіус* точки M параболи.

Приклад 3. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо $e=\frac{1}{2}$, а відстань між директрисами становить 32.

Розв'язання. Рівняння директрис $x=-\frac{a}{e}$ та $x=\frac{a}{e}$, тоді $32=\frac{2a}{e}$; $2a=32e$; $a=8$; $e=\frac{c}{a}$, тобто с=4,

$b=\sqrt{a^2-c^2}=4\sqrt{3}$. Рівняння еліпса $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

Приклад 4. Написати канонічне рівняння гіперболи у якої с=10, а рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Розв'язання. З рівняння випливає, що $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$, тобто $b=\frac{4}{3}a$.

$c=\sqrt{a^2+b^2}$; $10=\frac{5}{3}a$; $a=6$, $b=8$. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ - рівняння гіперболи.

Приклад 5. Знайти фокальний радіус точки M параболи $y^2=12x$, якщо $y(M)=6$.

Розв'язання. Фокус параболи $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, P = 6, тобто $F(3;0)$. Координати точки M $(x;6)$, що лежить на параболі. З рівняння параболи знайдемо x.

$$36=12x,\ x=3,\ M(3;6).$$

Тоді $r=\sqrt{(3-3)^2+(6-0)^2}=6$.

Запитання для самоконтролю:

1. Канонічне рівняння еліпса.
2. Канонічне рівняння гіперболи.
3. Спряжена гіпербола.
4. Рівняння параболи.

Лекція 13. ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

У лекції розглядаються загальне та нормальне рівняння площини, рівняння площини, що проходить через фіксовану точку, перпендикулярно до нормального вектору, а також рівняння площини у відрізках.

Площина в декартовій прямокутній системі координат може бути задана одним із таких рівнянь:

1. $Ax+By+Cz+D=0$ - загальне рівняння площини.

2. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно до нормального вектору $\vec{n}(A, B, C)$.

3. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1$ - рівняння площини у відрізках, що відтинає площина по осях Ox, Oy, Oz, відповідно.

4. $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0$ – нормальне рівняння площини, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормального вектору $\vec{p}$, направленого з початку координат в сторону площини, p – відстань від початку координат до площини.

Відстань від точки до площини обчислюється за формулою

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \tag{13.1}$$

Приклад 6. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Розв'язання. Нехай три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ належать площині α і не лежать на одній прямій (рис.13).

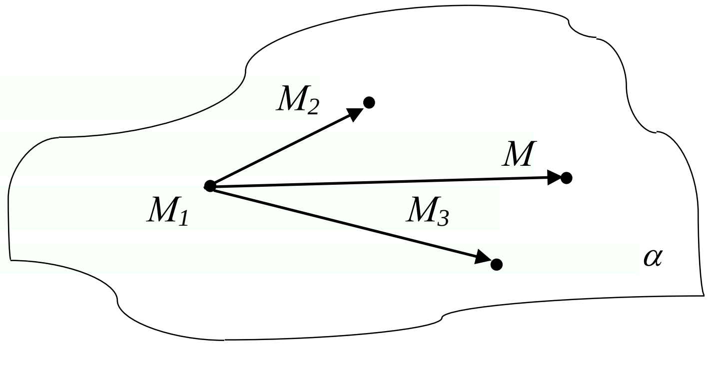

Рис. 13

Візьмемо довільну точку цієї площини $M(x,y,z)$. Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$, що належать площині α. Тоді їхній мішаний добуток дорівнює нулю:

$$(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2})\overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

- векторне рівняння площини, що проходить через три точки.

Розкриваючи добуток, одержуємо

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{13.2}$$

Приклад 7. Знайти кут між двома площинами.

Розв'язання. Нехай дві площини задані своїми рівняннями:

$$\alpha_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\alpha_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Нормальні вектори площин $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

Кут φ між площинами – це кут між нормальними векторами цих площин.

Тоді $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$

Якщо $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, тобто $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \lambda.$

Якщо $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, тобто $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

Приклад 8. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(0;1;0)$ паралельно до векторів $\vec{a}\,(0;1;2)$; $\vec{b}\,(1;1;0)$.

Розв'язання. Нехай точка $M\ (x,y,z)$ належить шуканій площині α в тому випадку, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ та $\vec{b}$ компланарні, тобто $\left(\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}\right)\vec{b} = 0,$

або

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2x - 2y + z + 2 = 0;$$

$2x - 2y + z + 2 = 0$ - рівняння шуканої площини.

Запитання для самоконтролю:
1. Що таке напрямні косинуси?
2. Формула для знаходження відстані від точки до площини.
3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.
4. Кут між двома площинами.

Лекція 14. ПРЯМА В ПРОСТОРІ

У лекції розглядаються канонічне та параметричні рівняння площини, а також пряма, задана як лінія перетину двох площин.

Пряма в просторі може бути задана так:
1. Загальним рівнянням:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \qquad (14.1)$$

як лінія перетину двох площин, A_1, B_1, C_1 - не пропорційні A_2, B_2, C_2;
2. Канонічним рівнянням:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \qquad (14.2)$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)\in L;\ \vec{S}(l, m, n)$ - напрямний вектор прямої;
3. Параметричним рівнянням:

$$:\begin{cases} x=x_0+lt; \\ y=y_0+mt; t\in R \\ z=z_0+nt, \end{cases} \qquad (14.3)$$

4. $\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{S}t$ *у векторній формі*

Приклад 9. Пряма L задана загальним рівнянням:

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0; \\ x+3y-2z-3=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належать цій прямій.

Нехай $x_0 = 0$, тоді $\begin{cases} -y+2z=7; \\ 3y-2z=3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5; \\ z=6; \end{cases} \quad M_0(0;5;6).$

Аналогічно можна вважати, що y_0 або z_0 дорівнюють нулю.

За напрямний вектор прямої $\vec{S}(l, m, n)$ візьмемо вектор $\vec{S}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, де $\vec{n}_1=(3;-1;2)$, $\vec{n}_2=(1;3;-2)$;

$$\vec{S}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-4\vec{i}+8\vec{j}+10\vec{k}.$$

Канонічне рівняння прямої таке: $L:\dfrac{x}{-4}=\dfrac{y-5}{8}=\dfrac{z-6}{10}.$

Приклад 10. Скласти рівняння площини, що проходить через прямі

$$L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4};\ L_2:\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

Розв'язання. Впевнимося, що прямі належать одній площині. Розглянемо вектори $\vec{S}_1(2;-3;4);\vec{S}_2(3;2;-2);$ $M_1\in L_1,$ $M_2\in L_2.$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(7-1;2+2;-3-5)=(6;4;-8).$

Доведемо, що вектори компланарні, тобто $(\vec{S}_1\times\vec{S}_2)\overrightarrow{M_1M_2}=0.$

$$\begin{vmatrix}6 & 4 & -8\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=36\neq 0.$$

Прямі не належать одній площині, тобто являються мимобіжними.

Приклад 11. Написати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(1;-2;1)$ та $M_2(3;1;-1).$

Розв'язання. Нехай шукана пряма $M(x,y,z)\in L.$ Тоді $\overrightarrow{M_1M}$ та $\overrightarrow{M_1M_2}\in L,$ тобто $\overrightarrow{M_1M}\parallel\overrightarrow{M_1M_2}.$ $\overrightarrow{M_1M}(x-1;y+2;z-1).$ $\overrightarrow{M_1M_2}(2;3;-2).$

Канонічне рівняння прямої $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}=t,$ або в параметричному виді $\begin{cases}x=2t+1;\\ y=3t-2;\\ z=-2t+1;\end{cases}$ $t\in(-\infty;+\infty).$

Приклад 12. Знайти точку перетину прямої L з площиною α та кут між ними, якщо $\alpha: x+y-z+1=0$, $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}.$

Розв'язання. Кут між прямою та площиною φ = 90° - α, де α кут між нормальним вектором площини $\vec{n}(A,B,C)$ та напрямним вектором прямої $\vec{S}(l,m,n).$ $\vec{n}(1;1;-1);\vec{S}(0;2;1)$

$\sin\alpha=\dfrac{2-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{15}};$ $\alpha=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{15}}.$

Щоб знайти точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перетину α та L, треба розв'язати систему рівнянь, записавши рівняння L в параметричному виді:

$$\begin{cases} x = 1 + 0t; \\ y = 0 + 2t; \\ z = -1 + t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 2t; \\ z = t - 1; \end{cases} \Rightarrow 1 + 2t - t + 1 + 1 = 0.$$

$$t = -3;\ \ x_0 = 1;\ \ y_0 = -6;\ \ z_0 = -4;\ \ M_0(1; -6; -4).$$

<u>Запитання для самоконтролю</u>:

1. Як знайти точку перетину прямої та площини?
2. Як знайти кут між прямою та площиною?
3. Як знайти точку симетричну даній відносно площини?

Лекція 15. ЗМІННІ ВЕЛИЧИНИ. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ

У лекції розглядаються означення функції, способи і завдання та елементи дослідження функції.

В різних областях знань, при вивченні тих чи інших явищ ми зустрічаємося з постійними величинами, що не змінюють свого числового значення (число місяців у році), і зі змінними, які можуть набувати тих чи інших значень (ціна товару, величина закупок, попит, прибуток від реалізації товару, національний прибуток).

Деякі постійні не змінюють свого значення в довільній задачі. Їх називають абсолютними постійними (сума кутів трикутника дорівнює 180°).

Параметрами називають ті постійні, які зберігають своє числове значення в умовах деякої задачі. Наприклад, курс долара на деякий період часу.

Одна й та сама величина в кожному конкретному випадку може бути як змінною, так і постійною. Національний прибуток, наприклад, для кількох років є змінною величиною, для даного року – постійною.

Інколи постійну розглядають, як окремий випадок змінної величини, що набуває одного того самого значення.

Множина всіх значень змінної утворює деяку числову множину значень змінної.

Розглянемо функцію однієї змінної.

Нехай задано дві непорожніх підмножини D та E множини R, причому $x \in D$, $y \in E$. Якщо кожному елементу $x \in D$ ставиться у відповідність лише один елемент множини $y \in E$, то y називають функцією f (відображенням) аргументу x, і записують:

$y = f(x)$; $\forall\ x \in D$, або $y = f(x)$; $x \in D$.

Іншими словами, за допомогою функції $y = f(x)$ підмножина D відображається на підмножину E, або $x \to f(x)$, $x \in D$.

$D(f)$ називають областю визначення функції, $E(f)$ – множиною її значень, x – незалежною змінною або аргументом, y – залежною змінною або функцією.

Способи задання функції.

1. *Аналітичний*. В загальному випадку $y = f(x)$.

Наприклад, прибуток від продажу товару x по ціні a можна задати аналітично або формулою $y = ax$.

2. *Графічний.* Можна задати функцію однієї змінної її графіком (рис.14).

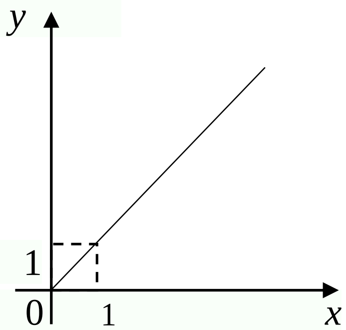

Рис. 14. Графічний спосіб задання функції

Проте не всяку функцію можна задати графічно. Так, графічно не можна задати функцію Діріхле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ раціональне;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне.} \end{cases}$$

3. *Табличний*.

Наприклад: x_i - затрати часу деякого робітника на одиницю продукції; y_i - оплата праці даного робітника; тоді функція задається як:

x	x_1	x_2	…
y	y_1	y_2	…

4. *Алгоритмічний.* Так задають функцію для роботи на ЕОМ.

Визначення 1. Основними *елементарними функціями* називають:

степеневу x^a, $a \in K$, показникову a^x $(a > 0;\ a \neq 1)$, логарифмічну $\log_a x$, $(a > 0;\ a \neq 1;\ x > 0)$, тригонометричні sin*x*, cos*x*, tg*x*, ctg*x*, обернені тригонометричні: arcsin*x*, arccos*x*, arctg*x*, arcctg*x*.

Визначення 2. Основні елементарні функції, або ті, які утворено з них за допомогою скінченного числа арифметичних дій, називають елементарними функціями.

Наприклад: $f(x) = F_n(x) = a_n x^n + a_1 x^1 + ... + a_0$ - алгебраїчна функція (її називають поліномом).

$\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - елементарна функція (алгебраїчний дріб).

$f(x) = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots$ - *неелементарна* функція.

Елементи поведінки функцій

1. Функцію називають *парною*, якщо $f(-x) = f(x)$, і *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі OY, непарної – відносно початку координат.

2. Функцію називають *зростаючою* (спадною) на інтервалі, якщо з $x_1 > x_2$, випливає, що $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$. Застосовують позначення - ↑ (↓).

3. Функцію називають *обмеженою* на множині *A*, якщо $\exists M > 0\ \ \forall x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| < M$; обмеженою зверху (знизу), якщо $\exists M$ $(\exists m)$ так, $|f(x)| < M$ $|f(x)| > m$.

4. Функція називається *періодичною* з періодом *T*, якщо $f(x+T) = f(x)$.

Приклад 1. Дослідити функцію на періодичність, парність та непарність. Знайти область визначення функції

$$y = \frac{3}{4 - x^2} + \lg(x^3 - x).$$

Розв'язання. Для того щоб *x* належало області визначення, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі співвідношення:

$4 - x^2 \neq 0$, знаменник дробу не повинен дорівнювати 0;

$x^3 - x > 0$, логарифм існує лише для додатних чисел.

Розв'язуючи рівняння і нерівність, знаходимо:

$$x \neq 2;\ \ x \neq -2,\ \ x(x-1)(x+1) > 0.$$

Одержимо $D[f] = (-1;\ 0) \cup (1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Дана функція являє собою суму парної функції $y_1 = \dfrac{3}{4-x^2}$ (y_1 не змінює знака при зміні x на $-x$) і функції загального вигляду $y_2 = \lg(x^3 - x)$ (при зміні x на $-x$ вираз під знаком логарифма змінює знак на протилежний і логарифм втрачає зміст). Отже, функція $y = y_1 + y_2$ є функцією загального вигляду.

Функція неперіодична, бо в неї не входять тригонометричні функції, а з елементарних функцій є лише вони періодичними.

Приклад 2. Дано $\lg(\sin x)$. Знайти область визначення функції та дослідити на періодичність.

Розв'язання. Область визначення знаходимо із співвідношення $\sin x > 0$. Звідси $D[f]$ є об'єднанням всіх проміжків вигляду $]2\pi k, \pi + 2\pi k[$, де k – ціле число. Ця функція загального вигляду, бо при зміні x на $-x$ логарифм втрачає зміст. Функція періодична, бо $\sin x$ є періодичною з періодом 2π.
$\lg(\sin(x + 2\pi k)) = \lg(\sin x)$, при умові, що $x \in D[y]$.

Приклад 3. $y = \sqrt{\mathrm{arctg}(\lg x)}$ Знайти область визначення та дослідити на парність, непарність, періодичність.

Розв'язання. Область визначення знаходимо із системи

$$\begin{cases} x > 0; \\ \mathrm{arctg}(\lg x) \geq 0, \end{cases}$$

але $\mathrm{arctg}(\lg x)$ невід'ємний при невід'ємних $\lg x$, тому $D[y] = [1; +\infty]$.
Функція неперіодична, загального вигляду.

Запитання для самоконтролю:

1. Способи задання функції.
2. Парна та непарна функція.
3. Область визначення функції.

Лекція 16. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

У лекції розглядаються основні поняття зв'язані з границями послідовності і функції; наводяться властивості границь.

Визначення 3. Стала a називається *границею послідовності* $\{a_n\}$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $N(\varepsilon)$, що для будь-якого $n \geq N$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Якщо a границя послідовності $\{a_n\}$, то це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

Визначення 4. Стала A називається границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо для довільного додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon)$, що як тільки $0 < |x-a| < \delta$, то виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Це записується так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A.$

Визначення 5. Число A називається границею $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке число $M(\varepsilon)$ що для всіх $x > M(\varepsilon)$ виконується рівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Визначення 6. Функція називається *нескінченно малою* при $x \to x_0$, або $x \to \infty,\ x \to -\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0.$

Визначення 7. Функція $y = f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, якщо для будь-якого M>0, що може бути як завгодно велике, в околі точки $x_0 \, |f(x_0)| > M$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty.$

Теорема про зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими функціями: Якщо $f(x)$ нескінченно мала при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ нескінченно велика при $x \to x_0$, і навпаки.

Властивості границь.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (C_1 f(x) + C_2 g(x)) = C_1 \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + C_2 \lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ C_1,\ C_2$ - сталі.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x).$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^n = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n,\ n \in N.$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$

Розглянемо границю відношення $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Очевидно, що A=2, якщо $f(x) = 2x$, а $g(x) = x$. Якщо $f(x) = x^3$, а $g(x) = x^2$, то A=0. Якщо $f(x) = x^2$, а $g(x) = x^3$, то $A = \infty$. Підставляючи замість x нуль у відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, ми отримаємо $\dfrac{0}{0}$. Таку ситуацію називають невизначеною, або невизначеністю, оскільки після певних перетворень можна мати в результаті як конкретне число, так і нескінченність. Є ще й інші види невизначеностей $\frac{\infty}{\infty};\ \infty-\infty;\ 1^{\infty};\ 0\cdot\infty;\ 0^0,$ та ін.

<u>**Запитання для самоконтролю**:</u>

1. Нескінченно мала функція.
2. Нескінченно велика функція.
3. Властивості границь.

Лекція 17. РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

У лекції розглядаються основні типи невизначеностей, перша і друга стандартні границі.

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^6+3n^4+n^3}{n^6+n-2}$.

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, є невизначеністю виду $\frac{\infty}{\infty}$, для розкриття цієї невизначеності поділимо чисельник і знаменник на старший степінь *n*, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+3n^4+n^3}{n^6+n-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^5}-\frac{2}{n^6}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^6}}=\frac{1}{1}=1,$$ бо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^{\alpha}}=0;\ \alpha>0.$$

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, являє собою невизначеність виду $(\infty-\infty)$. Для розкриття її помножимо і поділимо різницю радикалів на їх суму:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+1}}\times\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n^2+1-n^2+1\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=1.$$

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16-4}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-14}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-14\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(x^2\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{8}{2}=4.$$

Перша стандартна границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1,\ \text{або}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1. \qquad (17.1)$$

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=\dfrac{2}{3}.$

Друга стандартна границя:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e; \qquad (17.2)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e; \qquad (17.3)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \qquad (17.4)$$

В усіх випадках маємо невизначеність виду 1^∞, $e\approx 2,71828...$

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^n$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^n=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2n-1}{2n+3}-1\right)^n=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{(-4)}{2n+3}\right]^{\frac{2n+3}{-4}}\right\}^{\frac{-4n}{2n+3}}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+3}}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{2+3/n}}=e^{-2}.$$

Приклад 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \left[1^\infty\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right)^x = \frac{1}{e}.$

Приклад 10.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+x+2}{x^2-1}\right)^x = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+x+2}{x^2-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{x^2-1}\right)^x =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x+2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x+2}}\right\}^{\frac{(x+2)x}{x^2-1}} = e.$$

__**Запитання для самоконтролю**__:

1. Перша стандартна границя.
2. Друга стандартна границя.
3. Типи невизначеностей.

Лекція 18. ПОРІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ФУНКЦІЙ

У лекції наводяться основні співвідношення між нескінченно малими функціями та приклади їх застосування при розв'язанні задач.

Визначення 8. Функції $f(x)$ та $g(x)$ мають один і той самий порядок малості при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A\neq 0 \qquad (18.1)$$

Визначення 9. Функції $f(x)$ та $g(x)$ еквівалентні при $x\to x_0$ (позначається $f{\sim}g$), якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1. \qquad (18.2)$$

Визначення 10. Функція $f(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку ніж $g(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0. \qquad (18.3)$$

Одне із застосувань еквівалентності нескінченно малих випливає з теореми.

Теорема. Границя відношення нескінченно малих функцій дорівнює границі відношення еквівалентних їм нескінченно малих, тобто, якщо $f \sim f_1$, а $g \sim g_1$ то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \qquad (18.4)$$

Приклад 11. Визначити порядок малості $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$ відносно $g(x)=x$ при $x\to 0$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

тобто $f(x)$ та $g(x)$ мають один порядок малості.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функції.

При $\alpha(x)\to 0$:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$.
2. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$.
3. $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$.
4. $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$.
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$.
6. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$.
7. $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ln\alpha(x)$.
8. $(1+\alpha(x))^{\beta}-1 \sim \beta\alpha(x)$.
9. $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

Приклад 12. Обчислити $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(1+\sin^2 t\right)^3-1}{t}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin t^2 \sim t^2$, $(1+\sin t^2)^3-1 \sim 3\sin t^2$, то

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+\sin t^2\right)^3-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\left(1+\sin t^2\right)^3-1\right)}{\sin t^2}\cdot\frac{\sin t^2}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3\sin t^2\cdot t^2}{\sin t^2\cdot t}=\lim_{t\to 0}3t=0.$$

Приклад 13. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+7x)}$

Розв'язання. Оскільки $\ln(1+7x)\sim 7x$, $\sin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sim\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+7x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{7\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{7}.$$

Запитання для самоконтролю:

1. Порядок нескінченно малих функцій.
2. Таблиця еквівалентності.

Лекція 19. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ. КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК РОЗРИВУ

У лекції розглядається класифікація точок розриву функцій та наводяться приклади дослідження функцій на неперервність.

Різниця $\Delta x = x_2 - x_1$ називається приростом незалежної змінної *x*; $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$ - приростом функції $f(x)$ в точці *x*, що відповідає приросту *x*.

Визначення 11. Функція $f(x)$ називається *неперервною* в точці x_0:

• якщо вона визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

• якщо нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$;

Припустимо, що

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0).$$

Введемо позначення:

$$x_0 + \Delta x = x;\ \ \Delta x = x - x_0;\ \Rightarrow \Delta x \to 0;\ \ x \to x_0;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x\to x_0} x).$$

Маємо ще одне означення неперервної функції в точці.

Визначення 12. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в точці x_0 і деякому її околі, має границю при $x \to x_0$ і вона співпадає із значенням функції у цій точці:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0). \qquad (19.1)$$

Функція, неперервна в кожній точці проміжку, називається неперервною на цьому проміжку.

Якщо в точці x_0 порушується хоча б одна умова неперервності функції, функція називається розривною в точці x_0, а сама точка x_0 називається *точкою розриву*.

При цьому розрізняють такі випадки:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує, але функція не визначена в точці x_0, або порушена умова $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; x_0 називають усувною точкою розриву 1-го роду;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не існує. Якщо при цьому існують обидві односторонні границі, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не рівні між собою, то x_0 називають точкою розриву 1-го роду, а $\delta(f,x) = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$ - стрибком функції у точці x_0;

3) в інших випадках x_0 називають точкою розриву 2-го роду.

Приклад 14. Задана функція $y = 2^{1/(x-3)}$. Дослідити її на неперервність в точці $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ та побудувати схематичний графік функції.

Розв'язання. Дана функція не є елементарною. В точці $x = 4$ вона визначена. Тому в точці $x = 4$ вона неперервна. В точці $x = 3$ функція має розрив, вона не існує в цій точці. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва і справа в точці $x = 3$.

$$f(3-0) = \lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 0.$$

$$f(3+0) = \lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = +\infty.$$

Таким чином, точка $x = 3$ є точкою розриву другого роду.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x-3}} = 1.$$

Побудуємо схематичний графік (рис. 15).

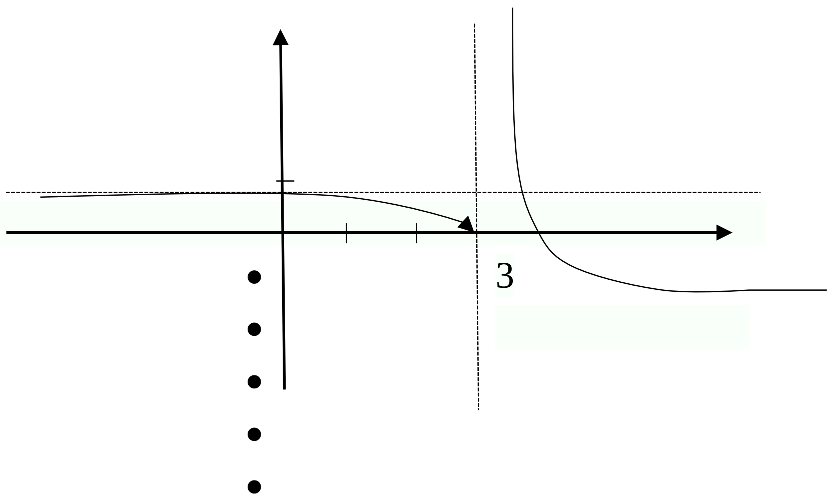

Рис. 15

Приклад 15. Знайти точки розриву функції

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x<\dfrac{3}{2}\pi; \\ 2, & x\ge \dfrac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій осі і неперервна на проміжках $]-\infty,0[;\ \left]0;\frac{3}{2}\pi\right[;\ \left]\frac{3}{2}\pi;+\infty\right[$, тому що на кожному з них задана елементарна функція. Досліджуватимемо її на неперервність в точках $x=0;\ \ x=\frac{3}{2}\pi.$

1. В точці $x=0$ матимемо:

$$f(0)=0;\quad f(0-0)=\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} x^3=0;$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\sin x=0.$$

Отже, в точці $x=0$ функція $y=f(x)$ неперервна.

2. В точці $x=\frac{3}{2}\pi$ матимемо:

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=2;\qquad f\left(\frac{3}{2}\pi-0\right)=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi-0}\sin x=-1;$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi+0\right)=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi+0} 2=2.$$

Очевидно, границі не рівні між собою, але не дорівнюють $\pm\infty$. Тому в точці $x=\frac{3}{2}\pi$ $\delta(f,x)=3$ функція має розрив 1-го роду.

Побудуємо схематичний графік функції (рис. 16).

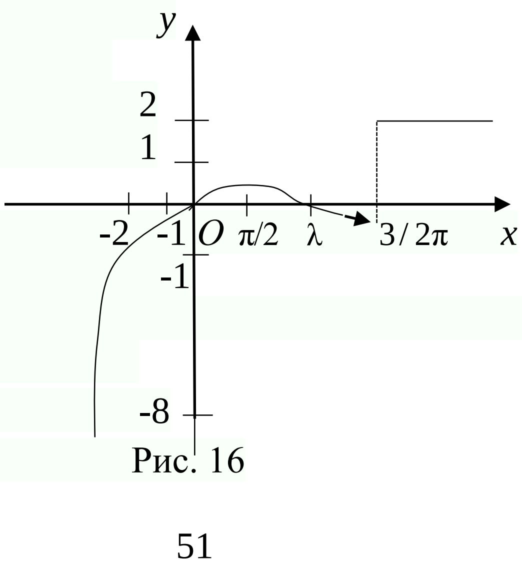

Рис. 16

Приклад 16. Дослідити характер точок розриву функції

$$f(x) = 1 - x\sin\frac{1}{x}.$$

Якщо вони усувні, то довизначити функцію до "неперервності".

Розв'язання.

$x = 0$ точка розриву функції.

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{\alpha\to0}\left(1 - \alpha\sin\frac{1}{\alpha}\right) = 1;\quad \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{\alpha\to0}\left(1 - \alpha\sin\frac{1}{\alpha}\right) = 1.$$

$x_0 = 0$ - усувна точка розриву. Довизначена функція $f(0) = 1$.

<u>Запитання для самоконтролю</u>:

1. Яка функція неперервна?
2. Точка розриву.
3. Класифікація точок розриву.

Лекція 20. ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ ТА ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

У лекції розглядаються поняття похідної функції, основні правила диференціювання функції, диференціювання функції заданої неявно та параметрично.

Визначення 1. Похідною функції $y = f(x)$ в даній точці називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля будь-яким чином, тобто

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}; \qquad (20.1)$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ - \textit{лівостороння похідна}}; \qquad (20.2)$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ - \textit{правостороння похідна}}. \qquad (20.3)$$

Для існування похідної $f'(x_0)$ функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Похідна функції $f(x)$ розглядається на множині тих точок, де вона існує, сама будучи функцією. Процес знаходження похідної називається також *диференціюванням*.

Таблиця похідних основних елементарних функцій:

1. $\left(u^\alpha\right)' = \alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u';\ \ \alpha \neq 0.$

2. $\left(a^u\right)' = \alpha^u \operatorname{In} a \cdot u'$; $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \operatorname{In} a} u'$; $(\operatorname{In} u)' = \dfrac{u'}{u}$.

4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

6. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

8. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

9. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

Правила диференціювання функцій

Нехай C – константа, а $f(x)$ та $g(x)$ - диференційовні функції, тоді:

1) $(C)' = 0$;

2) $(Cf)' = Cf'$;

3) $(f+g)' = f' + g'$;

4) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$;

5) $\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}, \quad g \neq 0.$

Приклад 1. Знайти похідну функції

$$y = \frac{1}{3} tg^3 x + \operatorname{In} \sin x.$$

Розв'язання. Використовуючи формули диференціювання, отримаємо

$$y' = \frac{3}{3} tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = tg^2 x \cdot \sec^2 x + \operatorname{ctg} x.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = e^{x^2+\operatorname{arctg} x}$.

Розв'язання.

$$y' = e^{x^2+\operatorname{arctg}x}(x^2+\operatorname{arctg}x)' = \left(2x + \frac{1}{1+x^2}\right)\cdot e^{x^2+\operatorname{arctg}x} = \frac{2x+x^3+1}{1+x^2}\cdot e^{x^2+\operatorname{arctg}x}.$$

Логарифмічне диференціювання.

Логарифмічною похідною функції $y = f(x)$ називають похідну від логарифма цієї функції, тобто

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Розв'язання. $\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x,$ тоді

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x}{\sin x}.$$

Звідки $y' = (\ln y)' \cdot y = (\sin x)^{\cos x} \cdot \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x}{\sin x} =$

$= (\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x).$

Диференціювання функцій, заданих неявно або параметрично

Вважають, що функція $y = f(x);\ x \in (a;b)$ задана неявно рівнянням $F(x; f(x)) = 0.$

Для обчислення похідної функції $y = f(x)$ треба тотожність $F(x; f(x)) = 0$ продиференціювати по x (розглядаючи ліву частину як складну функцію), а потім розв'язати отриману рівність відносно $f'(x)$.

Приклад 4. Знайти y'_x функції $x^4 + y^4 = x^2 y^2.$

Розв'язання. Диференціюємо $x^4 + y^4 = x^2 y^2$ по x, отримаємо

$4x^3 + 4y^3 \cdot y' = 2x \cdot y^2 + 2y \cdot y' \cdot x^2$ Звідси

$$y'(2y^3 - y \cdot x^2) = x \cdot y^2 - 2x^3,$$

тобто

$$y' = \frac{x \cdot y^2 - 2x^3}{2y^3 - yx^2}.$$

Нехай задані функції $x = x(t)$ та $y = y(t),\ t \in (\alpha;\beta)$. Тоді $y'_x = y'_t \cdot t'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, за умови, що функція $x = x(t)$ на $t \in (\alpha;\beta)$ має обернену функцію.

Приклад 5. Знайти y'_x, якщо $x=\ln(1+t^2);\ \ y=t-\operatorname{arctg}t;\ t\in(0;+\infty)$.

Розв'язання. $y_t=1-\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{t^2}{1+t^2};\ x_t=\dfrac{1}{1+t^2}\cdot 2t,$ тоді $y'_x=\dfrac{t^2}{2t}=\dfrac{t}{2}.$

Геометричні застосування похідної.

Рівняння дотичної та перпендикуляра нормалі до дотичної в точці дотику $(x_0; f(x_0))$, мають вигляд, відповідно,

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\ \text{ та }\ y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Піддотична AM_1 та піднормаль M_1B (рис.18)

$$S_N=M_1B=|y\cdot\operatorname{tg}\alpha|=|f(x)\cdot f'(x)|,\ \ S_T=\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|.$$

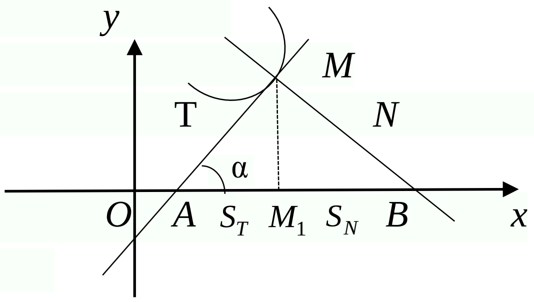

Рис. 18

Під кутом γ між двома лініями $y=f(x)$ та $y=g(x)$ розуміють кут між дотичними до них в точці їх перетину $tg\gamma=\dfrac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)}$, де x_0 - абсциса точки перетину кривих.

Приклад 6. Написати рівняння дотичної та нормалі, знайти піддотичну та піднормаль функції $y=e^{1-x^2}$ в точці $x_0=-1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної та нормалі мають вигляд

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),\ \ y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\ \ x_0=-1.$$

$y_0=e^{1-1}=e^0=1;\ \ y'=-2x\cdot e^{1-x^2};\ \ y'_0=2.$

$y-1=2(x+1)\Rightarrow y=2x+3$ - рівняння дотичної.

$y-1=-\dfrac{1}{2}(x+1)\Rightarrow 2y-2=-x-1;\ \ 2y+x-1=0$ - рівняння нормалі.

$$S_T = |f(x_0)/f'(x_0)| = |1:2| = \frac{1}{2};\ S_N = |f(x_0)\cdot f'(x_0)| = |1\cdot 2| = 2.$$

<u>Запитання для самоконтролю</u>:

1. Таблиця похідних.
2. Правила диференціювання функцій.

Лекція 21. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

У лекції наведені теореми Ролля, Лагранжа, Коші та правило Лопіталя для розкриття невизначеностей.

Теореми про середнє.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована при $x\in(a;b)$ та $f(a)=f(b)$, то існує хоча б одна точка $c\in(a,b)$ така, що $f'(c)=0.$

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована при $x\in(a;b)$, то існує хоча б одна точка $c\in(a,b)$ така, що $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ - формула Лагранжа. (21.1)

Теорема Коші. Якщо функція $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовані при $x\in(a;b)$ та $g(x)\neq 0$ для всіх $x\in(a,b)$, то існує хоча б одна точка $c\in(a,b)$ така, що

$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ - формула Коші. (21.2)

Правило Лопіталя-Бернуллі. Розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема. Нехай в деякому околі точки $x=a$ функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовані всюди, крім, можливо, точки $x=a$, та $g'(x)\neq 0$ в околі цієї точки. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ являються одночасно нескінченно малими або нескінченно великими при $x\to a$ і при цьому існує границя відношення $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to a$, то існує границя відношення $f(x)/g(x)$, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (21.3)$$

Зауваження. В деяких випадках невизначеності $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$ можуть потребувати неоднократного повторення правила Лопіталя.

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Розв'язання. Застосуємо формулу Лопіталя.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-8x+5}{3x^2-10x+7}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{6x-8}{6x-10}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}.$$

Розкриття невизначеностей типу $0\cdot\infty$ та $\infty-\infty$.

Для обчислення $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)$, де $f(x)$ - нескінченно мала, а $g(x)$ - нескінченно велика при $x\to a$, треба перетворити добуток в $\dfrac{f(x)}{(g(x))^{-1}}$, або $\dfrac{g(x)}{(f(x))^{-1}}$, тобто в невизначеність $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{a}{x}\quad(\infty\cdot 0)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{a}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{x^{-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{a}{x}\left(\cdot-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=a\cdot\lim_{x\to\infty}\cos\frac{a}{x}=a.$$

Розкриття невизначеностей 0^0, ∞^0 та 1^∞.

У всіх випадках обчислюється границя функції $y=(f(x))^{g(x)}$.

Прологарифмуємо функцію $y=(f(x))^{g(x)}$. Отримаємо $\ln y = g(x)\ln f(x)$ і знайдемо границю $\ln y$. Після чого знайдемо границю y.

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to o}x^{\sin x}$.

Розв'язання. $y=x^{\sin x}$, тоді $\ln y=\sin x\ln x$.

Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\ln y$.

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{(\sin x)^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x}=-\lim_{x\to 0}\sin x=0;$$

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}x^{\sin x}=e^0=1.$$

<u>Запитання для самоконтролю</u>:

1. Теорема Ролля.
2. Теорема Коші.

3. Правило Лопіталя.

Лекція 22. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

У лекції розглядається дослідження функції на монотонність, екстремум, знаходження точок перетину і асимптот. Наводиться загальна схема дослідження функції і приклад повного дослідження і побудови графіка функції.

1. Монотонність функцій. Екстремуми функцій.

Функція $y = f(x)$ називається монотонно зростаючою (спадною) на інтервалі $[a;b]$ області визначення, якщо з нерівності $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [a;b]$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогічно $f(x_1) > f(x_2)$.

Якщо функція диференційована на інтервалі $(a;b)$, а $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то $f(x)$ спадає на $(a;b)$.

Область визначення функції $f(x)$ можна розбити на скінченне число інтервалів монотонності, кожний з яких обмежений критичними точками, в яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує.

Якщо існує деякий окіл точки x_0, що для довільного $x \neq x_0$ виконується нерівність $f(x) > f(x_0)(f(x) < f(x_0))$, то точка x_0 називається точкою максимуму (мінімуму). Точки максимуму та мінімуму називаються точками екстремуму функції.

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо x_0 - точка екстремуму функції $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ або $f'(x)$ не існує, x_0 називається критичною або стаціонарною точкою функції $f(x)$; $x_0 \in D(x)$.

Достатня умова існування екстремуму функції. Нехай функція $f(x)$ диференційована в околі $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ критичної точки x_0, за виключенням, можливо, самої точки. Якщо при цьому в інтервалах $(x_0 - \varepsilon; \varepsilon)$ та $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ похідна має різні знаки, то x_0 - точка екстремуму функції $f(x)$ і якщо $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ та $f'(x) < 0$ $(f'(x_0) > 0)$ $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$, то x_0 - точка максимуму (мінімуму). Якщо $f'(x)$ на $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ не змінює знаку, то x_0 не буде точкою екстремуму функції.

2. Напрямність опуклості. Точки перегину.

Графік диференційованої функції $y = f(x)$ називають *опуклим* (угнутим) *униз* на інтервалі $(a;b)$, якщо дуга кривої на цьому проміжку розташована вище дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в довільній точці $x \in (a;b)$.

Якщо на інтервалі $(a;b)$ дотична до довільної точки знаходиться вище дуги кривої, то графік диференційованої функції на цьому інтервалі називають *опуклим вгору*.

Користуються позначенням $\cup\cap$, відповідно, для угнутості та опуклості.

Теорема 1. Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційована на $(a;b)$. Тоді $f(x)$ опукла (угнута), якщо $f''(x) > 0;$ $(f''(x) < 0),$ $x \in (a;b).$

Точка, в якій функція змінює опуклість на вгнутість називається *точкою перегину* функції.

Теорема 2. (Достатня умова перегину). Якщо $f''(x_0) = 0$ або не існує і $f''(x)$ змінює знак при переході через x_0, то x_0 є точкою перегину.

3. Асимптоти функції.

Цей пункт не пов’язаний з диференціальним численням, але доповнює попередню інформацію про елементи поведінки функції.

Асимптота даної кривої – це така пряма, відстань до якої від змінної точки кривої прямує до нуля в міру віддалення точки кривої у нескінченність.

Для довільних функцій розрізняють *вертикальні*, *похилі*, *горизонтальні* асимптоти.

У разі *вертикальних* асимптот $x = a$ маємо:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \tag{22.1}$$

або хоча б при $x \to a - 0$ чи $x \to a + 0$.

Похилі асимптоти $y = kx + b$ функції $y = f(x)$. За означенням асимптоти матимемо:

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0. \tag{22.2}$$

Звідси $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx).$ (22.3)

Горизонтальні асимптоти

$$y = b, \text{ де } b = \lim_{x\to\infty} f(x). \qquad (22.4)$$

4. Загальна схема дослідження функції. Побудова графіка функції.

Диференціальне числення дає змогу об’єктивно відтворити графік функції із зображенням його характерних особливостей.

Схема дослідження функції.

1. Знаходимо область визначення $D(x)$ функції.

2. Перевіряємо функцію на періодичність, парність, непарність.

У разі необхідності, знаходимо характерні точки графіка, точки перетину з осями координат.

3. Знаходимо $f'(x)$ і критичні точки $f'(x)=0$ або не існує.

4. Знаходимо $f''(x)$ і критичні точки $f''(x)=0$ або не існує.

5. Знайдені дані заносимо в таблицю, з якої дістаємо інтервали монотонності, опуклості чи угнутості, точки екстремуму, перегину (заповнивши клітинки знаками похідних).

6. Знаходимо асимптоти функції.

7. Будуємо графік функції.

Приклад 10. Дослідити функцію $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ і побудувати її графік.

Розв’язання.

1. $D(x):\ x\neq\pm2;\ x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

2. $f(x)$ - неперіодична.

Оскільки $f(-x)=-\dfrac{x}{x^2-4};\ \ f(-x)=-f(x)$ - функція непарна.

Перетин з віссю Ox:

$x=0;\ y=0;$ з віссю Oy: $y=0;\ x=0;$ точка $O(0;0)$.

3. $f'(x)=\dfrac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=-\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2};\quad f'(x)<0.$ Критичних точок немає. Функція всюди спадає.

4. $f''(x)=-\dfrac{2x(x^2-4)^2-2(x^2-4)\cdot 2x(x^2+4)}{(x^2-4)^4}=$

$$=-\frac{2x^3-8x-4x^3-16x}{(x^2-4)^3}=\frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}=\frac{x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3},$$

$x(2x^2+24)=0;\ \ x=0$ - критична точка.

5. Складаємо та

Таблиця 6.1

x	(-∞;-2)	-2	(-2;0)	0	(0;2)	2	(2;+ ∞)
$f'(x)$	–	∞	–	–	–	∞	–
$f''(x)$	–	∞	+	0	–	∞	+
$f(x)$	↘ ∩	∞	↘ ∪	0 перегин	↘ ∩	∞	↘ ∪

6. Знайдемо асимптоти.

Вертикальні асимптоти: $x=-2$ та $x=2$.

Похила асимптота $y=kx+b$;

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(x^2-4)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}=0.$$

Отже, $y=0$ - горизонтальна асимптота.

7. Будуємо графік функції (рис. 19).

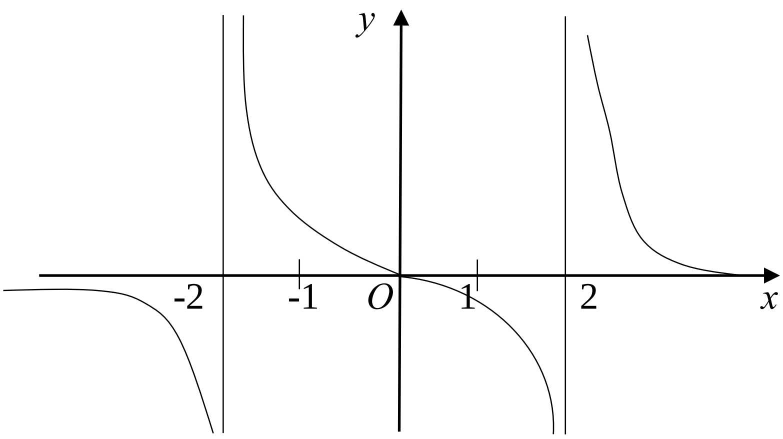

Рис. 19

Приклад 11. Дослідити функцію $y=\frac{\ln x}{x}$ та побудувати графік.

Розв'язання.

1. $D(x):\ x>0.$

2. Функція неперіодична, не парна, не непарна.

Точок перетину з віссю Oy не має. З віссю Ox: $y=0\Rightarrow\ln x=0$, $x=1; M_0(1;0).$

3. $y' = \dfrac{x \cdot \dfrac{1}{x} - \mathrm{In}\,x}{x^2} = \dfrac{1 - \mathrm{In}\,x}{x^2};\;\; y' = 0 \Rightarrow \mathrm{In}\,x = 1;\;\; x = e,$

$x = e$ - критична точка.

4. $y'' = \dfrac{(1-\mathrm{In}\,x)' \cdot x^2 - (1-\mathrm{In}\,x)\cdot(x^2)'}{x^4} = \dfrac{-x - 2x + 2x \cdot \mathrm{In}\,x}{x^4} = \dfrac{2\,\mathrm{In}\,x - 3}{x^3};$

$y'' = 0 \Rightarrow \mathrm{In}\,x = \dfrac{3}{2};\;\; x = e,\;\; x = e^{\frac{3}{2}}$ - критична точка.

5. Складемо таблицю.

Таблиця 6.2

x	$(0;e)$	e	$\left(e;e^{\frac{3}{2}}\right)$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\left(e^{\frac{3}{2}};+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ $\cap$	$\dfrac{1}{e}$ max	$\searrow$ $\cap$	$\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$ перегин	$\searrow$ $\cap$

6. Знайдемо асимптоти.

Вертикальна $x = 0$.

Похила $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{In}\,x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{In}\,x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{x} = 0. \quad y = 0.$$

7. Будуємо графік функції (рис. 20).

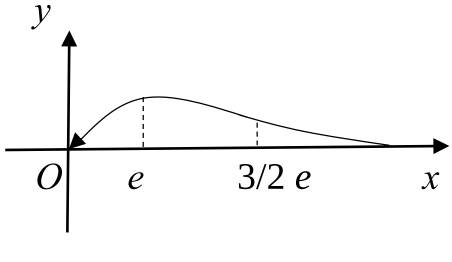

Рис. 20

Запитання для самоконтролю:

1. Необхідна умова екстремума.
2. Точки перегину.
3. Асимптоти функції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Овчінніков Ф.П.* Вища математика: підручник в 2 ч. – Ч. 1. / Ф.П. Овчінніков, В.М. Яремчук – К.: Техніка, 2000. – 590 с.
2. *Овчінніков Ф.П.* Вища математика: підручник в 2 ч. – Ч. 2. / Ф.П. Овчінніков, В.М. Яремчук – К.: Техніка, 2000. – 790 с.
3. *Міхайленко В.М.* Математичний аналіз для економістів: навчальний посібник / В.М. Михайленко, Н.Д. Федоренко. – К.: Європейський університет, 2002. – 297 с.
4. *Журавель О.О.* Вища математика: збірник завдань для курсових і самостійних робіт / О.О. Журавель. – К.: КДТУБА, 1997. – 267 с.
5. *Бугров Я.С*. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник/ Бугров Я.С., Никольский С.М. – М.: Наука, 1980.
6. *Федоренко Н.Д*. Вища математика: навчальний посібник./ Федоренко Н.Д., Баліна О.І., Безклубенко І.С – К.: КНУБА, 2003. – 165 с.
7. *Безклубенко І.С*. Лінійна алгебра і аналітична геометрія: методичні вказівки і контрольні завдання для спеціальності АТП заочної форми навчання/ Безклубенко І.С, Баліна О.І., Буценко Ю.П. – К.: КНУБА, 1999. – 18 с.