Лабораторна робота **№ 1.1**

ВИВЧЕННЯ МЕТОДИКИ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Мета роботи: ознайомитися з методами обробки результатів експерименту і застосувати їх на прикладі вимірювання питомого опору дроту.

Коротка теорія

Приклад 1. Студенту доручили виміряти період коливань маятника. Для вимірювання періоду коливань студент користувався секундоміром. Він включав його, коли маятник досягав максимального відхилення, і зупиняв після одного повного коливання.

Він отримав такі результати 7-ми вимірювань періоду (в секундах):

3,43; 3,41; 3,50; 3,40; 3,45; 3,44; 3,42.

Якщо тепер спитати в аудиторії студентів, як представити результат цих вимірювань, то більшість студентів абсолютно вірно пропонуватимуть визначити *середнє значення*.

Як доказується в теорії вимірювань, середнє арифметичне є найкращим наближенням до істинного значення вимірюваної величини.

Середнє арифметичне значення періоду:

$$< T >= \frac{3{,}43 + 3{,}41 + 3{,}50 + 3{,}40 + 3{,}45 + 3{,}44 + 3{,}42}{7} \approx 3{,}44 \text{ (с)}.$$

Отже, перший крок зроблено. Але як врахувати точність вимірювання? Як вказати граничні значення, між якими перебуває істинне значення вимірюваної величини?

Тут ми наведемо деякі відомості з теорії похибок вимірювань.

Теоретичний вступ

Внаслідок недосконалості вимірювальних приладів, методів вимірювання і наших органів чуттів та інших причин під час вимірів неминуче виникають *похибки.*

Абсолютною похибкою Δx вимірювання називається різниця між знайденим на досліді та істинним значенням фізичної величини:

$$\Delta x = x_{\text{вимір}} - x_{\text{іст}}. \tag{1}$$

Істинне значення фізичної величини одержати не можна, а повністю уникнути похибок вимірювання принципово неможливо. Однак за допомогою серії вимірювань і обробки їх результатів можна знайти **приблизне значення вимірюваної величини і вказати граничні значення, між якими вона знаходиться**. В цьому і полягає зміст обробки результатів експерименту.

Випадкові похибки підпорядковуються статистичним закономірностям, які вивчаються теорією ймовірності. Наведемо без доведення деякі висновки цієї теорії.

Багаторазово повторюючи одні і ті ж вимірювання, можна помітити, що їх результати розкидані навколо деякого середнього.

Нехай в результаті n вимірювань фізичної величини x отримані значення x_1, x_2, x_3, …, x_i, …, x_n. . В якості найкращого значення для вимірюваної величини приймають **середнє арифметичне** з усіх отриманих результатів (відношення суми всіх значень даних до числа доданків):

$$< x > = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (2)$$

Тут Σ - прийнятий в математиці знак підсумовування величин тих змінних, які знаходяться праворуч від цього знака.

Для оцінки точності результату виміряного значення вводиться величина $S_{<x>}$, , що характеризує можливе відхилення знайденого середнього арифметичного від істинного значення.

Вона називається **середнім квадратичним відхиленням середнього арифметичного** і дорівнює

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - < x >)^2}{n(n-1)}} \ . \qquad (3)$$

Тут x_i - результат i-го вимірювання; $<x>$ - середнє арифметичне отриманих значень; n - число вимірювань.

Вираз в чисельнику під коренем означає, що для всіх x_i від першого до останнього необхідно обчислити різницю між i - ми і середніми значеннями, звести ці різниці в квадрат і підсумувати;

Результат вимірювань записують у вигляді

$$x = <x> \pm S_{<x>}. \qquad (4)$$

Такий запис зі знаком ± рівнозначний нерівності

$$<x> - S_{<x>} \le x \le <x> + S_{<x>} \qquad (5)$$

і означає, що вимірювана величина x знаходиться всередині проміжку (інтервалу) шириною 2 $S_{<x>}$..

Інтервал ($<x> - S_{<x>}$, $<x> + S_{<x>}$) показаний на рис. 1.*а* .

Рис.1,*а*

Його називають **довірчим інтервалом.**

Наприклад, якщо для ЕРС елемента отримано $E = (1{,}4 \pm 0{,}1)$ В, то це означає, що істинне значення виміряної ЕРС міститься в довірчому інтервалі від 1,3 до 1,5 В.

Довірчий інтервал містить істинне значення вимірюваної величини з певною ймовірністю. Використання середнього квадратичного відхилення $S_{<x>}$ є зручним тому, що в інтервал ($<x> - S_{<x>}$, $<x> + S_{<x>}$) істинне значення $x_{іст}$ потрапляє в $\alpha = 68\%$ випадків. При цьому α називається коефіцієнтом довіри або **довірчою ймовірністю.**

Таким чином, довірчий інтервал це - інтервал значень вимірюваної величини, який із заданою надійністю (довірчою ймовірністю) накриє справжнє значення цієї величини.

Якщо потрібно мати більшу впевненість у тому, що $x_{іст}$ знаходиться всередині довірчого інтервалу, останній необхідно розширити. Якщо розширити довірчий інтервал, наприклад, в 2 рази (рис.1, *б*),

Рис. 1, *б*

то ймовірність того, що невідоме значення виявиться всередині цього інтервалу, зросте до $\alpha = 95\%$. Отже, якщо довірчий інтервал збільшується, то зростає ймовірність того, що істинне значення величини потрапляє в даний інтервал. Однак, з розширенням довірчого інтервалу зростає абсолютна і відносна похибка вимірювання.

Ми розглянули варіанти довірчих інтервалів, напівширина яких становила $S_{<x>}$ і 2 $S_{<x>}$. Побудуємо тепер довірчий інтервал, напівширина якого дорівнює $t\,S_{<x>}$. (рис. 1, *в*).

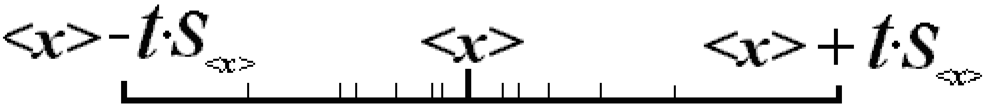

Рис. 1, *в*

Тут стандартне відхилення $S_{<x>}$ множиться на деяке число t. Це число (воно називається коефіцієнтом Стьюдента, Стьюдент - псевдонім англійського математика У. Госсета) залежить від обраної експериментатором довірчої ймовірності α і кількості n проведених ним дослідів. Коефіцієнти Стьюдента $t_{\alpha,n}$ розраховані в теорії ймовірностей і зведені в таблицю 1.

Таблиця 1.

n / α	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,8	3,08	1,89	1,64	1,53	1,48	1,44	1,42	1,40	1,38
0,9	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,83
0,95	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26
0,98	31,8	6,96	4,54	3,75	3,36	3,14	3,00	2,90	2,82
0,99	63,7	9,92	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25

Так, наприклад, при довірчій ймовірності $\alpha = 0,9$ (або 90%) і числі дослідів $n = 5$ коефіцієнт Стьюдента становить $t_{\alpha,\,n} = 2,13$.

Напівширина такого **довірчого інтервалу** (або абсолютна похибка $\Delta<x>$ середнього значення вимірюваної величини) дорівнює

$$\Delta<x> = t_{\alpha,n}\, S_{<x>}. \tag{6}$$

Відносною похибкою вимірювання E називається відношення напівширини довірчого інтервалу до середнього значення вимірюваної величини

$$E = \frac{\Delta < x >}{< x >} \cdot 100\% . \tag{7}$$

У підсумку **остаточний результат** записують у вигляді

$$x = (<x> \pm \Delta<x>) \text{ одиниць вимірювання, при } \alpha = \ldots \tag{8}$$

Цей запис означає, що в результаті вимірів знайдено середнє значення $<x>$ з граничною похибкою $\Delta <x>$, тобто що з імовірністю $\alpha = ...$ істинне значення вимірюваної величини буде лежати в межах від $<x> - \Delta<x>$ до $<x> + \Delta<x>$.

У всіх лабораторних роботах, які містяться в фізичному практикумі, необхідно дотримуватися ***єдиної методики обробки результатів вимірювань***, а саме:

(дані кожного кроку заносять в таблицю)

1. Проводять n незалежних дослідів і визначають n значень шуканої величини $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.
2. Розраховують середнє арифметичне значення шуканої величини:

$$< x > = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

3. Розраховують відхилення кожного результату від середнього значення:

$$\Delta x_i = x_i - <x>.$$

4. Визначають середнє квадратичне відхилення середнього

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + ...}{n(n-1)}}.$$

5. Задають довірчу ймовірність α. Зазвичай довірчу ймовірність вважають рівною 0,90; 0,95; 0,98; 0,99. За обраним значенням довірчої ймовірності α і для виконаної кількості вимірювань *n* за таблицею визначають коефіцієнт Стьюдента $t_{\alpha,\, n}$.

6. Обчислюють напівширину довірчого інтервалу (абсолютну похибку середнього)

$$\Delta<x> = t_{\alpha,n}\ S_{<x>}.$$

7. Визначають відносну похибку

$$E = \frac{\Delta <x>}{<x>} \cdot 100\%.$$

8. Остаточний результат вимірювання записують у вигляді:

x = (<x> ± Δ<x>) одиниць виміру, при α = ...

Приклад 1 (закінчення). Як бачимо, отримані результати вимірювань відрізняються один від одного на кілька сотих чи десятих часток секунди, тобто містять випадкову похибку.

Розкид результатів вимірювань може бути викликаний натисканням кнопки секундоміра чи трохи раніше, то чи пізніше, ніж потрібно. На рух маятника можуть впливати: сили тертя в місці закріплення підвісу, сила опору повітря, випадкові повітряні потоки і т.п.

Користуючись наведеним алгоритмом обробки результатів вимірювань, визначаємо (далі все в секундах):

1. Середнє арифметичне значення періоду:

$$<T> = \frac{3{,}43 + 3{,}41 + 3{,}50 + 3{,}40 + 3{,}45 + 3{,}44 + 3{,}42}{7} \approx 3{,}44.$$

Поширеною помилкою обчислення, особливо при користуванні калькулятором, є надмірно велика кількість значущих цифр, наприклад, в наведеному випадку <T> = 3,435714. Це створює хибне враження про велику точність вимірювань.

Оскільки вихідними даними для розрахунку є значення всього з двома значущими цифрами, внаслідок цього і в остаточному значенні мають бути залишені тільки перші дві значущі цифри. (Всі цифри числа, починаючи з першої зліва, відмінної від нуля, називаються значущими цифрами.)

Слід користуватися такими правилами округлення результату вимірювань:

1) похибка представляється з однією або двома значущими цифрами;

2) результат вимірювань округляється так, щоб він закінчувався цифрою того ж розряду, що і значення похибки.

Наприклад, числове значення результату вимірювання складає 25,458. При похибці результату, вираженій межами ± 0, 02; округлення результату буде 25,46.

2. Відхилення кожного результату від середнього значення ΔT_i:

$$\Delta T_1 = 3{,}43 - 3{,}44 = -0{,}01;$$
$$\Delta T_2 = 3{,}41 - 3{,}44 = -0{,}03;$$
$$\Delta T_3 = 3{,}50 - 3{,}44 = +0{,}06;$$
$$\Delta T_4 = 3{,}40 - 3{,}44 = -0{,}04;$$
$$\Delta T_5 = 3{,}45 - 3{,}44 = +0{,}01;$$
$$\Delta T_6 = 3{,}44 - 3{,}44 = 0;$$
$$\Delta T_7 = 3{,}42 - 3{,}44 = -0{,}02.$$

3. Середнє квадратичне відхилення середнього:

$$S_{\langle T\rangle} = \sqrt{\frac{\Delta T_1^2 + \Delta T_2^2 + \Delta T_3^2 + \ldots}{n(n-1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(-0{,}01)^2 + (-0{,}03)^2 + (0{,}06)^2 + (-0{,}04)^2 + (0{,}01)^2 + (-0{,}02)^2}{7\cdot 6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}0001 + 0{,}0009 + 0{,}0036 + 0{,}0016 + 0{,}0001 + 0{,}0004}{42}} =$$

$$\sqrt{\frac{0{,}0067}{42}} \approx 0{,}01.$$

4. Задамо довірчу ймовірність, наприклад, α = 0,9 (віримо своїм вимірам на 90%) і для 7-ми вимірювань за таблицею знаходимо коефіцієнт Стьюдента:

$$t_{\alpha,n} = 1{,}94.$$

5. Обчислимо абсолютну похибку середнього

$$\Delta\langle T\rangle = t_{\alpha,n}\ S_{\langle T\rangle} = 1{,}94\cdot 0{,}01 \approx 0{,}02.$$

6. Знаходимо відносну похибку

$$E = \frac{\Delta < T >}{< T >}\cdot 100\% = \frac{0{,}02}{3{,}44}\cdot 100\% = 0{,}6\%.$$

7. Записуємо остаточний результат вимірювання:

$$T = (3{,}44 \pm 0{,}02)\ c \text{ при } \alpha = 0{,}9.$$

У лабораторних роботах найчастіше шукана величина не вимірюється безпосередньо, а виходить побічно, розрахунком, з використанням результатів прямих вимірювань інших величин.

Наприклад, якщо довжину вимірюють лінійкою, температуру – термометром, електричний опір *R* - омметром, то це так звані ***прямі вимірювання***.

Але можна знаходити значення електричного опору *R* за допомогою двох вимірів - напруги *U* і сили струму *I* і подальшого розрахунку на підставі закону Ома: $R = U / I$.

Якщо значення фізичної величини не вимірюється безпосередньо яким-небудь приладом, а розраховується на основі відомої залежності між цією величиною та величинами, знайденими прямим вимірюванням, такі ***вимірювання*** називаються ***непрямими.***

Аналіз похибок непрямих вимірювань є досить складний математично, тому ми будемо використовувати **спрощений порядок розрахунку** похибок.

Якщо один або декілька параметрів під час непрямих вимірювань систематично змінюються, то **шукане значення** посередньо вимірюваних величин **обчислюється для кожного окремого вимірювання**.

Після чого отримані результати обробляються як прямі багаторазові вимірювання *за алгоритмом прямих вимірювань*, наведеним вище.

Як приклад застосування спрощеного розрахунку пропонується обчислити питомий опір дроту.

Приклад 2. Вимірювання питомого опору ніхромового дроту

Питомий опір ρ дроту, виготовленого з однорідного матеріалу і однакової товщини, може бути визначено з формули опору:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де R - опір вимірюваного відрізка дроту; l - його довжина; S - площа поперечного перерізу дроту.

Довжину дроту l вимірюють за допомогою мірної шкали приладу, площу поперечного перерізу обчислюють, визначивши діаметр дроту d (прийняти d = 0,45 мм),

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Електричний опір R можна визначити за законом Ома, вимірявши силу струму I і падіння напруги U на дроті амперметром і вольтметром:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Отже, питомий опір дроту може бути обчислено за формулою:

$$\rho = \frac{\pi d^2 U}{4Il}. \quad (9)$$

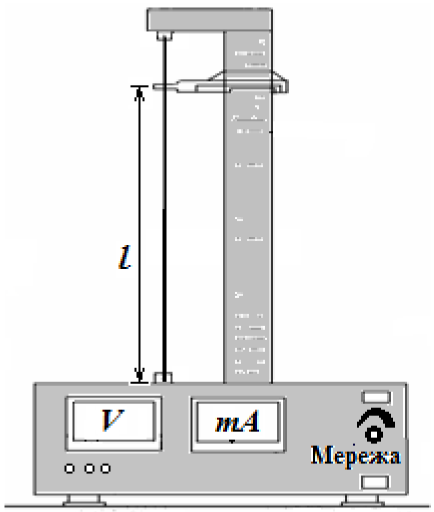

Рис.2

Очевидно, тут ми маємо справу з непрямими вимірюваннями.

Експериментальна установка показана на рис. 2. Струм проходить по замкненому колу, частиною якого є металевий дріт. Силу струму та падіння напруги на дроті вимірюють амперметром та вольтметром, які вбудовані в прилад.

Порядок вимірювань

1. Переміщуючи рухливий кронштейн, встановити довжину *l* дроту, зазначену викладачем (≈ 50 см).
2. Включити установку, натиснувши кнопку "МЕРЕЖА".
3. Обертаючи ручку регулювання струму («рег. тока», надпис рос. мовою), встановити таку силу струму, щоб стрілка вольтметра точно зупинилась на одній з поділок; 0.4, 0,45, …, 0,95, 1,00 В. Покази приладів внести в таблицю 2.
4. Дослід повторити три рази при різних значеннях струму.
5. Змінити незначно довжину дроту і повторити ті ж вимірювання.
6. Дані вимірювань занести в таблицю.

Таблиця 2.

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>d, м</th><th>l, м</th><th>U, В</th><th>I, А</th><th>ρ_i, Ом·м</th><th><ρ>, Ом·м</th><th>$\Delta\rho_i$, Ом·м</th><th>$(\Delta\rho_i)^2$</th><th>$S_{<\rho>}$, Ом·м</th><th>α</th><th>$t_{\alpha,n}$</th><th>Δ<ρ> Ом·м</th><th>E, %</th></tr>
<tr><td>1.</td><td rowspan="6">$4{,}7\cdot 10^{-4}$</td><td rowspan="3"></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="6"></td><td></td><td></td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>2.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td rowspan="3"></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

7. Обчислити питомий опір ρ за формулою (9) i **для кожного вимірювання окремо**.
8. Отримавши декілька значень ρ_i, , оцінити похибки, для чого:

- Визначити середнє значення $<\rho> = \dfrac{\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_i$;
- Визначити відхилення кожного окремого виміру від середнього
  $\Delta\rho_1 = \rho_1 - <\rho>$, $\Delta\rho_2 = \rho_2 - <\rho>$, …;
- Обчислити середнє квадратичне відхилення

$$S_{\langle\rho\rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\rho_i - <\rho>)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\Delta\rho_1^2 + \Delta\rho_2^2 + \Delta\rho_3^2 + ...}{n(n-1)}} ;$$

- Визначити за таблицею коефіцієнт Стьюдента $t_{\alpha,n}$ для α = 0,95;

- Розрахувати похибку (довірчий інтервал) величини питомого опору

$$\Delta < \rho >= t_{\alpha,n} S_{<\rho>} ;$$

9. Записати остаточний результат у вигляді

$$\rho = (< \rho > \pm\Delta < \rho >) \text{ Ом} \cdot \text{м} \quad \text{при } \alpha = 0{,}95.$$

Контрольні питання

1 .У чому полягає зміст обробки даних експерименту? Що називається абсолютною і відносною похибкою?
2. Який зміст довірчої ймовірності і довірчого інтервалу?
3. Як змінюється похибка вимірювання зі збільшенням коефіцієнта довіри?
4. Проаналізуйте таблицю коефіцієнтів Стьюдента. Як змінюються коефіцієнти Стьюдента зі збільшенням числа дослідів? Яким чином збільшення числа дослідів впливає на точність вимірювань?
5. Який зміст запису ρ = <ρ> ± Δ <ρ>, при α = 0,95?

Література

1. Загальна фізика: Лабораторний практикум: Навч. посібник За заг. ред.. І.Т. Горбачука. – К.:Вища шк.., 1992.
2. Кучерук І.М. , Дущенко В.П., Андріанов В.М. Обробка результатів фізичних вимірювань. – К. : Вища шк.. 1981
3. Лабораторные занятия по физике: Уч. пособие. Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. 1983.