1.9. Гравітаційне поле

1.9.1
- Гравітаційне поле. Закон всесвітнього тяжіння.

1.9.2
- Напруженість гравітаційного поля. Прискорення вільного падіння.

1.9.3
- Енергія у гравітаційному полі. Потенціал гравітаційного поля. Потенціальна енергія матеріальної точки в гравітаційному полі

1.9.4.
- Зв’язок напруженості поля з його потенціалом.

1.9.1. Гравітаційне поле. Закон всесвітнього тяжіння

Гравітаційне поле є видом існування матерії, через яку передається взаємодія між тілами та створюється матеріальним об'єктом масою ***m***.

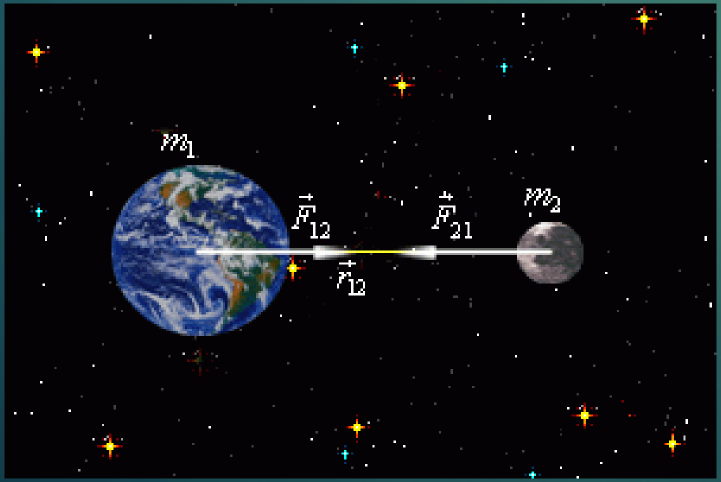
Закон всесвітнього тяжіння: сила притягання між ***точковими масами*** m_1 та m_2, що перебувають на відстані r одна від одної пропорційна добутку цих мас та обернено пропорційна квадрату відстані між ними (відкритий Ньютоном на підставі законів Кеплера) :

$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – ***гравітаційна стала***, числове значення якої експериментально визначено в лабораторних умовах Г. Кавендішем в 1798 р.

Фізичний зміст гравітаційної сталої: чисельно дорівнює силі гравітаційного притягання двох матеріальних точок масою 1 кг кожна, які перебувають на відстані 1 м одна від одної.

Для розрахунку сили взаємодії ***протяжних тіл*** їх слід уявно поділити на елементарні маси (продиференціювати), підрахувати сили притягання між такими масами, а потім геометрично скласти (проінтегрувати).

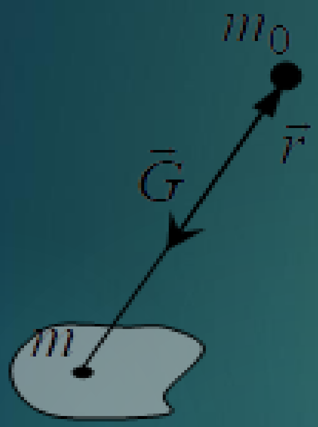


Принцип суперпозиції гравітаційних полів: гравітаційне поле, утворене декількома тілами, дорівнює геометричній сумі гравітаційних полів, утворених цими тілами окремо.

1.9.2. Напруженість гравітаційного поля. Прискорення вільного падіння.

Для характеристики гравітаційного поля вводять два параметри:

- *силову характеристику* – ***напруженість*** поля
- *енергетичну характеристику поля* – ***потенціал***.



Згідно з законом всесвітнього тяжіння у векторній формі:

$$\vec{F} = \gamma \frac{m \cdot m_0}{r^3} \vec{r}$$

або

$$\frac{\vec{F}}{m_0} = \gamma \frac{m}{r^3} \vec{r}$$

Тоді позначимо:

$$\boxed{\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_0}}$$

Вектор напруженості гравітаційного поля $\vec{G}$ дорівнює відношенню сили, з якою поле діє на розміщену в даній точці одиничну пробну масу m_0, до величини цієї маси.

Отримаємо одиницю вимірювання напруженості гравітаційного поля:

$$[G] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{кг}}\right] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}\right] = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$$

Отже:

$$\vec{F} = m_0 \vec{G}$$

або

$$\boxed{\vec{F}_{\text{т}} = m_0 \vec{g}}$$

1.9.2. Напруженість гравітаційного поля. Прискорення вільного падіння.

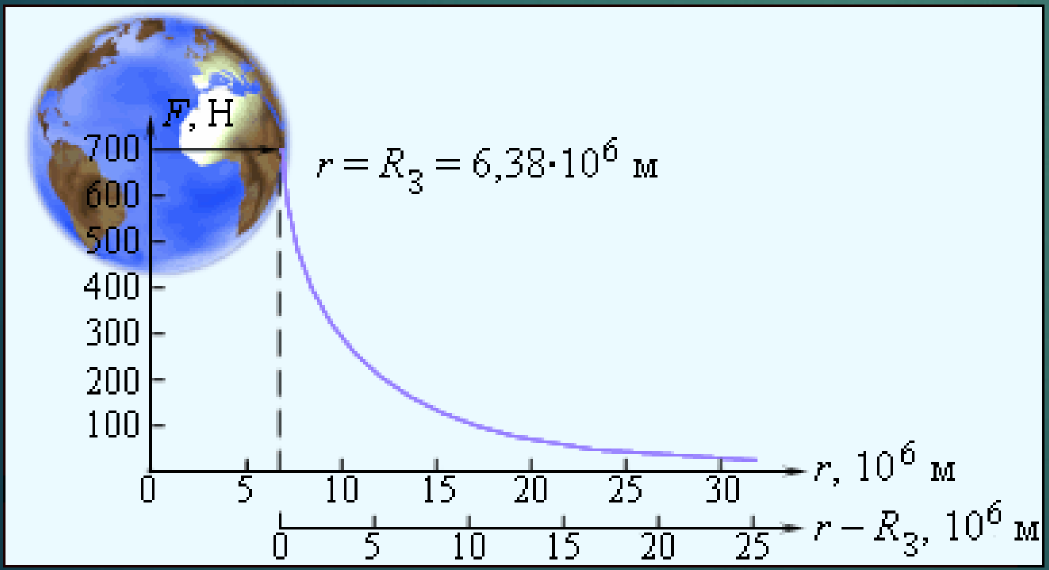
Скористаємось законом всесвітнього тяжіння для того, щоб отримати вираз для розрахунку напруженості гравітаційного поля:

$$\vec{F} = \gamma \frac{m \cdot m_0}{r^3} \vec{r}$$

Підставимо:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_0} \Rightarrow \vec{G} = \frac{\gamma \frac{m \cdot m_0}{r^3} \vec{r}}{m_0} \Rightarrow$$

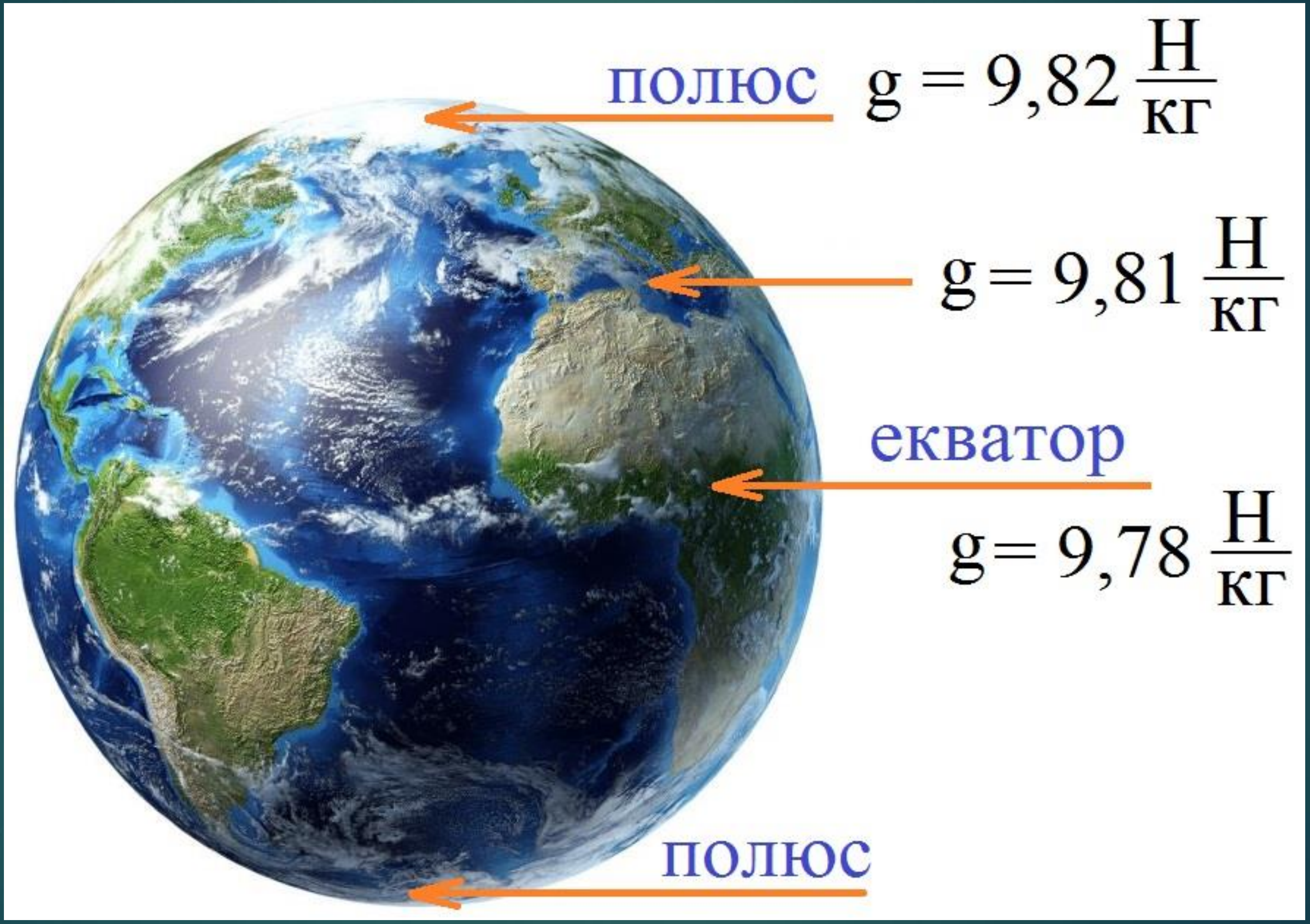
$$\Rightarrow \vec{G} = \gamma \frac{m}{r^3} \vec{r}$$



У міру віддалення від поверхні Землі ***сила земного тяжіння*** і ***прискорення вільного падіння*** змінюються ***обернено пропорційно*** квадрату відстані *r* до центра Землі.

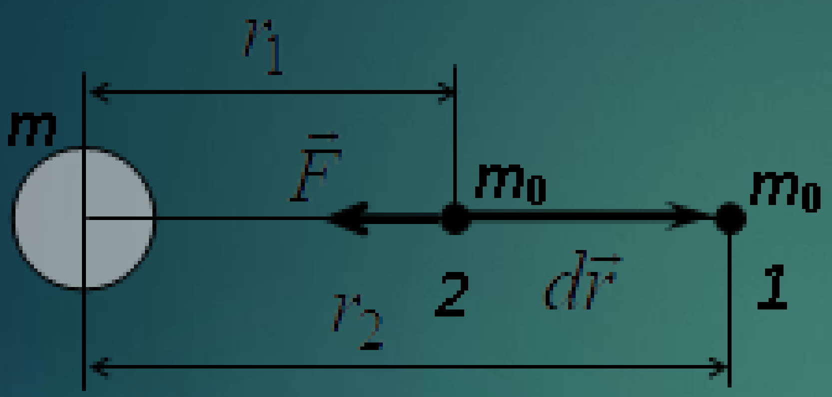
Рисунок ілюструє зміну сили тяжіння, що діє на космонавта в космічному кораблі під час його віддалення від Землі. Силу, з якою космонавт притягується до планети поблизу її поверхні, вважають рівною 700 Н.

1.9.2. Напруженість гравітаційного поля. Прискорення вільного падіння.



1.9.3. Енергія у гравітаційному полі. Потенціал гравітаційного поля.

Розглянемо елементарну роботу ***dA*** з переміщення пробної одиничної маси m_0 у полі тяжіння тіла з масою m з точки ***1*** в точку ***2*** :



$$dA = F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{r})$$

$$dA = -\gamma \frac{m_0 \cdot m}{r^2} dr$$

Кут між силою $\vec{F}$ та вектором переміщення $d\vec{r}$ дорівнює 180°; cosα=-1

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{m_0 \cdot m}{r^2} dr = -\gamma \cdot m_0 m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \gamma \cdot m_0 m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$A = \gamma \frac{m_0 \cdot m}{r_1} - \gamma \frac{m_0 \cdot m}{r_2}$$

- Отже, затрачена робота в полі сил тяжіння ***не залежить від форми траєкторії***, а визначається тільки початковим та кінцевим положеннями тіла.
- Тобто ***сили тяжіння є консервативними, а поле тяжіння є потенціальним***.

1.9.3. Енергія у гравітаційному полі. Потенціал гравітаційного поля.

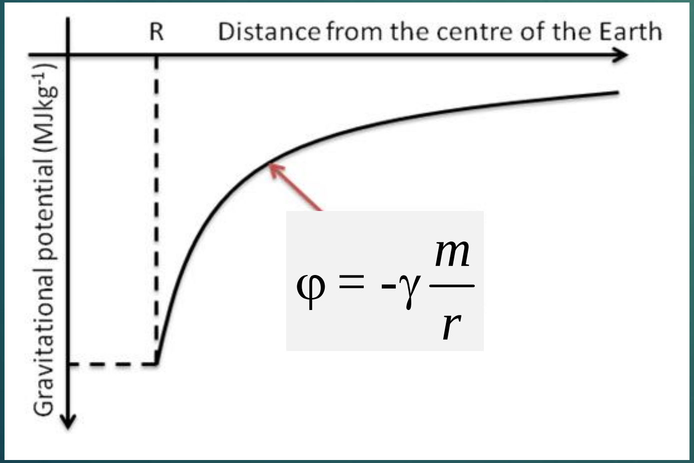
Оскільки робота у потенціальних полях дорівнює зменшенню потенціальної енергії, то ***потенціальна енергіїя*** тіла одиничної маси m_0 в гравітаційному полі тіла масою m :

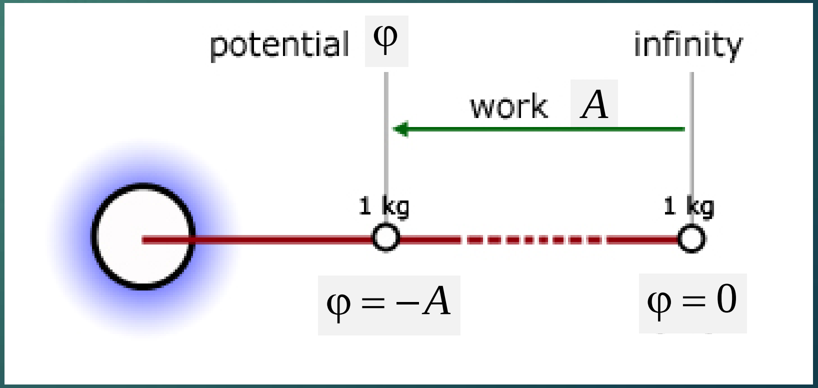
$$W_{\text{п}} = -\gamma \frac{m_0 \cdot m}{r}$$

Поділимо вираз для потенціальної енергії на величину одиничної маси m_0 :

$$\varphi = -\frac{W_{\text{п}}}{m_0} = -\gamma \frac{m}{r}$$

Потенціал гравітаційного поля є скалярною величиною, яка чисельно дорівнює ***потенціальній енергії*** тіла одиничної маси в даній точці поля або ***роботі*** з переміщення одиничної маси з даної точки поля у нескінченність.





1.9.4. Зв’язок напруженості поля з його потенціалом.

Робота в полі сил тяжіння:

$$A = \gamma \frac{m_0 \cdot m}{r_1} - \gamma \frac{m_0 \cdot m}{r_2} = m_0 \left(\gamma \frac{m}{r_1} - \gamma \frac{m}{r_2} \right)$$

Отже:

$$A = -m_0 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Розглянемо зв’язок потенціалу та напруженості гравітаційного поля.

Елементарна робота при малому переміщенні буде рівною:

$$dA = F dr \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = F dr$$

$$dA = -m_0 d\varphi$$

З формули напруженості гравітаційного поля сила:

$$F = G \cdot m_0$$

Тоді:

$$G m_0 dr = -m_0 d\varphi$$

Або:

$$G = -\frac{d\varphi}{dr}$$

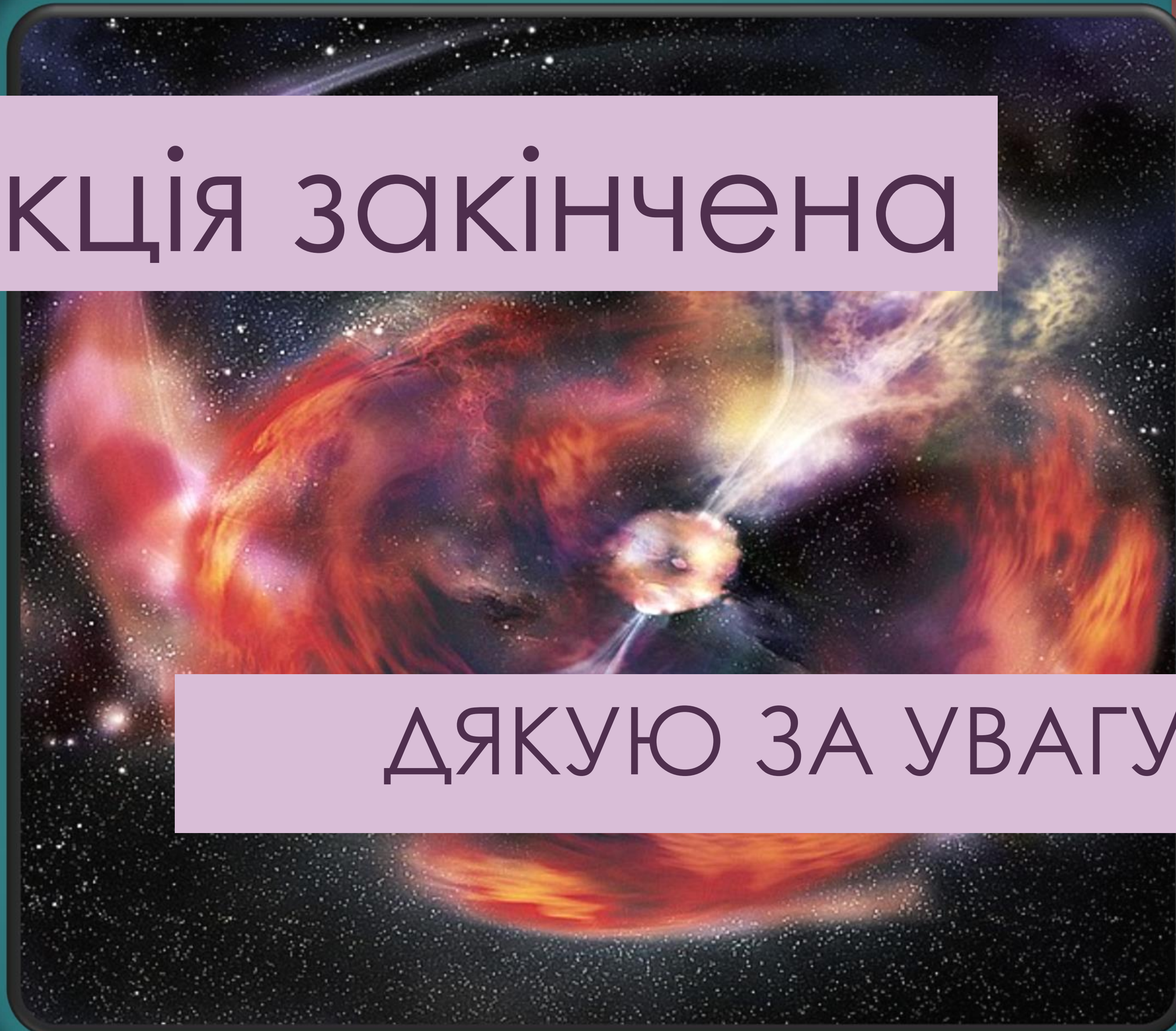
знак “–“ показує, що вектор напруженості поля спрямований протилежно до зростання потенціалу.

Величина називається ***градієнтом потенціалу*** і показує зміну потенціалу на одиницю довжини:

$$\vec{G} = -\overrightarrow{grad}\varphi$$

$$\vec{G} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} + \frac{d\varphi}{dz}\vec{k} \right)$$

Лекція закінчена



ДЯКУЮ ЗА УВАГУ