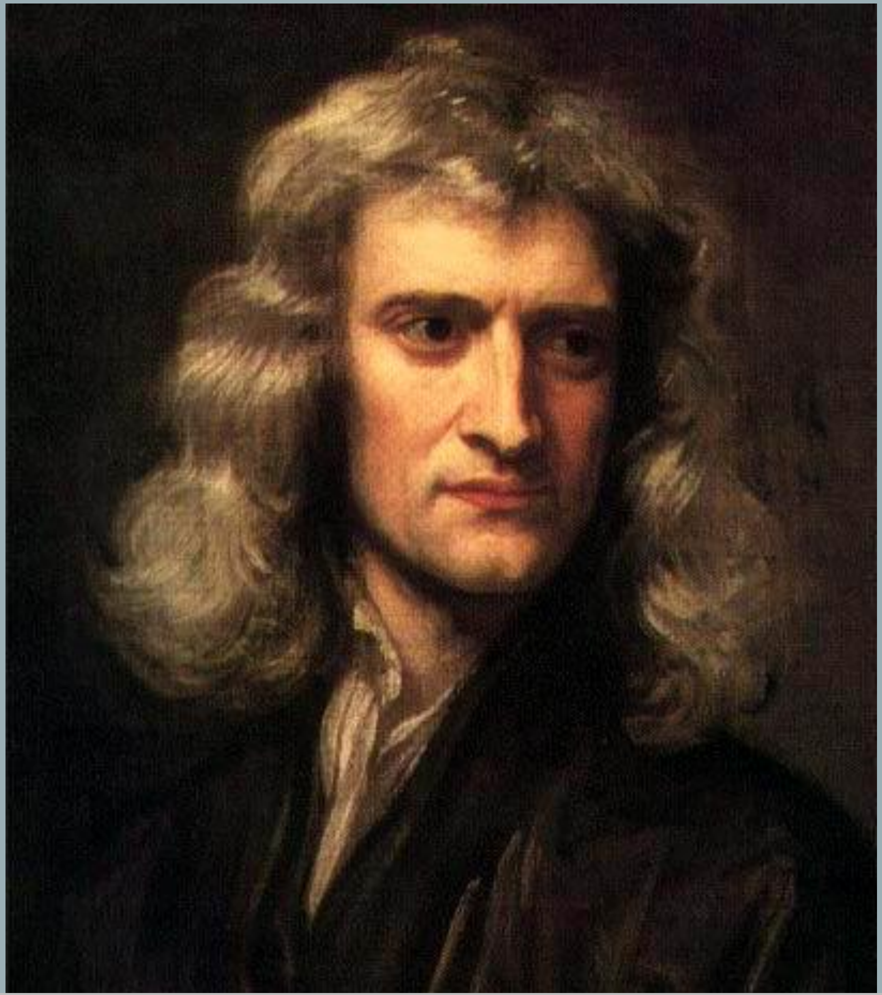
ЛЕКЦІЯ 4. ДИНАМІКА

- Динаміка поступального руху. Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку.
- Сила. Маса. Центр мас. Імпульс.
- Закон збереження імпульсу. Рух тіл змінної маси.
- Динаміка обертального руху. Момент сили. Момент інерції. Момент імпульсу.
- Закон динаміки обертального руху.
- Закон збереження моменту імпульсу.



Ньютон Ісаак (1643-1727) – англійський вчений, основоположник класичної фізики.
Член Лондонського королівського товариства, президент з 1703.
Закінчив Кембріджський ун-т (1665), очолював у ньому кафедру (1669-1701). З 1699 – директор Монетного двора.

Динаміка поступального руху

Динаміка є розділом фізики, який вивчає ***рух*** тіл та ***причини появи*** руху.

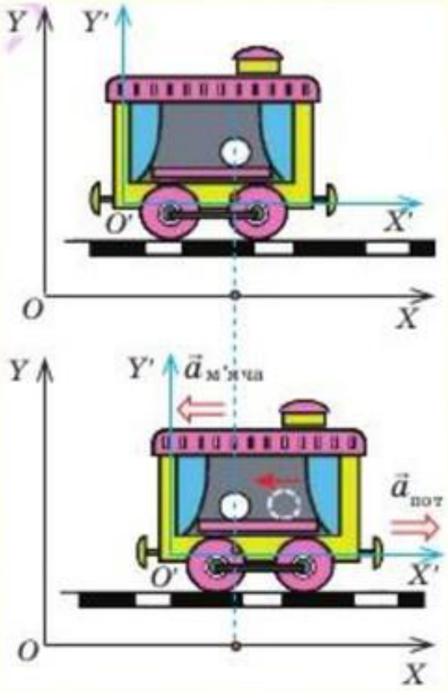
І закон Ньютона

Існують такі інерціальні системи відліку, відносно яких тіло рухається рівномірно і прямолінійно, або знаходиться в стані спокою, поки зовнішня дія не змінить цього стану.

Інерціальні системи відліку

Явище збереження тілом стану спокою або рівномірного прямолінійного руху за умови, що на нього не діють інші тіла та поля або їхні дії скомпенсовані, називають **явищем інерції.**

Стан руху і спокою залежить від вибору ***системи відліку (СВ).***



Сила $\vec{F}$ [1 Н] є ***векторною фізичною величиною***, яка є кількісною мірою взаємодії між двома тілами або тілом та полем.
Результатом цієї взаємодії є ***зміна швидкості*** тіла або ***зміна*** його ***форми та розмірів***.

$$\vec{\upsilon} = \text{const}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} = 0$$

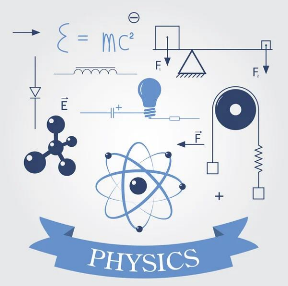
R – рівнодійна, векторна сума сил, що прикладені до тіла

Інерціальна система відліку (ІСВ) є системою відліку, відносно якої тіло рухається рівномірно та прямолінійно, або знаходиться у стані спокою, якщо дія інших тіл на дане тіло скомпенсована.

Неінерціальна система відліку є системою відліку, яка рухається з прискоренням.

Закони *Ньютона* в ***неінерціальних*** системах відліку ***не виконуються.***

Динаміка поступального руху



II закон Ньютона

Прискорення, яке отримує тіло внаслідок дії сили, є прямо пропорційним ***силі***, що діє на нього, та обернено пропорційним ***масі*** цього тіла:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Принцип незалежності дії сил: якщо на тіло діють одночасно декілька сил, кожна з них діє незалежно від інших.
Тоді прискорення, яке визначається за II законом Ньютона, можна записати так:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{R}}{m}$$

Вектор прискорення напрямлений вздовж рівнодійної.

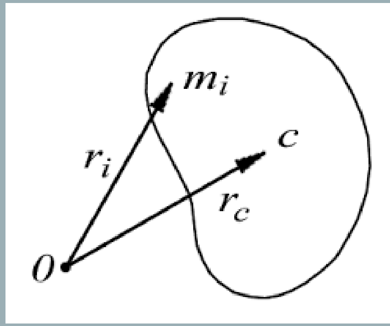
Маса [1 кг], є динамічною характеристикою тіла, яка показує, як тіло може змінювати свою швидкість під дією іншого тіла. Вона є мірою ***інертності тіла***.

В механіці *Ньютона* вважається, що:

- \- маса тіла ***не залежить від швидкості руху***;
- \- маса тіла дорівнює ***сумі мас всіх частинок*** (або МТ), з яких воно складається (***адитивна*** властивість маси);
- \- для даної сукупності тіл виконується ***закон збереження маси*** (при будь-яких процесах, що протікають в системі тіл, її маса залишається незмінною).

Центром мас (центром інерції) системи матеріальних точок (МТ) називається точка, радіус-вектор якої визначається співвідношенням:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$



Де m_i – маса i-ої МТ системи; $\vec{r}_i$ – радіус-вектор цієї МТ; N – кількість МТ даної системи.

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}{m}$$

Динаміка поступального руху

Отримаємо вираз ІІ закону Ньютона у ***диференціальній формі***

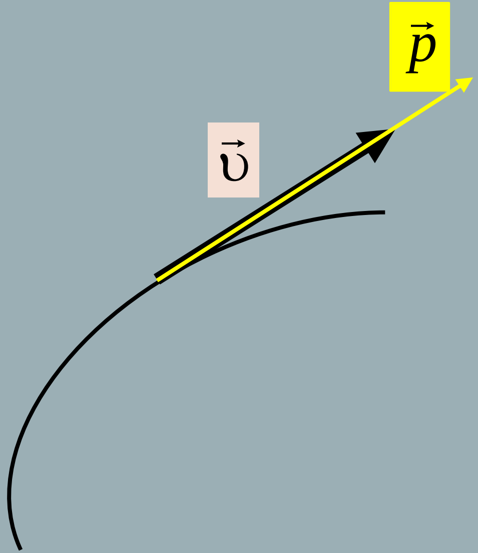
Згадаємо: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$

Покладемо, що маса тіла не змінюється при його русі: $m = \text{const}$

Підставимо: $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}{m}$

Або: $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}$

Введемо позначання: $\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon}}$ $\left[1\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}\right]$



Імпульс тіла є векторною фізичною величиною, яка дорівнює добутку маси тіла на його швидкість.

Напрямок вектора імпульсу тіла співпадає з напрямком вектора лінійної швидкості.

ІІ закон Ньютона (у диференціальній формі)

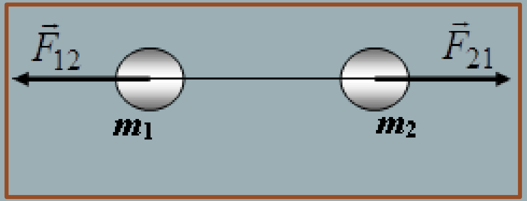
В інерціальних системах відліку похідна імпульсу тіла за часом дорівнює векторній сумі зовнішніх сил, що діють на дане тіло.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ІІ закон Ньютона (в імпульсній формі)

В інерціальних системах відліку зміна імпульсу тіла дорівнює імпульсу зовнішніх сил, що діють на дане тіло.

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot dt = d(m\vec{\upsilon})$$



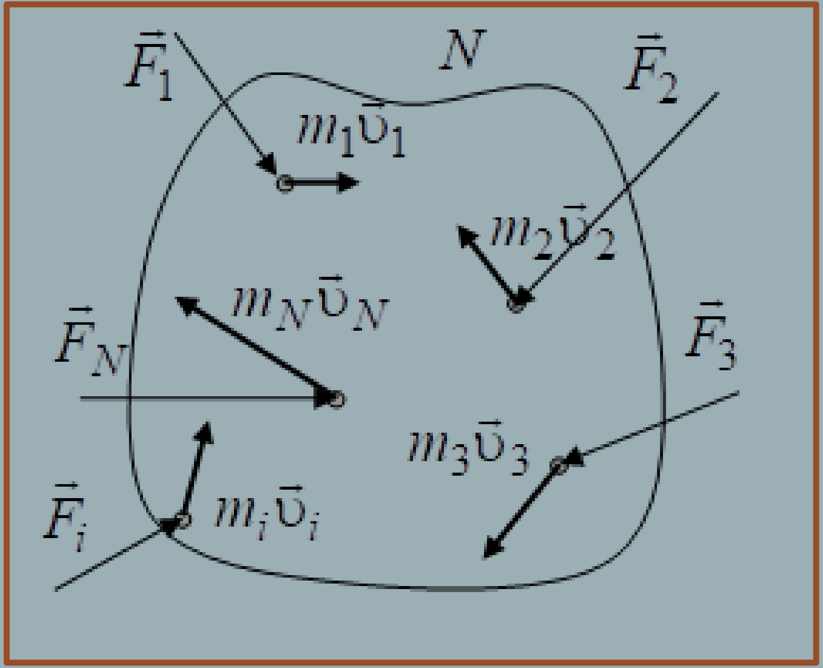
Динаміка поступального руху

III закон Ньютона

Сили, з якими два тіла діють одне на інше, мають ***однакову природу***, є ***рівними за величиною***, ***протилежними за напрямком***, спрямованими ***вздовж однієї прямої***, яка з'єднує ***їх центри*** і прикладаються ***до різних тіл***.

Закон збереження імпульсу тіла. Рух тіл змінної маси

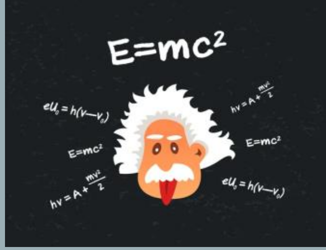
Розглянемо систему N матеріальних точок, маси яких $m_1, m_2, ..., m_N$, що рухаються зі швидкостями $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_N$ та на які діють зовнішні сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N$.



Запишемо II закон *Ньютона* в диференціальній формі для кожної МТ системи

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N} + \vec{F}_1; \\ \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2; \\ \dfrac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \ldots + \vec{f}_{iN} + \vec{F}_i; \\ \ldots \\ \dfrac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \ldots + \vec{f}_{N,N-1} + \vec{F}_N. \end{cases}$$

Закон збереження імпульсу. Рух тіл змінної маси



$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N} + \vec{F}_1; \\ \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2; \\ \dfrac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \ldots + \vec{f}_{iN} + \vec{F}_i; \\ \ldots \\ \dfrac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \ldots + \vec{f}_{N,N-1} + \vec{F}_N. \end{cases}$$

Додамо всі рівняння цієї системи, врахувавши, що за *III законом Ньютона* сума всіх внутрішніх сил буде рівною нулю:

$$[f_{12} + (-f_{21})] + [f_{13} + (-f_{31})] + \ldots.[f_{1N} + (-f_{N1})] = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N$$

В останньому рівнянні сума: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ є векторною сумою всіх ***зовнішніх сил***, що діють на дану систему МТ

Якщо векторна сума ***зовнішніх сил***, що діють на дану систему МТ, дорівнює нулю, таку систему називають *замкненою:* $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$

Тоді: $\dfrac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N) = 0$

Похідна від суми дорівнює нулю за умови, якщо: $\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \text{const}}$

Або: $$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const}}$$

Закон збереження імпульсу:

Сумарний імпульс замкненої системи МТ з часом не змінюється.

Рух тіл змінної маси. Рівняння Мещерського та формула Ціолковського

Рух деяких тіл супроводжується зміною їх маси, наприклад маса ракети зменшується за рахунок витікання газів, що утворюються при згоранні палива.

Застосуємо *II закон Ньютона* до руху ракети.

Якщо в момент часу t маса ракети m, її швидкість $\vec{\upsilon}$, то через деякий час dt її маса зменшується на dm та стане рівною $(m - dm)$, а швидкість буде $(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon})$.

Зміна імпульсу системи за час dt:

$$d\vec{p} = \left[(m - dm)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}) + dm(\vec{\upsilon} + \vec{u})\right] - m\vec{\upsilon},$$

де $\vec{u}$ – швидкість витікання газів відносно ракети.

Тоді:

$$d\vec{p} = m\vec{\upsilon} + m \cdot d\vec{\upsilon} - dm \cdot \vec{\upsilon} - dm \cdot d\vec{\upsilon} + dm \cdot \vec{\upsilon} + dm \cdot \vec{u} - m\vec{\upsilon};$$

в останній формулі $dm \cdot d\vec{\upsilon}$ є малою величиною більшого порядку порівняно з іншими доданками (нею можна знехтувати).

Отже, після скорочень, маємо:

$$d\vec{p} = m \cdot d\vec{\upsilon} + \vec{u} \cdot dm.$$

Якщо на систему діють зовнішні сили, то за *II законом Ньютона*:

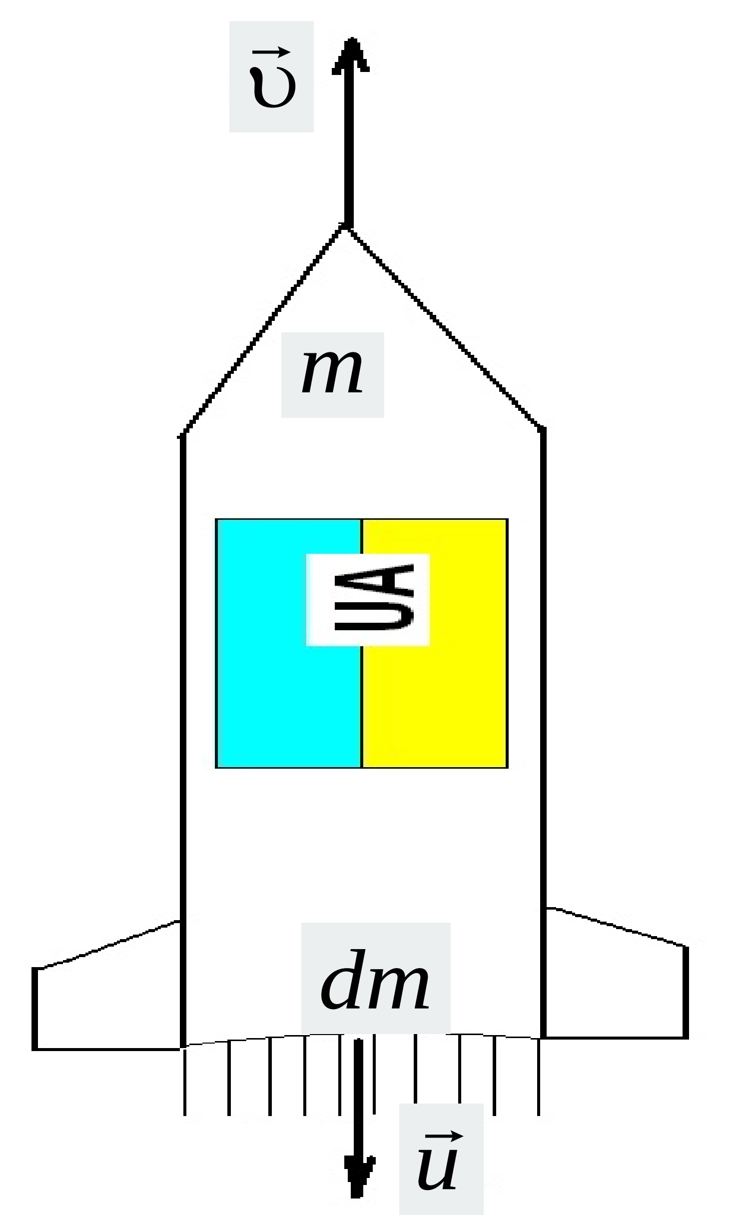
$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$, маємо: $\vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{\upsilon} + \vec{u} \cdot dm$.

Таким чином, ми отримали *рівняння руху тіла змінної маси*, яке вперше було отримано *Мещерським*:

$$\boxed{m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{dm}{dt}}.$$

Член $\vec{F}_p = -\vec{u}\dfrac{dm}{dt}$

в останньому рівнянні називають ***реактивною силою***.



Рух тіл змінної маси. Рівняння Мещерського та формула Ціолковського

Якщо швидкість газів $\vec{u}$ є протилежною швидкості $\vec{\upsilon}$, то ракета прискорюється, а якщо $\vec{u}$ спрямована так само, як і $\vec{\upsilon}$, то ракета гальмує.

Застосуємо рівняння *Мещерського* до прямолінійного руху ракети, на яку не діють зовнішні сили ($F = 0$) та вважаючи, що швидкість газів відносно ракети не змінюється $\vec{u} = const$:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Звідси:

$$\upsilon = -u\int\frac{dm}{m} = -u\ln m + C.$$

Значення сталої інтегрування визначимо з початкових умов. Якщо в початковий момент часу швидкість ракети дорівнює нулю, а її стартова маса m_0, то:

$$C = u\ln m_0.$$

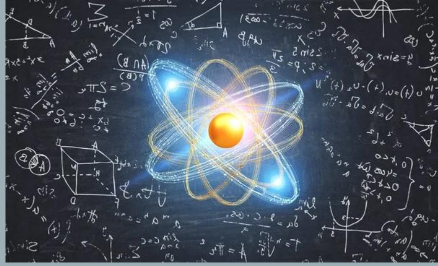
Остаточно отримаємо *формулу Ціолковського*:

$$\boxed{\upsilon = u\ln\frac{m_0}{m}}.$$

Дане співвідношення показує, що:

1) чим більшою є кінцева маса ракети, тим більшою повинна бути стартова маса ракети m_0;
2) чим більшою є швидкість витікання газів u, тим більшою може бути кінцева маса при даній стартовій масі ракети.

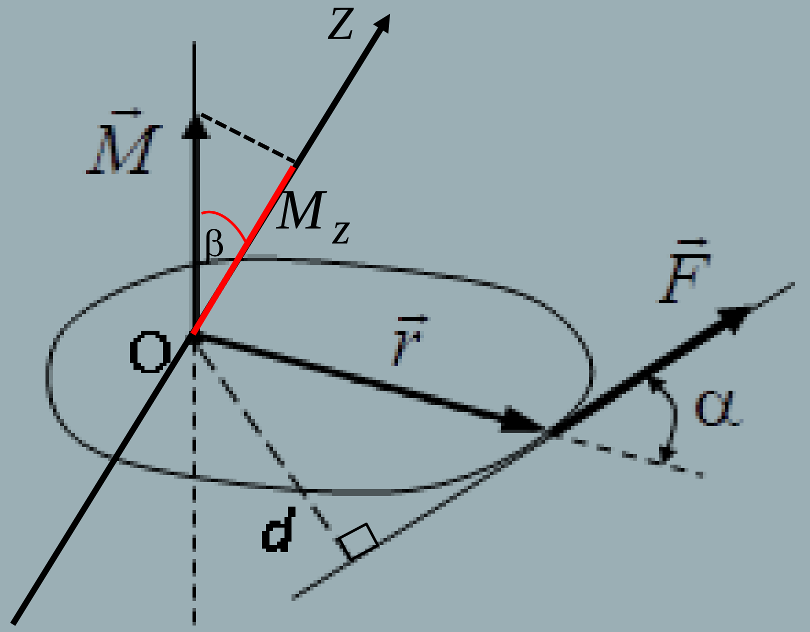
Примітка. Рівняння *Мещерського* та формула *Ціолковського* отримані для нерелятивістського руху, тобто коли швидкість ракети та газів малі порівняно зі швидкістю світла у вакуумі.



Динаміка обертального руху. Момент сили. Момент інерції. Момент імпульсу.

Момент сили відносно точки є ***векторним добутком радіус-вектора сили на силу:***

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] \qquad [1\ \text{Н} \cdot \text{м}]$$



Вектор моменту сили завжди ***спрямовується*** вздовж осі обертання та є перпендикулярним до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ та $\vec{F}$.

Напрям вектора моменту сили знаходиться за правилом правого гвинта.

Модуль моменту сили:

$$M = F \cdot r \sin\alpha$$

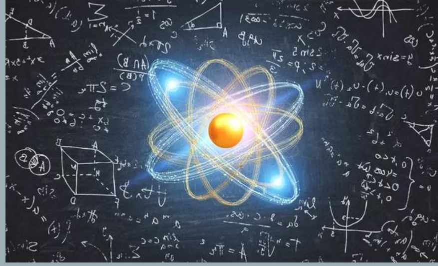
Плече сили - найкоротша відстань від точки обертання до ***лінії дії сили***:

$$r \sin\alpha = d$$

Момент сили відносно осі є скалярною фізичною величиною, яка дорівнює проекції на вісь моменту сили, визначеного відносно довільної точки O даної осі:

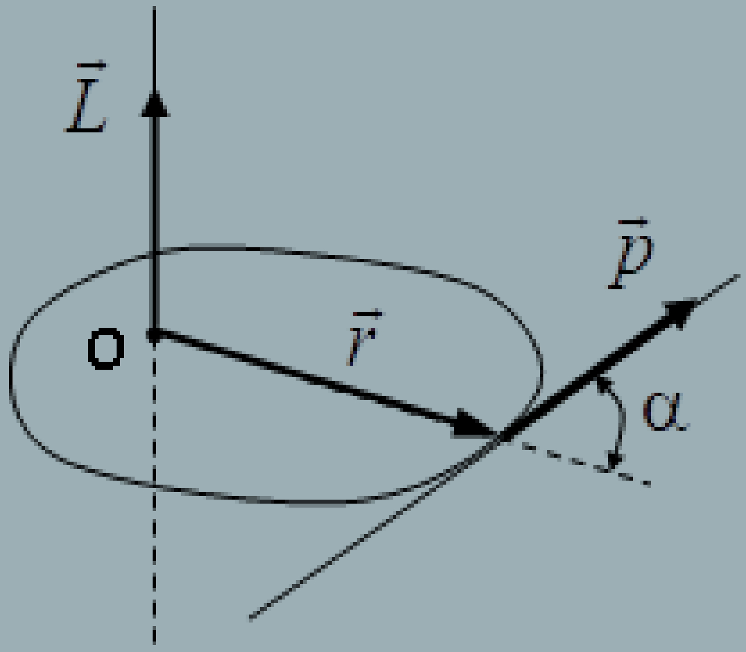
$$M_z = M \cos\beta$$

Динаміка обертального руху. Момент сили. Момент інерції. Момент імпульсу.



Момент імпульсу МТ відносно точки є векторною фізичною величиною, яка дорівнює векторному добутку радіус-вектора імпульсу на імпульс МТ:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times m\vec{\upsilon}] \qquad \left[1\frac{кг \cdot м^2}{с}\right]$$



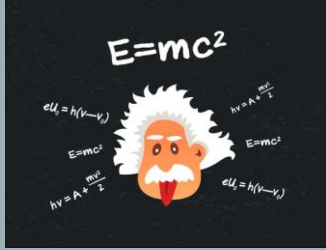
Вектор моменту імпульсу ***спрямований*** вздовж осі обертання та є перпендикулярним до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ та $\vec{p}$.

Напрям вектора моменту сили знаходиться за правилом правого гвинта.

Модуль моменту імпульсу: $L = r \cdot m\upsilon \cdot \sin\alpha$

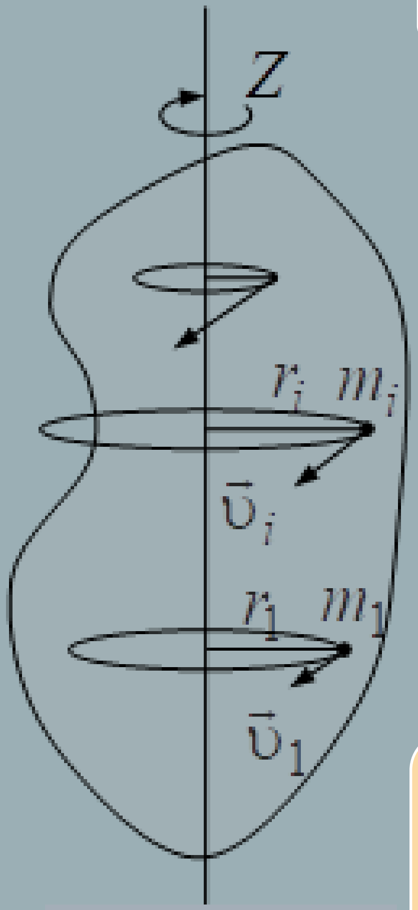
Момент імпульсу відносно осі є скалярною фізичною величиною, яка дорівнює проекції на вісь моменту імпульсу, визначеного відносно довільної точки О даної осі.

Динаміка обертального руху. Момент сили. Момент інерції. Момент імпульсу.



Розглянемо обертальний рух АТТ відносно нерухомої осі Z.

Кожна точка АТТ рухається по колу радіусом r_i з деякою швидкістю υ_i .



Момент імпульсу кожної МТ відносно осі Z:

$$\begin{cases} L_{iz} = r_i \cdot m_i \upsilon_i \\ \upsilon_i = \omega \cdot r_i \end{cases}$$

Тоді:

$$L_{iz} = r_i \cdot m_i \cdot \omega \cdot r_i$$

Або

$$L_{iz} = m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega$$

Введемо позначення ***моменту інерції МТ відносно осі Z:***

$$j_{iz} = m_i \cdot r_i^2 \qquad [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$$

Для всього АТТ ***момент імпульсу:***

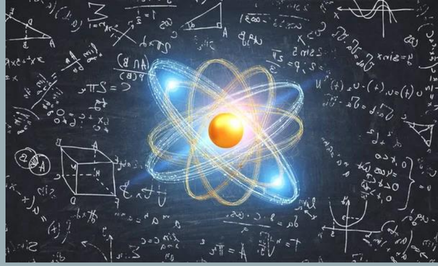
$$\sum_{i=1}^{N} L_{iz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega = \omega \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$$

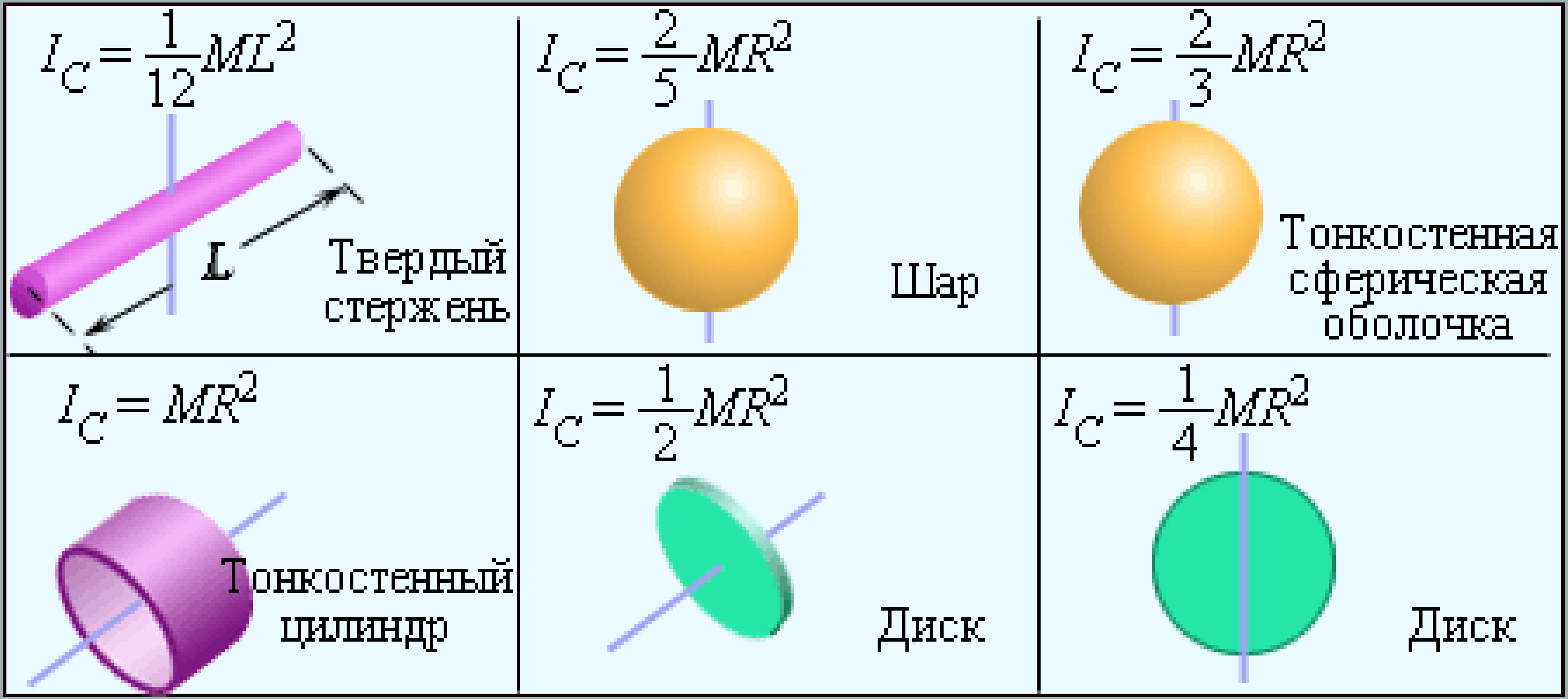
Момент інерції АТТ відносно нерухомої осі є скалярною фізичною величиною, яка дорівнює алгебраїчній сумі добутків мас всіх елементарних точок АТТ на квадрат їх найкоротших відстаней до осі обертання:

$$J_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$$

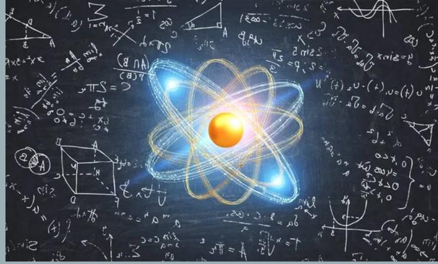
$$J = \int_r r dm$$

Моменти інерції тіл, різної форми





Закон динаміки обертального руху. Закон збереження моменту імпульсу



Момент імпульсу АТТ:

$$\sum_{i=1}^{N} L_{iz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega = \omega \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$$

$$J_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$$

Оскільки всі точки АТТ при обертанні ***мають однакову кутову швидкість***, то момент імпульсу та момент інерції АТТ пов'язані співвідношенням:

$$\boxed{\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}}$$

Напишемо ***II закон Ньютона в диференціальній формі*** та помножимо праву та ліву частину на радіус-вектор:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} [\vec{r} \times \vec{F}_i] = \frac{d[\vec{r} \times \vec{p}]}{dt} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Закон динаміки обертального руху в диференціальній формі:
Відносно ІСВ (інерціальних систем відліку) зміна моменту імпульсу АТТ дорівнює векторній сумі моментів зовнішніх сил, які діють на це тіло.

Враховуючи формулу зв'язку моменту імпульсу та кутової швидкості при $J = \text{const}$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(J \cdot \vec{\omega})}{dt} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow$$

Закон динаміки обертального руху в інтегральній формі формі:
Відносно ІСВ кутове прискорення АТТ дорівнює векторній сумі моментів зовнішніх сил, які діють на це тіло та обернено пропорційне до моменту інерції АТТ:

$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i}{J}.}$$

Закон збереження моменту імпульсу.

Для ***замкнених систем*** сума моментів зовнішніх сил, що діють на тіло, дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \text{const}}$$

або

$$\boxed{J \cdot \vec{\omega} = \text{const}}$$

В замкненій системі момент імпульсу залишається сталим при будь-якій взаємодії тіл цієї системи між собою.

Лекція закінчена

Дякую за увагу