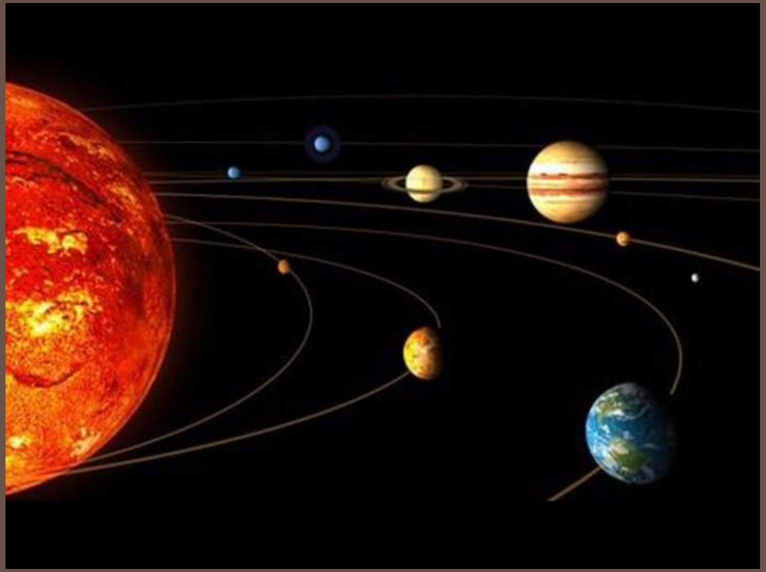
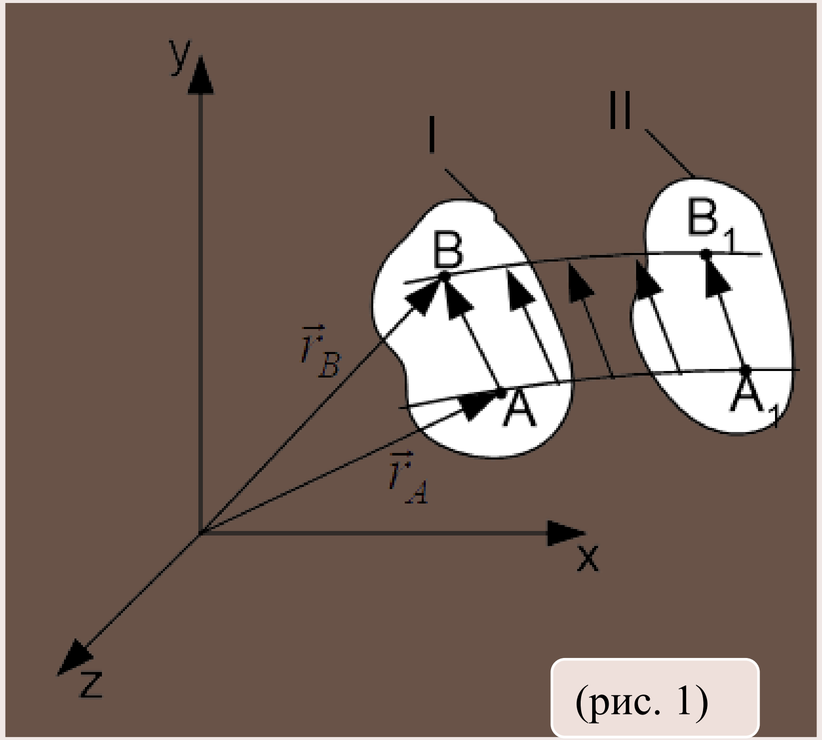
ЛЕКЦІЯ 3. ЕЛЕМЕНТИ КІНЕМАТИКИ

- Поступальний та обертальний рух
- Рух точки по колу
- Кінематичні характеристики руху по колу
- Зв’язок кутових та лінійних величин
- Рівняння руху точки по колу

Поступальний та обертальний рух

Поступальний рух є рухом АТТ (рис. 1), при якому всі точки тіла описують паралельні траєкторії та мають однакові швидкість та прискорення в даний момент часу. Тому рух АТТ можна розглядати як рух МТ.

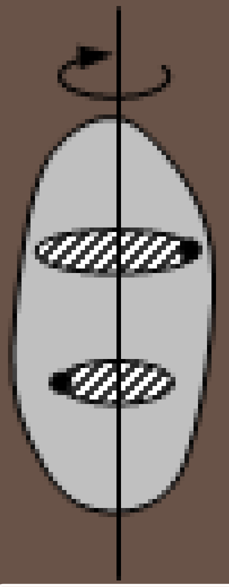




(рис. 1)

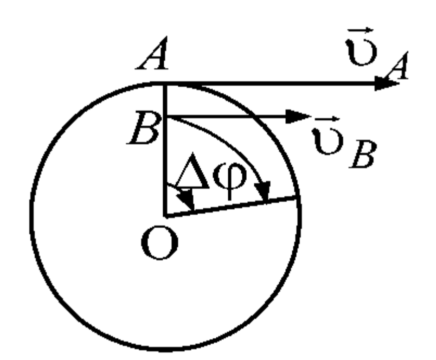
Обертальний рух є рухом АТТ (рис. 2.4), при якому всі точки тіла описують траєкторії у вигляді кола, центри яких лежать на прямій, яка називається віссю обертання.

Площини, в яких знаходяться кола, є паралельними між собою та перпендикулярними до осі обертання.



(рис. 2)

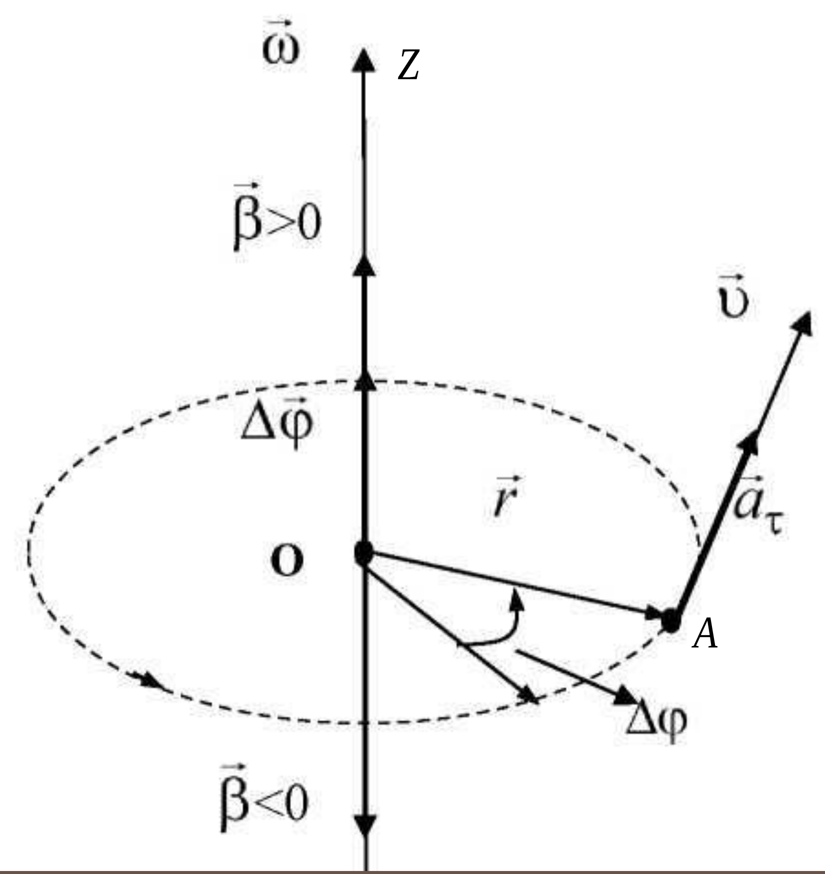
Рух точки по колу, кутова швидкість та кутове прискорення



Рух по колу – це рух, при якому вектор швидкості весь час ***змінює свій напрям*** та може змінюватися ***за модулем***.

Коли обертається кілька жорстко зв'язаних точок, наприклад A і B (рис), то вони мають ***різні лінійні швидкості***, але всі точки за проміжок часу Δt зміщуються на той самий кут $\Delta\varphi$.

Тому в цілому їхній рух **визначають *вектором кутового переміщення*** $\Delta\vec{\varphi}$ (аналогічним вектору переміщення $\Delta\vec{r}$ у поступальному русі тіла).



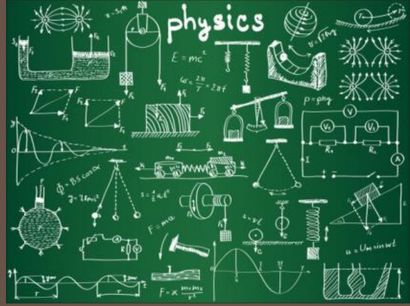
Проте, на відміну від векторів переміщення, швидкості, прискорення й інших істинних (полярних) векторів, напрями яких очевидні, напрям вектора кутового переміщення ***пов'язується із напрямком обертання***, а отже, такий вектор **є *аксіальним, або псевдовектором***

Вектор кутового переміщення $\Delta\vec{\varphi}$ ***є вектором, модуль якого дорівнює куту повороту*** $\Delta\varphi$ ***радіус-вектора*** $\vec{r}$**.**

Спрямований він вздовж осі обертання в бік, що визначається ***правилом правого свердлика:***

напрям вектора кутового переміщення має збігатися ***з поступальним рухом гвинта***, якщо його головку повертати в напрямі обертання тіла.

Рух точки по колу, кутова швидкість та кутове прискорення



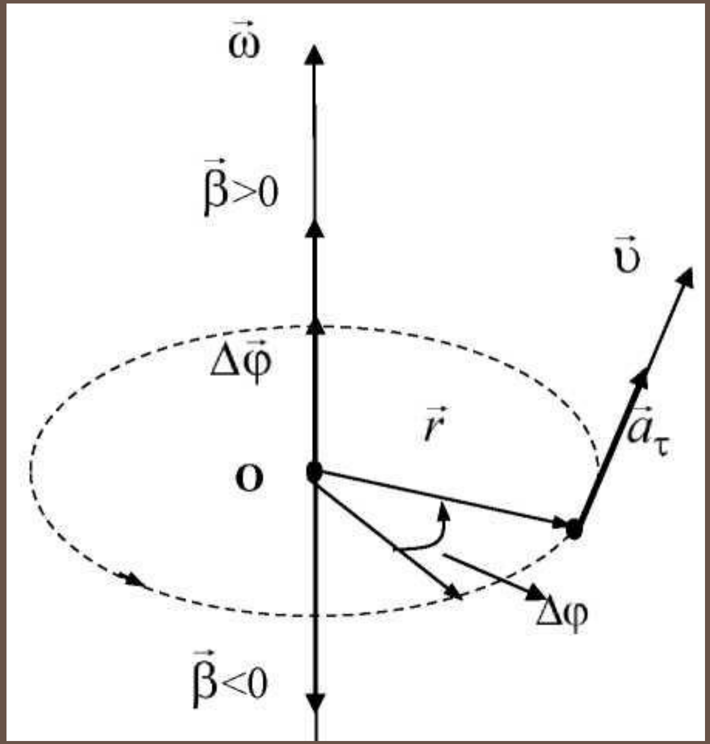
Кутова швидкість – векторна фізична величина $\vec{\omega}$, що дорівнює ***першій похідній*** кута повороту $\Delta\vec{\varphi}$ радіус-вектора $\vec{r}$ точки за часом:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad [1 \text{ рад / с}]$$

Кутове прискорення є векторною фізичною величиною $\vec{\beta}$, що дорівнює ***першій похідній*** кутової швидкості за часом та другій похідній кута повороту радіус-вектора за часом:

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}, \quad \left[1 \text{ рад / с}^2\right]$$

Вектори кутової швидкості $\vec{\omega}$ та кутового прискорення $\vec{\beta}$ є також ***аксіальними,*** тобто ***спрямованими вздовж осі***, їхній напрям визначається за ***правилом правого гвинта (або правої трійки векторів)***

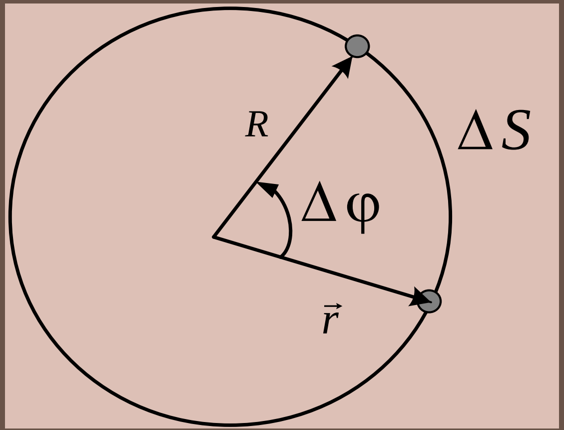


Зазначимо, що ***напрям кутового прискорення збігається з напрямом кутової швидкості***, якщо модуль кутової швидкості ***зростає*** з часом.

Кутове прискорення спрямоване ***у протилежному напрямку*** до вектору кутової швидкості, якщо модуль кутової швидкості ***зменшується*** з часом.

Зв’язок кутових та лінійних величин

Нехай матеріальна точка пройшла за час Δt по колу з радіусом R шлях ΔS, то радіус-вектор повернувся на кут $\Delta\varphi$.



Якщо довжина шляху:

$$\Delta S = R \cdot \Delta\varphi$$

то лінійна швидкість:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t}$$

оскільки R = const, то

$$\upsilon = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt}$$

Отже, ***зв’язок лінійної та кутової швидкості***:

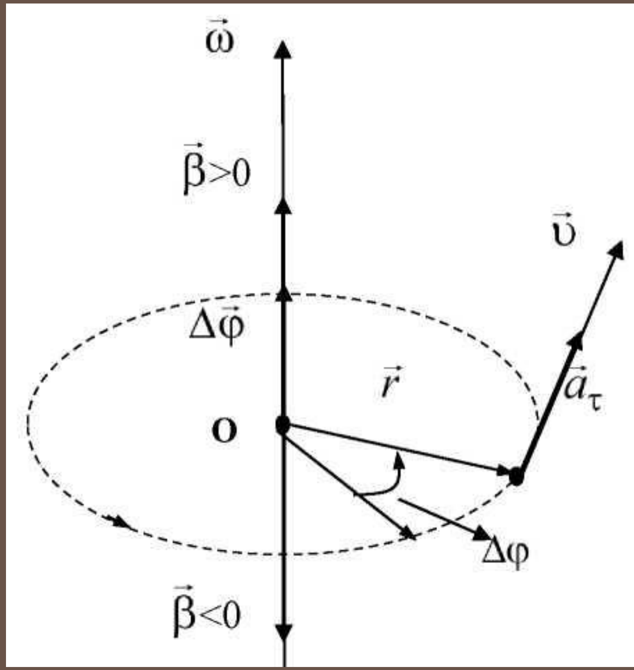
$$\upsilon = \omega \cdot R$$

Співвідношення цих векторів виражається ***векторним добутком:***

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]$$

Модуль векторного добутку:

$$\upsilon = \omega \cdot r \cdot \sin(\vec{\omega};\vec{r})$$



Лінійна швидкість – це вектор, спрямований перпендикулярно до кутової швидкості та радіуса-ректору у той бік, в який поступально переміщується гвинт, коли його головка робить найкоротший поворот від $\vec{\omega}$ до $\vec{r}$.

Зв'язок кутових та лінійних величин

Продиференціюємо формулу зв'язку лінійної та кутової швидкості за часом:

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right] \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right] \Rightarrow \vec{a} = \left[\vec{\beta} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}\right]$$

Перший доданок напрямлений по дотичній до траєкторії і є ***тангенціальним прискоренням:***

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\beta} \times \vec{r}\right]$$

Другий доданок у формулі *є* ***нормальним прискоренням***, яке напрямлене вздовж радіуса до центра обертання:

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}\right] = \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]\right]$$

Модуль *тангенціального прискорення*:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_\tau = \beta \cdot R$$

Модуль *нормального прискорення*:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} \Rightarrow a_n = \omega^2 R$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$$

Період та частота при обертальному русі

Для руху по колу вводять поняття періоду та частоти обертання

Період є часом, за який МТ здійснює один повний оберт, тобто радіус-вектор точки повертається на кут 2π.
Тоді у випадку рівномірного руху:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Частота є кількістю обертів dN, що здійснює матеріальна точка за час ***dt***:

$$\nu = \frac{dN}{dt}$$

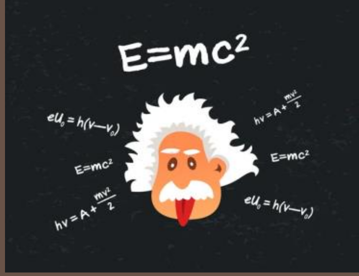
Тоді у випадку рівномірного руху за один повний оберт:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Одиниці вимірювання частоти:

$$\nu = \left[1\frac{1}{c}\right] = \left[1 \text{ Гц}\right]$$

Кінематичне рівняння руху обертального руху



Отримаємо для рівнозмінного (β = const) обертального руху формули визначення кутової швидкості та кінематичне рівняння руху.

Оскільки кутова швидкість: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, то $d\vec{\varphi} = \vec{\omega}dt \quad (1)$

В свою чергу кутове прискорення: $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ $\Rightarrow$ $d\vec{\omega} = \vec{\beta}dt$

Візьмемо інтеграл: $\int\limits_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}} d\vec{\omega} = \int\limits_0^t \vec{\beta}dt$ $\Rightarrow$ $\vec{\omega} - \vec{\omega}_0 = \vec{\beta}t$

Тоді рівняння кутової швидкості при рівнозмінному обертальному русі: $\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\beta}t}$

Підставимо останній вираз у формулу (1): $\int\limits_{\vec{\varphi}_0}^{\vec{\varphi}} d\vec{\varphi} = \int\limits_0^t \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\beta}t\right)dt$ $\Rightarrow$ $\int\limits_{\vec{\varphi}_0}^{\vec{\varphi}} d\vec{\varphi} = \int\limits_0^t \vec{\omega}_0 dt + \int\limits_0^t \vec{\beta}tdt$ $\Rightarrow$ $\int\limits_{\vec{\varphi}_0}^{\vec{\varphi}} d\vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 \int\limits_0^t dt + \vec{\beta}\int\limits_0^t tdt$

Тоді кінематичне рівняння руху при рівнозмінному обертальному русі: $\boxed{\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}t + \frac{\vec{\beta}t^2}{2}}$

Лекція закінчена

Дякую за увагу