ЛЕКЦІЯ 2 ЕЛЕМЕНТИ КІНЕМАТИКИ

- Механічний рух
- Векторний спосіб опису руху
- Кінематичні характеристики руху
- Кінематичне рівняння руху
- Координатний спосіб опису руху

Механічний рух

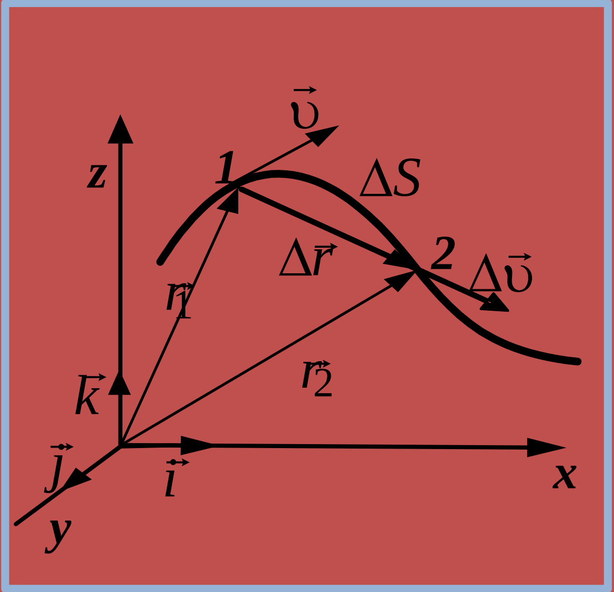
Механічним рухом тіла називається зміна положення тіла (або частин тіла) в просторі відносно інших тіл з часом.

Основною задачею кінематики є визначення положення тіла (або частин тіла) у просторі відносно інших тіл у даний момент часу.

Векторний спосіб опису руху

За цим способом положення точки у просторі визначається ***радіус-вектором*** $\vec{r}$: який з'єднує початок координат з точкою простору, в якій знаходиться матеріальна точка.

Залежність радіус-вектора $\vec{r}$: точки від часу називається ***кінематичним рівнянням руху.***



Лінія, яку описує кінець радіус-вектора разом із матеріальною точкою у просторі, називається ***траєкторією руху.***

Залежно від форми траєкторії розрізняють ***прямолінійний*** та ***криволінійний*** рух

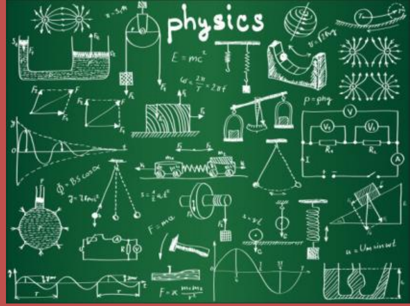
Сумарна довжина елементів траєкторії, пройдена точкою за певний проміжок часу, називається ***шляхом*** ΔS.

Рух точки за час Δt визначається ***вектором переміщення***

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Вектор переміщення чисельно дорівнює довжині відрізка прямої, що сполучає початкове і кінцеве положення точки

Кінематичні характеристики руху



1. Найважливіша кінематична характеристика руху – ***швидкість***

Середня швидкість є векторною фізичною величиною, яка дорівнює відношенню вектора переміщення до часу, за який це переміщення відбулося

$$\vec{\upsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Якщо визначити швидкість у даний момент часу, тобто взяти границю від $\vec{\upsilon}_{ср}$ за умови $\Delta t \to 0$, то будемо мати ***миттєву швидкість***

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\upsilon}_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Оскільки рух тіла можна уявити як сукупність його миттєвого перебування в послідовних точках траєкторії, ***миттєва швидкість характеризує швидкість тіла в кожний момент часу або в кожній точці його траєкторії та завжди спрямована вздовж дотичної до точки траєкторії***

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Таким чином, ***миттєва швидкість – це похідна від радіус-вектора за часом***

При зменшенні Δt шлях ΔS буде наближатись до $|\Delta\vec{r}|$, тоді модуль миттєвої швидкості буде:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}, \ [м/с].$$

Кінематичні характеристики руху

2. Друга кінематична характеристика руху – ***прискорення***

Прискорення – векторна фізична величина, яка показує зміну швидкості за одиницю часу

Середнє прискорення є відношенням вектора зміни швидкості до відповідного проміжку часу

Середнє прискорення:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}\ .$$

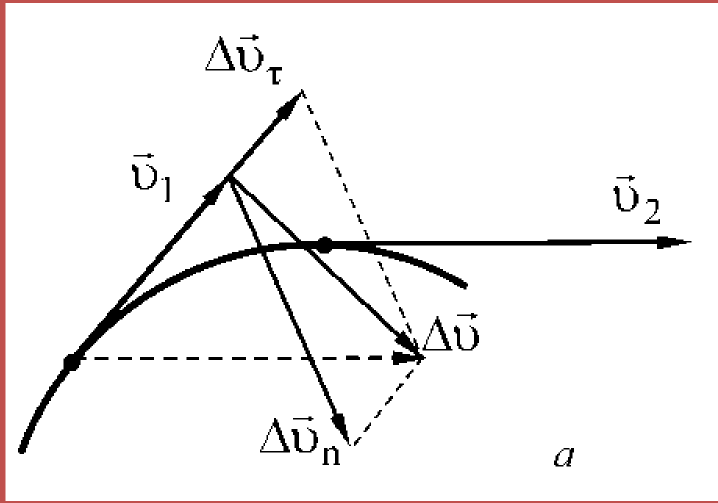
У певний момент часу або в заданій точці траєкторії маємо ***миттєве прискорення,*** яке є ***межею*** відношення вектора зміни швидкості до відповідного проміжку часу

Миттєве прискорення:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}\ , \lfloor м/c^2 \rfloor.$$

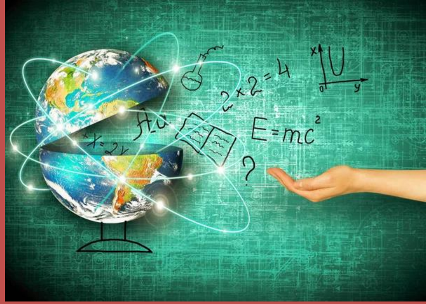
Таким чином***, прискорення є першою похідною від швидкості тіла за часом, або друга похідна від радіус-вектору за часом***

У випадку криволінійного руху швидкість може змінюватись не тільки ***за величиною***, а й ***за напрямком (рис.а)***:



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t}$$

Кінематичні характеристики руху



Перший доданок називається ***тангенціальним прискоренням***, яке характеризує зміну швидкості за величиною (рис.*б*) і визначається за формулою:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$$

Другий доданок є *нормальним прискоренням*, яке характеризує зміну швидкості за напрямком (рис.*б*) і визначається за формулою:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$$

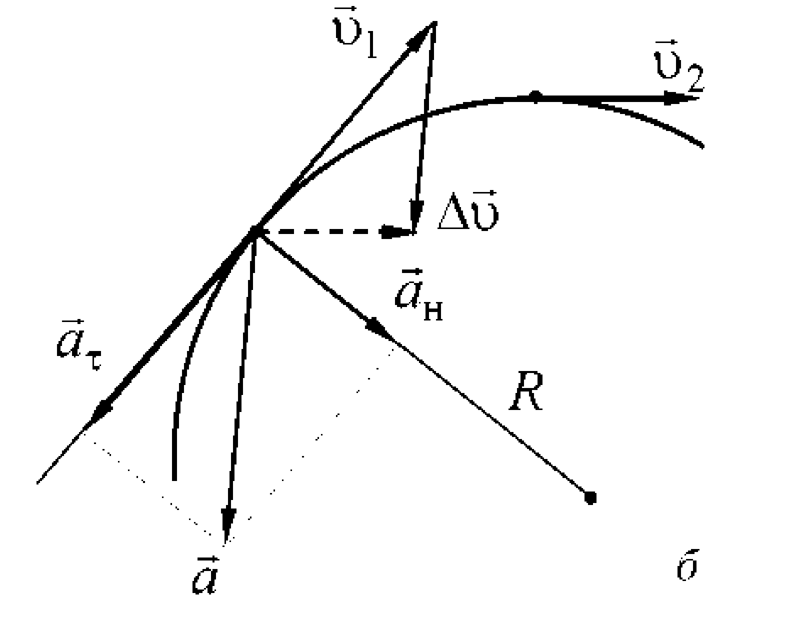
де *R* - радіус кривизни траєкторії

Повне прискорення $\vec{a}$ є векторною сумою тангенціального і нормального прискорень, а модуль його визначається за теоремою *Піфагора:*

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Модуль повного прискорення:

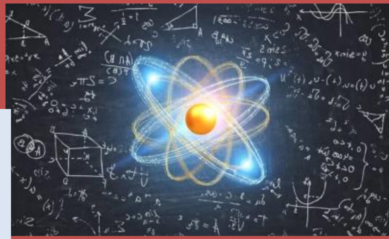
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



Тангенціальне і нормальне прискорення можуть бути використані для класифікації різних рухів:

- рівнозмінний рух $a_\tau = \text{const}$
- рівномірний криволінійний рух $a_\tau = 0,\ a_n \neq 0$
- рівномірний рух по колу $a_\tau = 0;\ a_n = \text{const}$

Кінематичне рівняння руху



Кінематичне рівняння руху - це формула, якою подається однозначний зв'язок між радіусом-вектором та часом.

У векторній формі рівняння руху матеріальної точки (АТТ) має вираз: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Знаючи кінематичне рівняння руху, можна простим диференціюванням за часом знайти швидкість і прискорення в будь-який момент часу (так звана ***пряма задача кінематики***).

Навпаки, знаючи прискорення точки, а також початкові умови, тобто положення і швидкість в початковий момент часу, можна знайти траєкторію руху точки (***обернена задача кінематики***).

Оскільки: $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$ та $d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt$

Інтегруванням маємо: $\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{a}dt$ $\quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}dt$

Наприклад, для рівнозмінного руху, при якому a_τ = const

$\vec{\upsilon} = \vec{a}\int_{t_0}^t dt$ за умови $t_0 = 0$ Рівняння швидкості: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a} \cdot t$

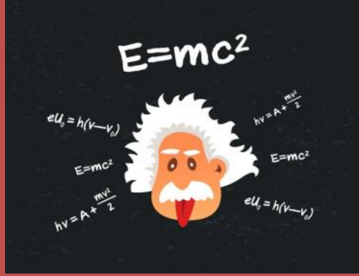
Кінематичне рівняння руху

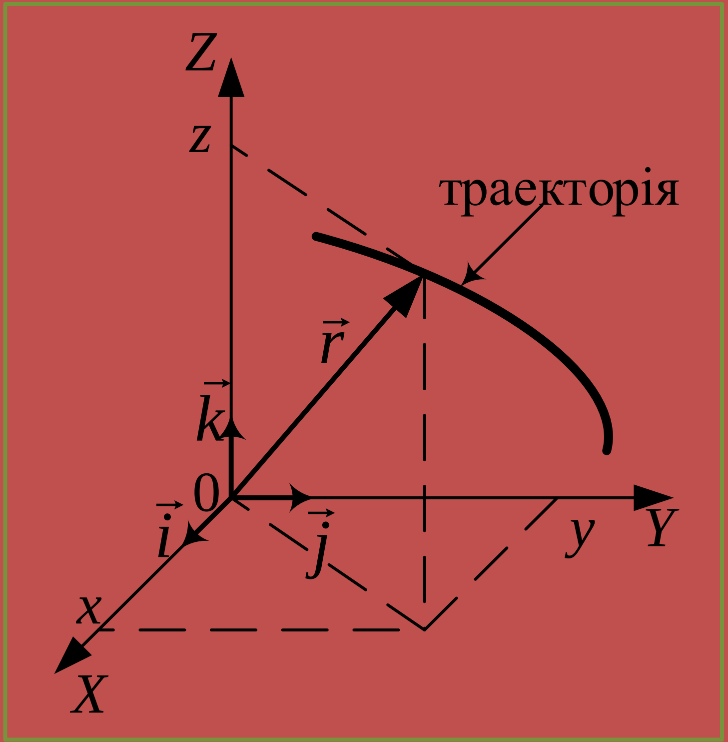
$d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt = \vec{\upsilon}_0 \cdot dt + \vec{a} \cdot tdt$ → $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{\upsilon}dt = \int_0^t \vec{\upsilon}_0 \cdot dt + \int_0^t \vec{a} \cdot tdt$

→ $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2}$

Координатний спосіб опису руху

Якщо з тілом відліку жорстко пов'язати яку-небудь координатну систему (наприклад, декартову), то ***положення*** точки в будь-який момент часу визначається трьома її ***координатами: x, y, z.***





Радіус-вектор можна задати через координати точки:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ – *орти* (одиничні вектори, спрямовані вздовж відповідних координатних осей).

Проектуючи радіус-вектор на координатні осі, отримаємо три залежності координат точки від часу, які є ***кінематичними рівняннями руху в координатній формі***:

$$r_x = x = f_1(t)$$
$$r_y = y = f_2(t)$$
$$r_z = z = f_3(t)$$

Ці рівняння по суті є рівнянням траєкторії у ***параметричній формі.***

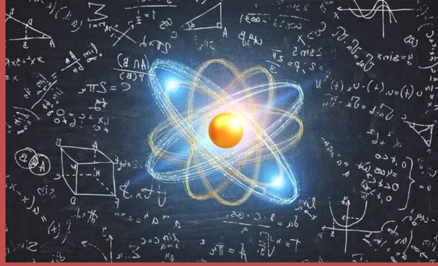
Щоб знайти ***рівняння траєкторії*** у явному вигляді, треба у системі вилучити час (тобто знайти зв'язок між координатами в довільний момент часу)

Звідси випливає ***принцип незалежності рухів***:

- довільний рух точки можна розглядати як суму незалежних рухів по координатних осях ***x, y, z;***
- траєкторією руху точки є *годограф* радіус-вектора (крива, яку описує кінець вектора на рисунку. Система рівнянь і є рівнянням годографа;
- вектор переміщення виражається через відповідні зміни координат рухомої точки, тобто:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

Координатний спосіб опису руху



Вектори швидкості та прискорення можуть бути вираженими у проекціях на координатні осі:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}; \qquad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

де проекції швидкості і прискорення точки на координатні осі:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt};$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

а модулі векторів знаходять за формулою:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} \quad \text{та} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Елементарний пройдений шлях за координатно заданого руху:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ або } \quad dS = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Звідси увесь шлях знайдемо способом інтегрування:

$$S = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt + C,$$

де константа C визначається за початковими умовами.

Таким чином, **у кінематиці розв’язують задачі двох типів**:

1. На знаходження прискорення, коли відомо функції - $x = f_1(t)$ $y = f_2(t)$ $z = f_3(t)$;
2. На визначення цих функцій, коли відомі прискорення.

Задачі першого типу розв’язують методом диференціювання, другого – методом інтегрування.

Лекція закінчена

Дякую за увагу