

4.2

4.2.1

- Рівняння незгасаючих гармонічних коливань та їхні характеристики

4.2.2

- Згасаючі коливання. Характеристики згасаючих коливань

4.2.3

- Вимушені коливання. Резонанс

4.2.4

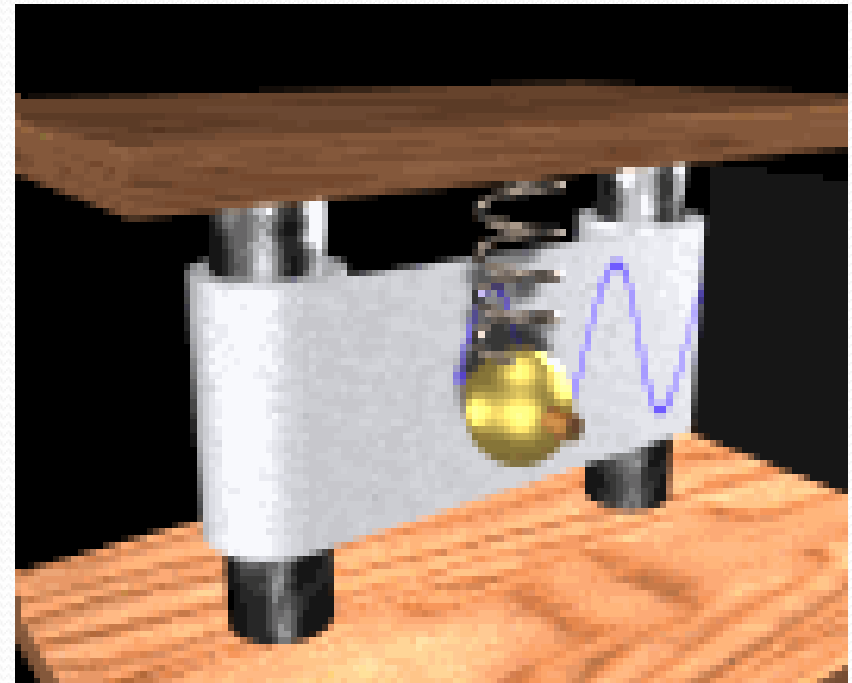
- Автоколивання та автоколивальні системи

4.2.5

- Додавання коливань. Биття. Фігури Ліссажу

гармонічне коливання пружинного маятника

Слід, що залишається на рухомій стрічці має форму синусоїди



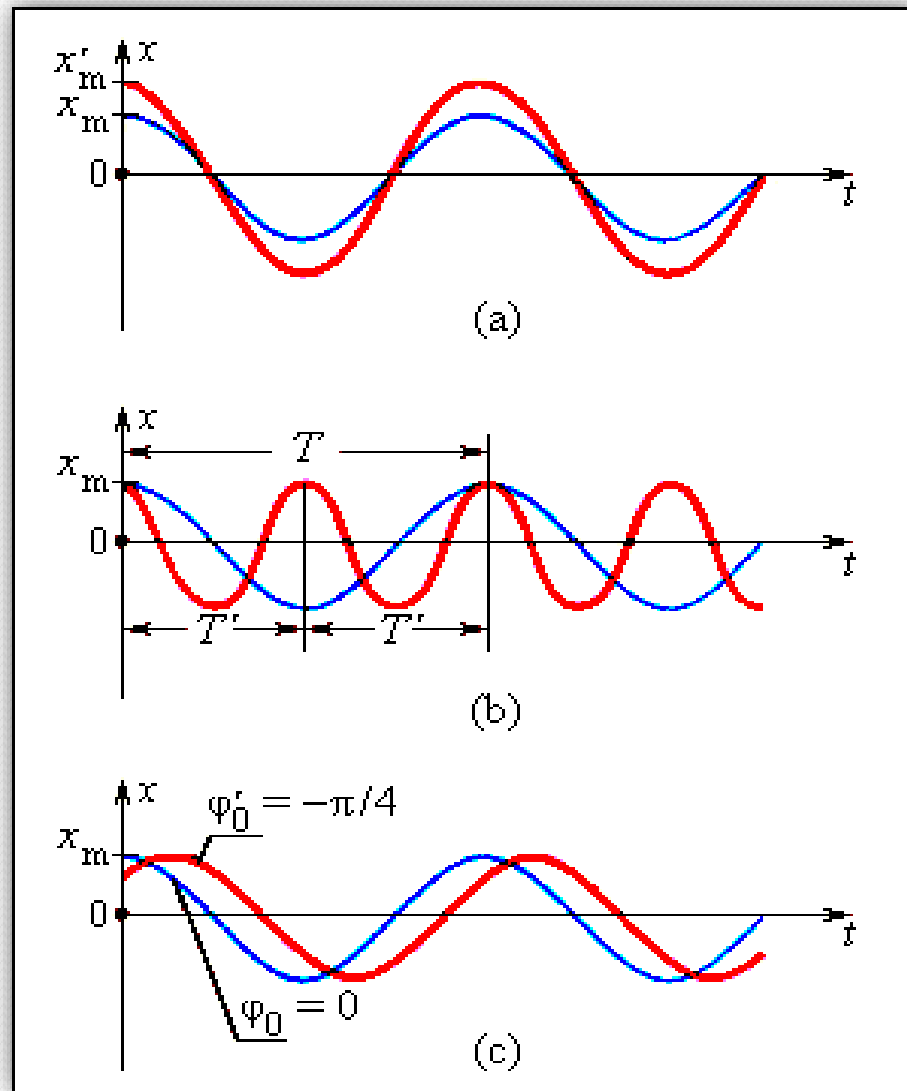
4.2.1. Рівняння незгасаючих гармонічних коливань та їхні характеристики

Розв'язками однорідного диференціального рівняння повних похідних другого порядку із сталими коефіцієнтами є *рівняння гармонічних коливань*

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega_0^2 S = 0$$

$$S = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$S = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$



Характеристики гармонічних коливань

$$S = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Коливна фізична величина S (може бути координата, заряд, швидкість, сила струму...)

Амплітуда (A) – максимальне значення коливної фізичної величини

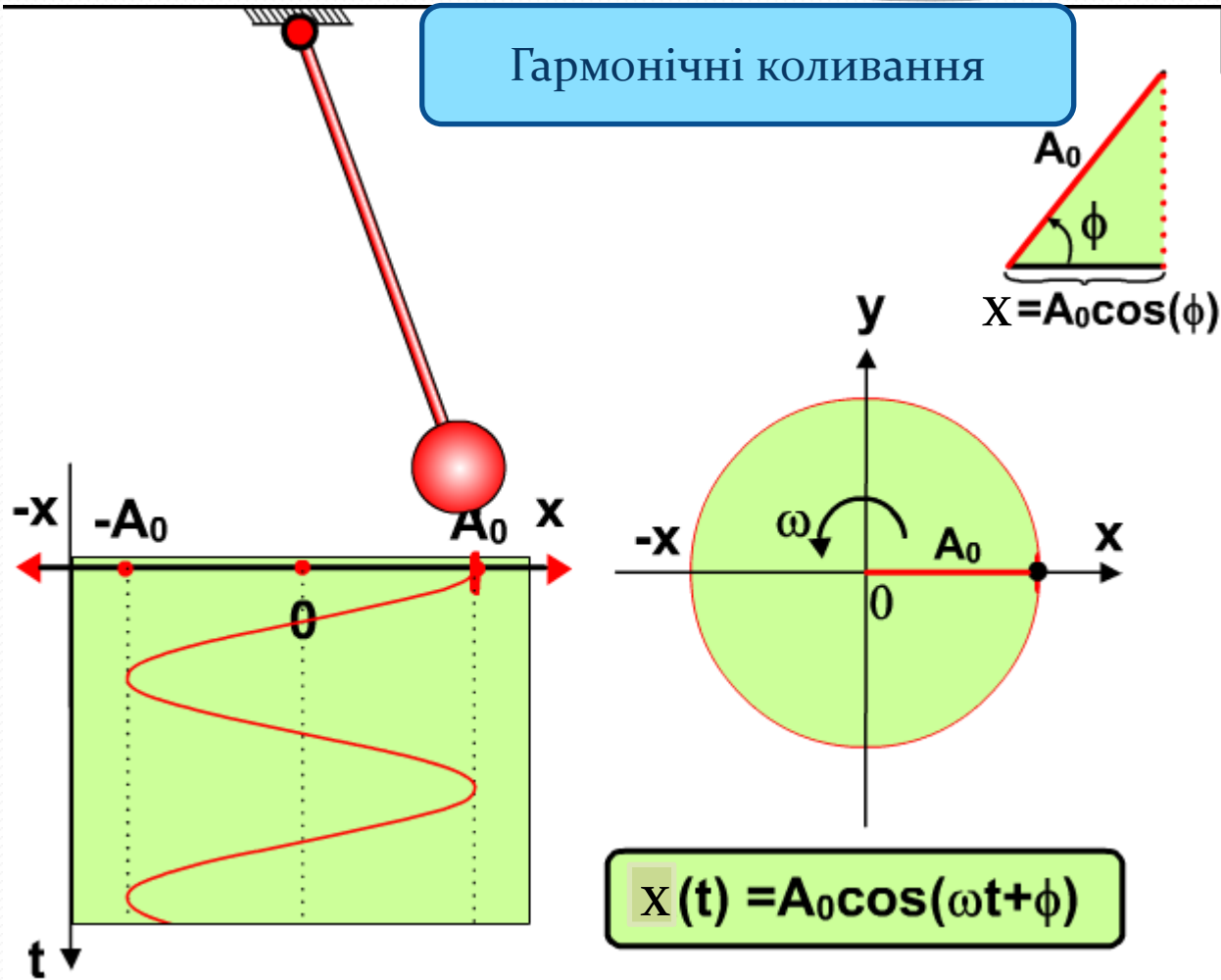
Період ($T=1/\nu$) – час одного повного коливання [1 с]

Циклічна частота ($\omega=2\pi\nu$) – чисельно дорівнює числу циклів (коливань, обертів) за 2π секунд [1 рад/с]

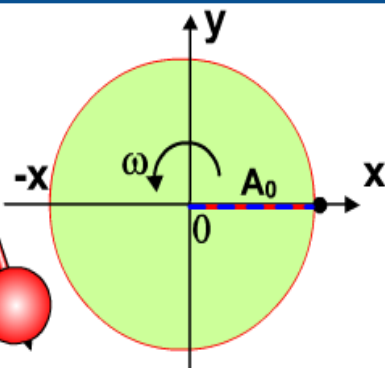
Фаза коливань – аргумент косинуса або синуса, що визначає значення коливної фізичної величини в даний момент часу [1 рад]
 $(\varphi = \omega t + \varphi_0)$

Початкова фаза коливань – значення фази коливань у початковий момент часу [1 рад]
 (φ_0)

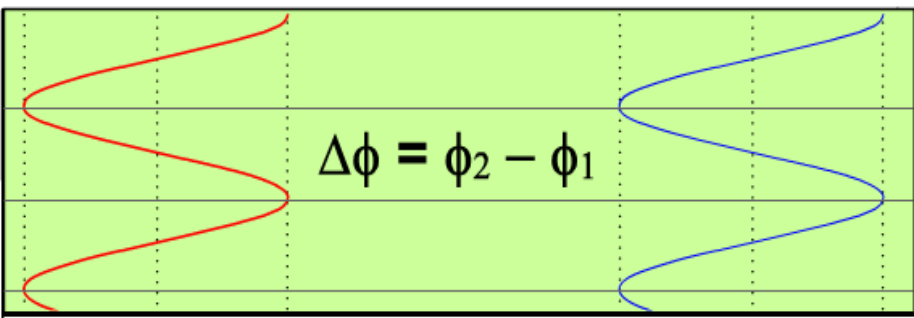
Гармонічні коливання



Гармонічні
коливання

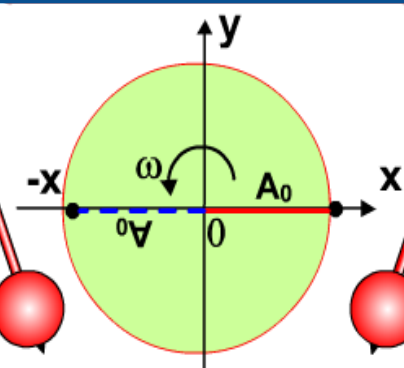


?

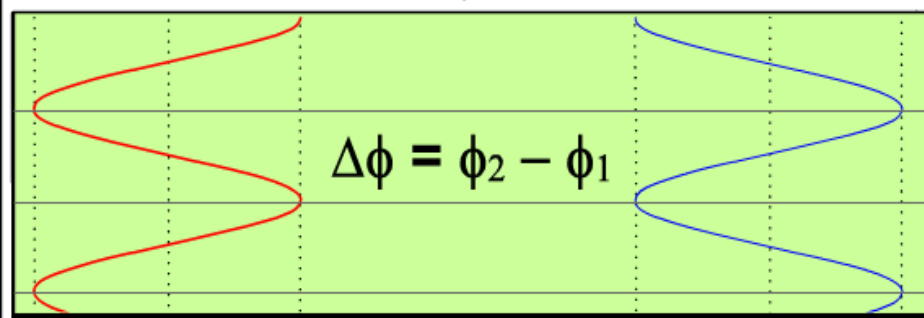


Коливання
відбуваються «у фазі»

Гармонічні
коливання



?

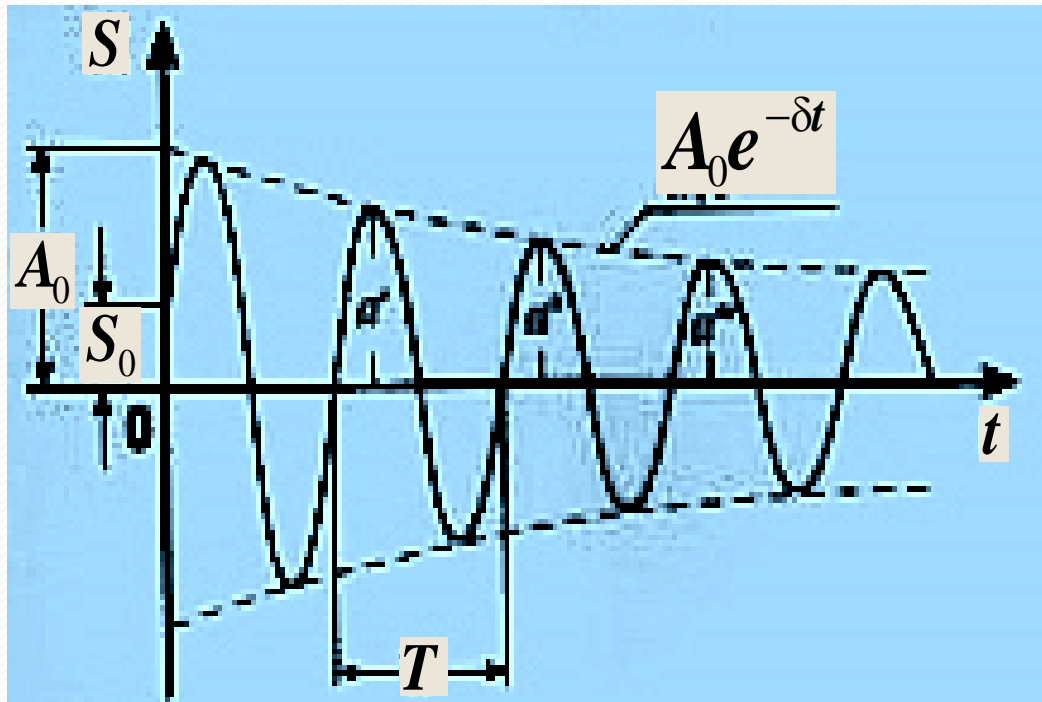


Коливання відбуваються
«у проти фазі»

4.2.2. Рівняння згасаючих гармонічних коливань та характеристики згасання

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2\delta \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0$$

$$S = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$



1. T - період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$$

2. δ - коефіцієнт згасання

$$\delta = \frac{1}{t} \ln \frac{A_0}{A}$$

3. χ - логарифмічний декремент згасання

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta \cdot T = \frac{1}{N_e}$$

4.2.3. Рівняння вимушених гармонічних коливань та їхні характеристики

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2\delta \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = f_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Амплітуда встановлених коливань

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

$$S = S_1(t) + S_2(t)$$

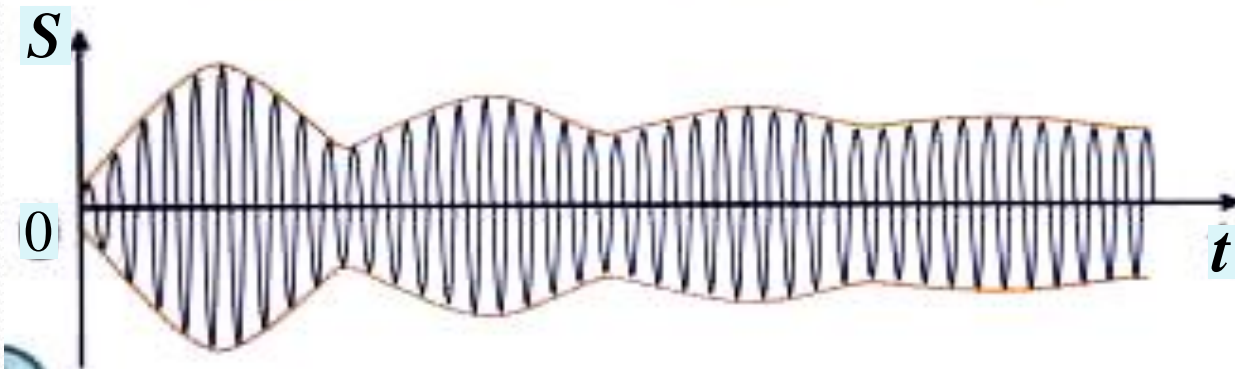
Зсув фаз встановлених коливань

$$S_1(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$S_2(t) = A \sin(\omega t - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Рис. Встановлення коливань



Резонанс

$$\delta = \frac{r}{2m}$$

$$\delta = \frac{r}{2J}$$

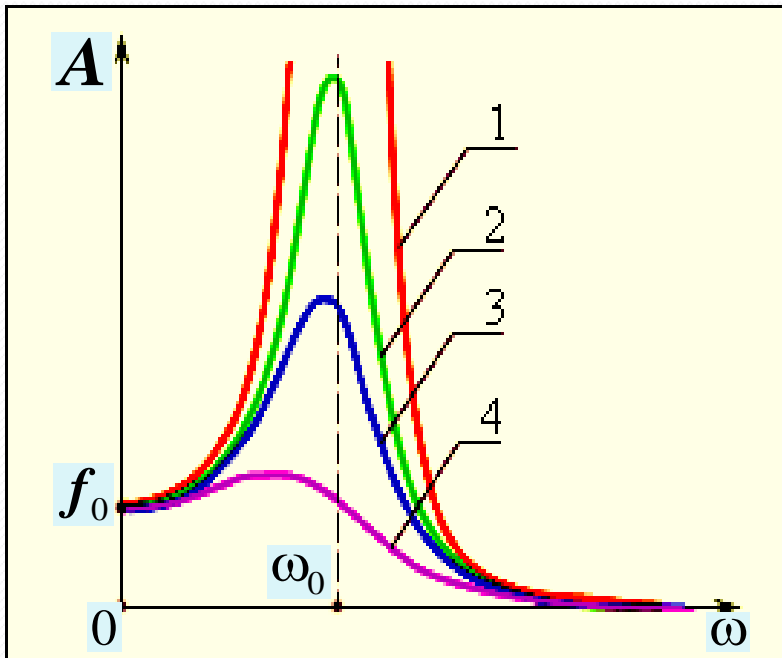
$$\delta = \frac{R}{2L}$$

Резонансна частота

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Резонансна амплітуда

$$A_p = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$



Резонансні криві

- 1 – коливання без опору
2, 3, 4 – реальні коливання при
 $\delta_2 < \delta_3 < \delta_4$





Шкідливість та користь резонансу

<http://gilerarunner.ru/index.php/tuning/advice/item/saks>

Використання

- Розчинення порошків у рідині (утворення емульсій)
- Резонансні замки та ключі
- Розгойдування язичка дзвону
- Резонатори музичних інструментів
- Магніто-резонансне дослідження організмів
- Розгойдування гойдалки

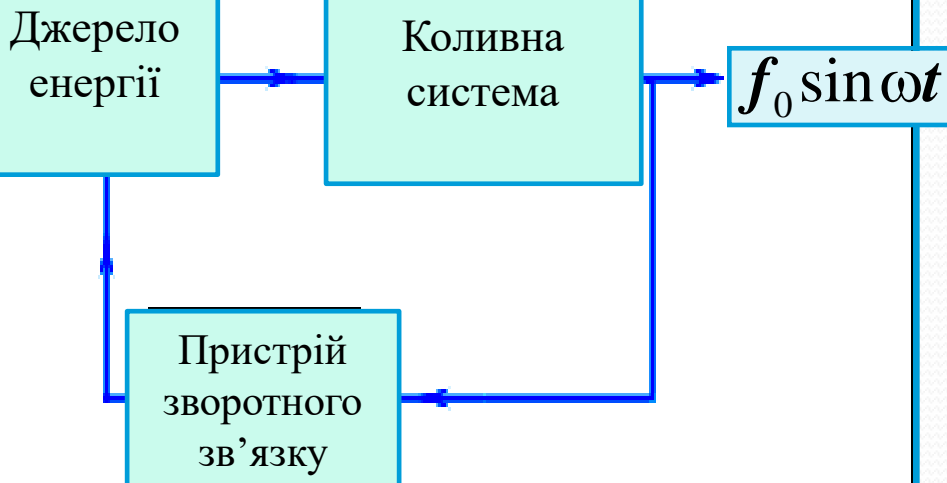
Шкідливість

- Руйнування будівель
- Обрив провідників
- Вібрації у трубопроводах
- Розгойдування вантажу на підйомному крані
- Розгойдування вагонів на стиках рейок
- Розливання води з відра на коромислах

4.2.4. Автоколивання та автоколивальні системи

Відбуваються в результаті здатності самої системи регулювати *надходження енергії* від *постійного внутрішнього джерела*

Схема взаємодії різних елементів автоколивальної системи



Приклад механічної автоколивальної системи - годинниковий механізм з анкерним ходом



АВТОКОЛИВАННЯ ЗДІЙСНЮЮТЬ:

парові машини

двигуни внутрішнього згорання

генератори електромагнітних коливальних систем

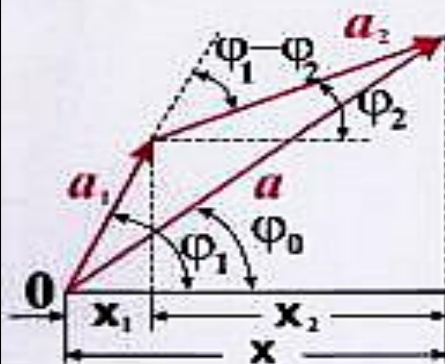
електричні дзвінки

струни смичкових музичних інструментів

повітряні стовпи в трубах духових інструментів

голосові зв'язки при розмові або співі

4.2.5. Додавання коливань одного напрямку. Биття.



$$x = x_1 + x_2$$

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

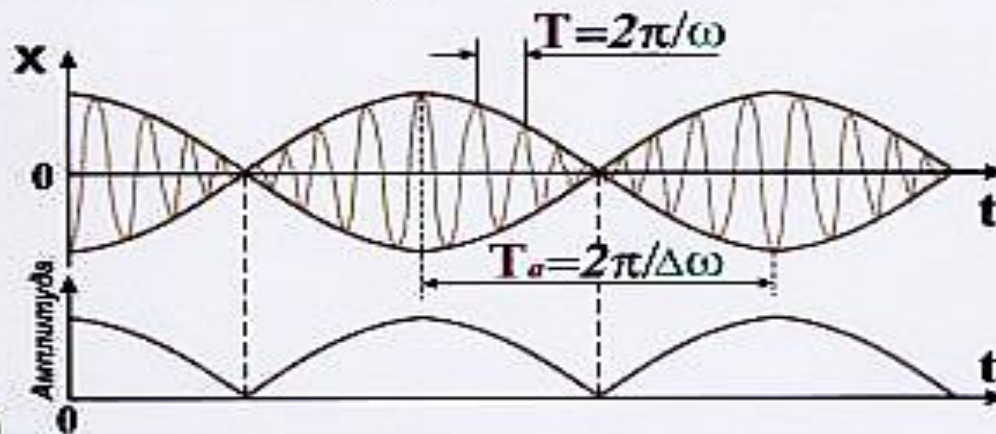
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$$

Биття

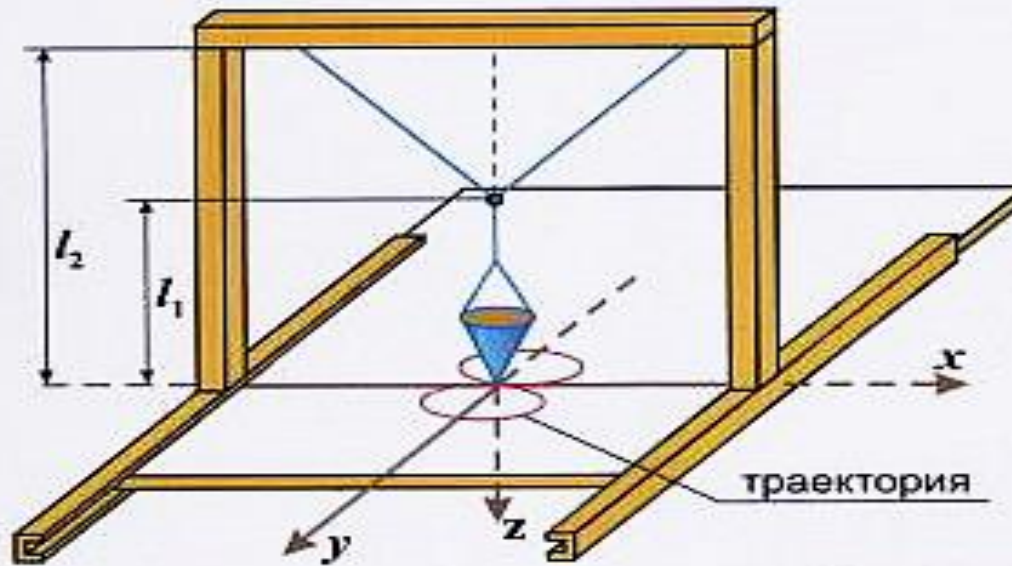
$$x_1 = a \cos \omega t, \quad x_2 = a \cos(\omega + \Delta\omega) t,$$

$$(\Delta\omega \ll \omega), \quad x = x_1 + x_2 = (2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t) \cos \omega t.$$

$$A(t) = |2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t|$$



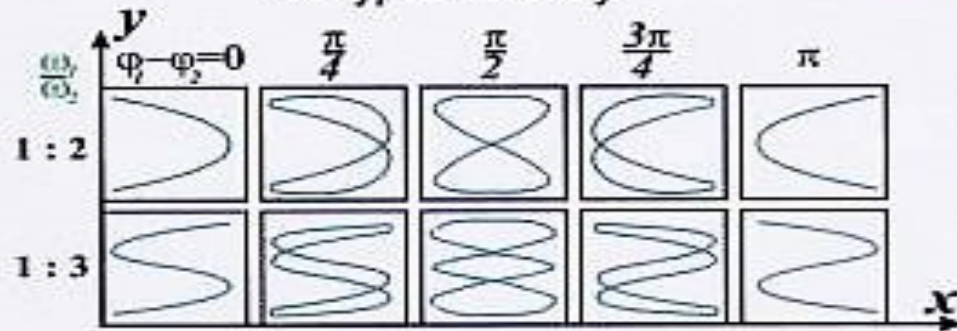
4.2.5. Додавання взаємноперепендикулярних коливань . Фігури Ліссажу.



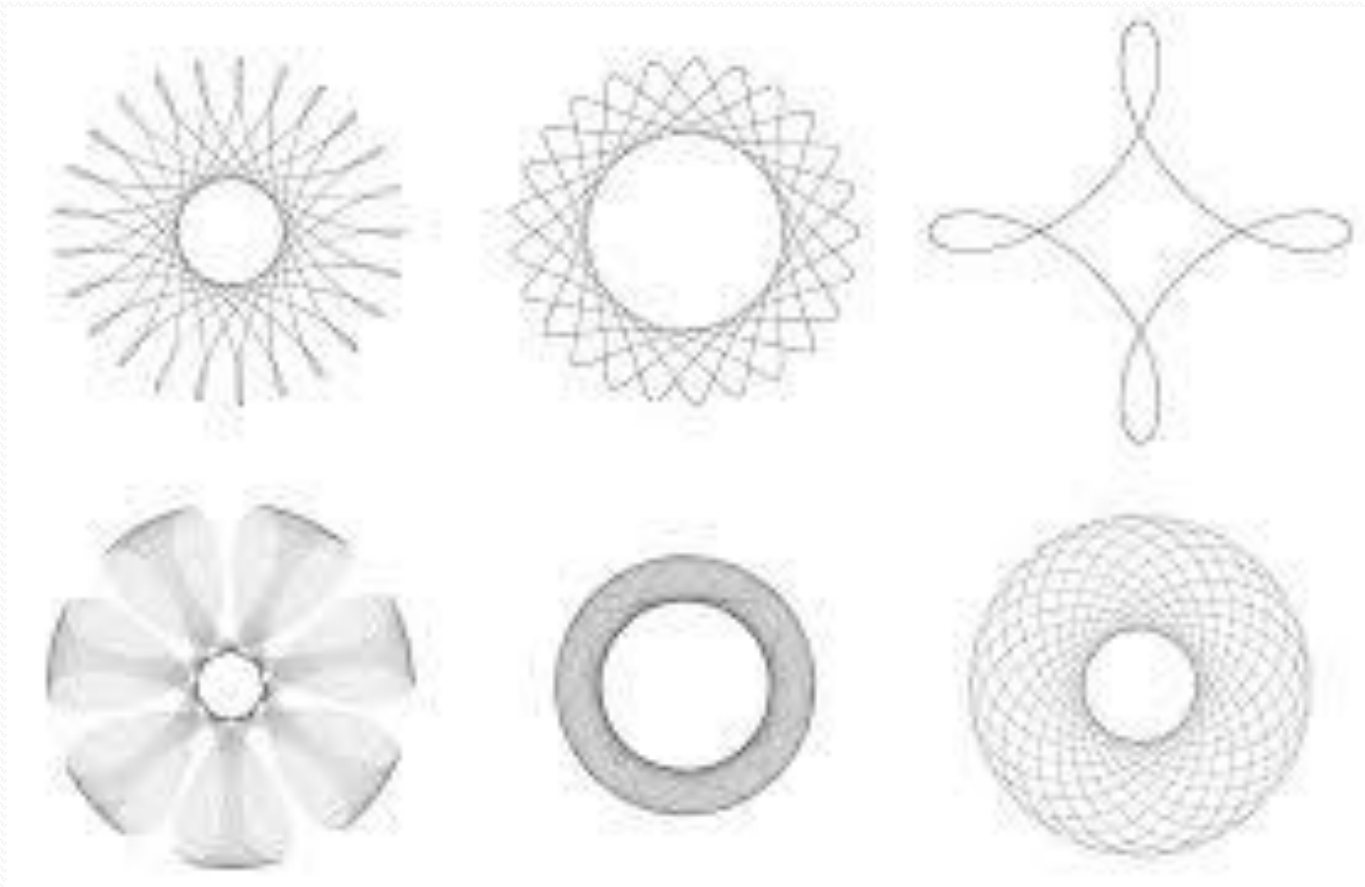
ω_1 - частота коливань в площині YZ
 ω_2 - в площині XZ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}$$

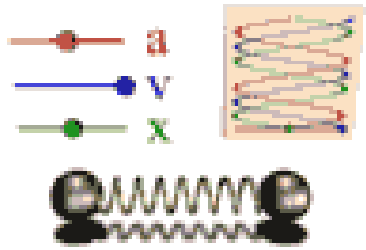
Фігури Ліссажу



Приклад фігур Ліссажу



**Жан Антуан
Ліссажу**



4.3

4.3.1

- Швидкість та прискорення гармонічних незгасаючих коливань

4.3.2

- Енергія гармонічних незгасаючих коливань

4.3.3

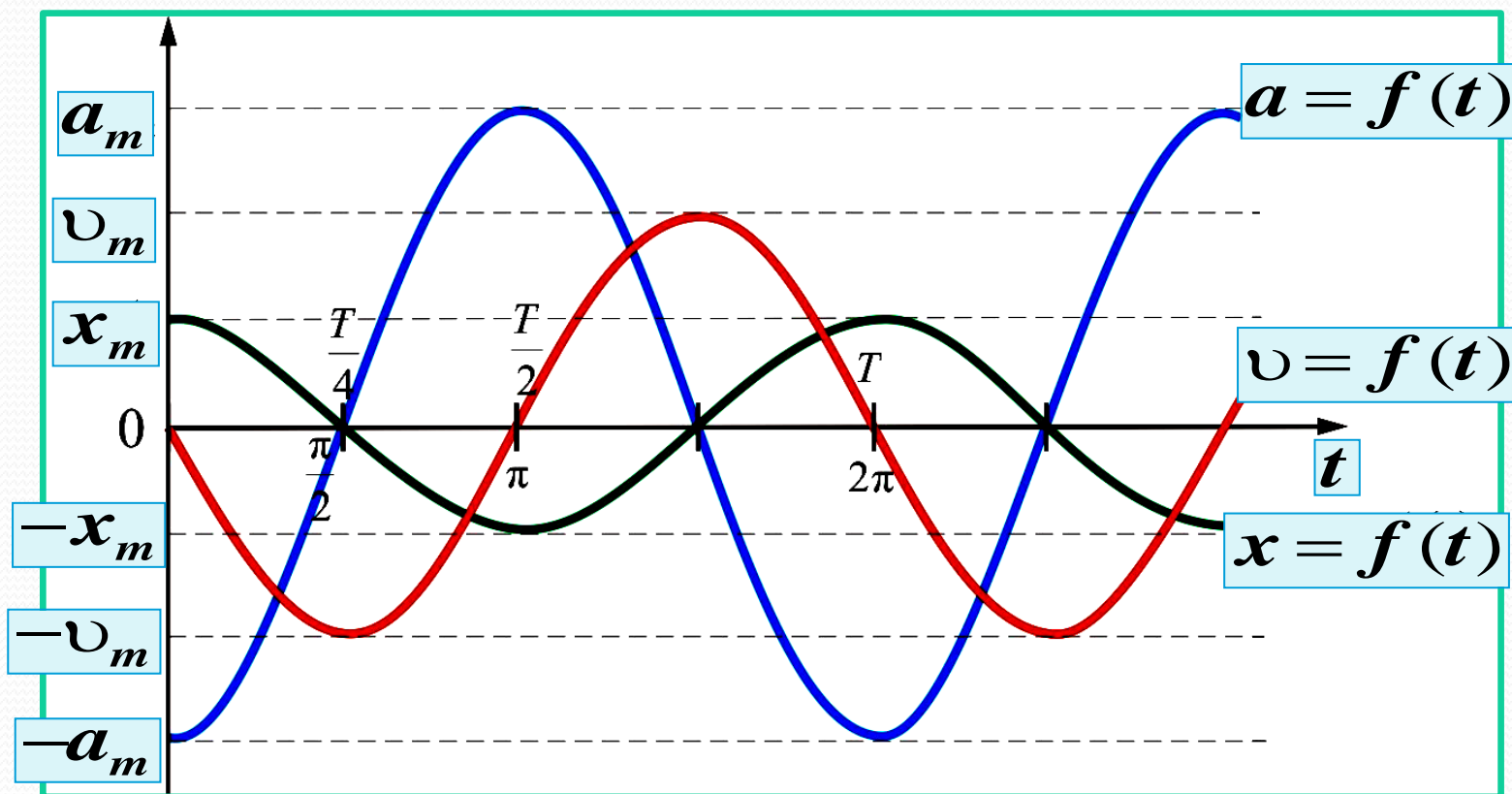
- Перетворення енергії при гармонічних незгасаючих коливаннях

4.3.1. Швидкість та прискорення гармонічних незгасаючих коливань

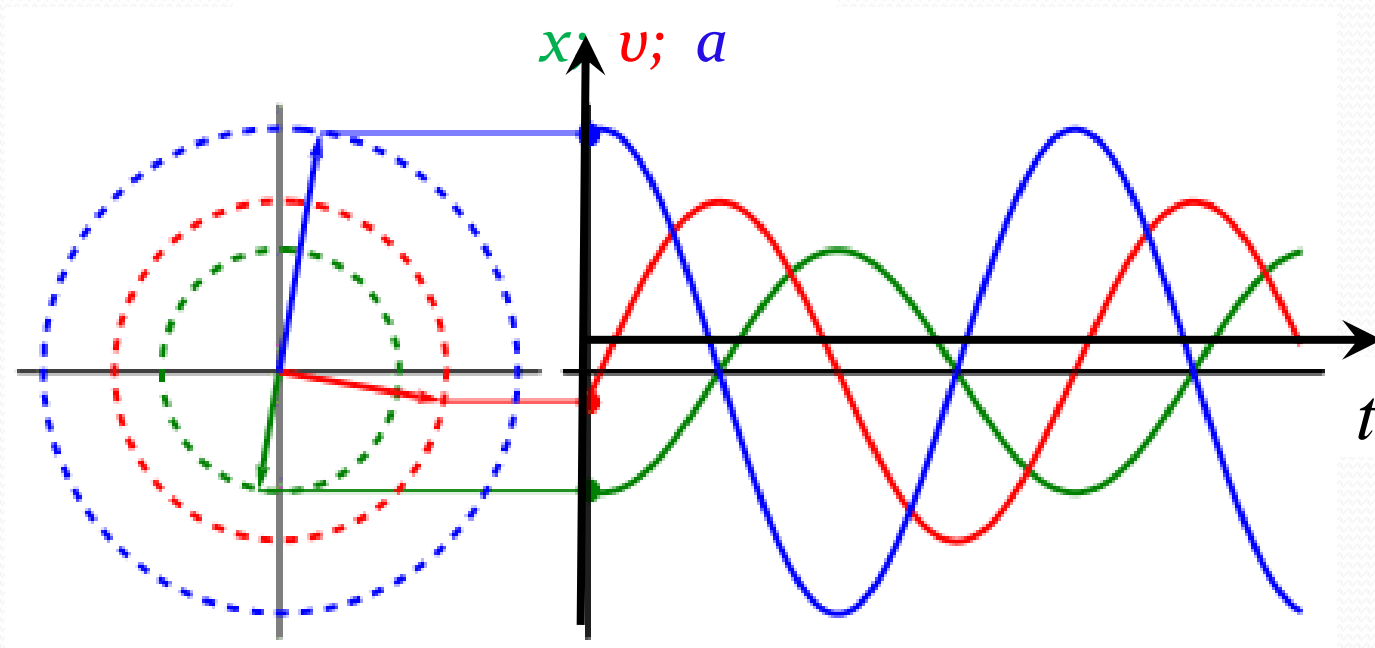
$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

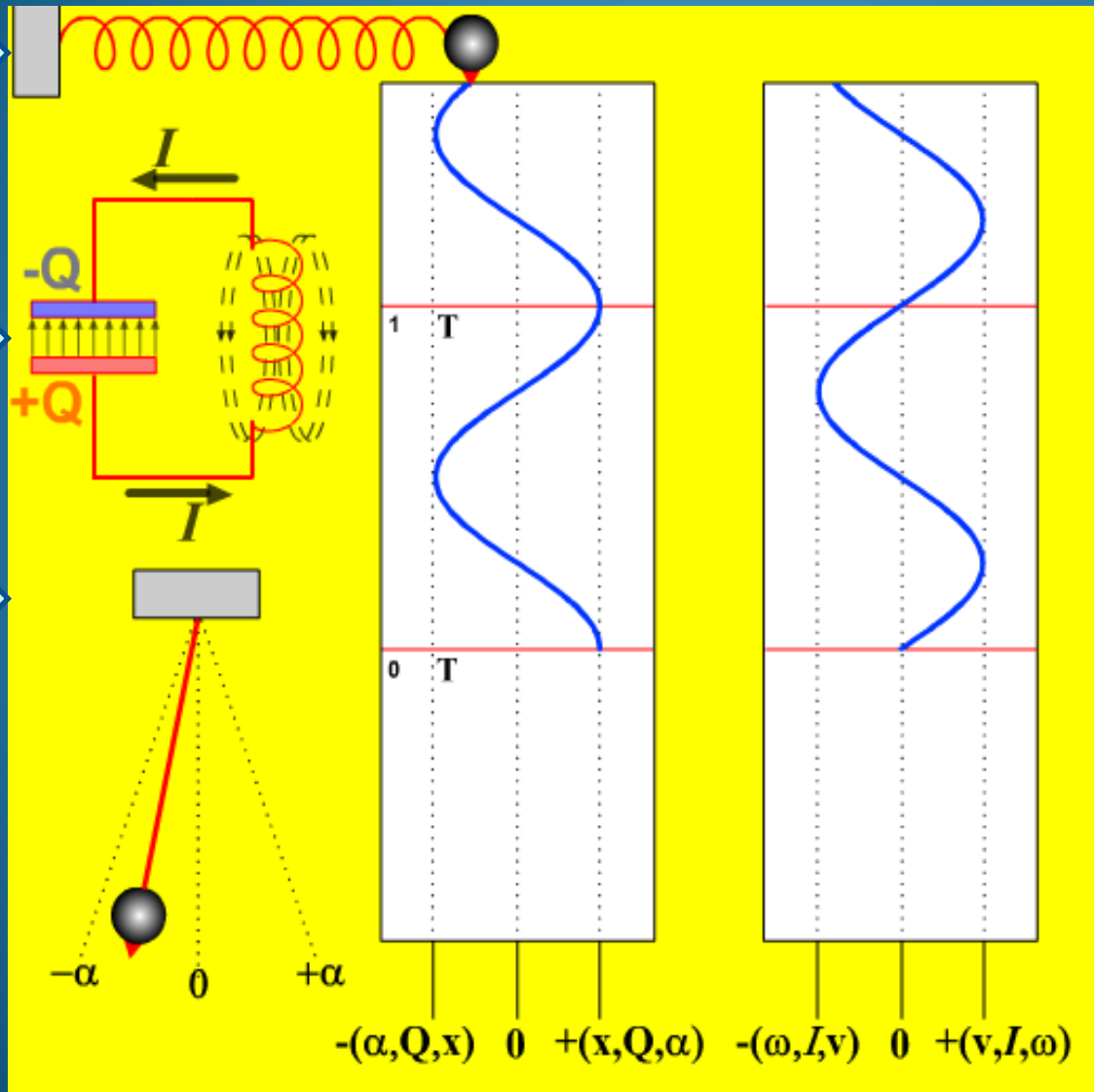
$$a = \frac{dv}{dt} = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$



Графічне подання гармонічних коливань



Гармонічні коливання осциляторів



1. x — координата пружинного маятника;
 v — швидкість коливання пружинного маятника

2. Q — заряд на конденсаторі;
 I — сила струму у колі

3. α — кут відхилення маятника;
 ω — кутова швидкість



4.3.2. Енергія гармонічних незгасаючих механічних коливань

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = x_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$W_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$W_P = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} k x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m \omega^2 \Rightarrow$$

$$W_P = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

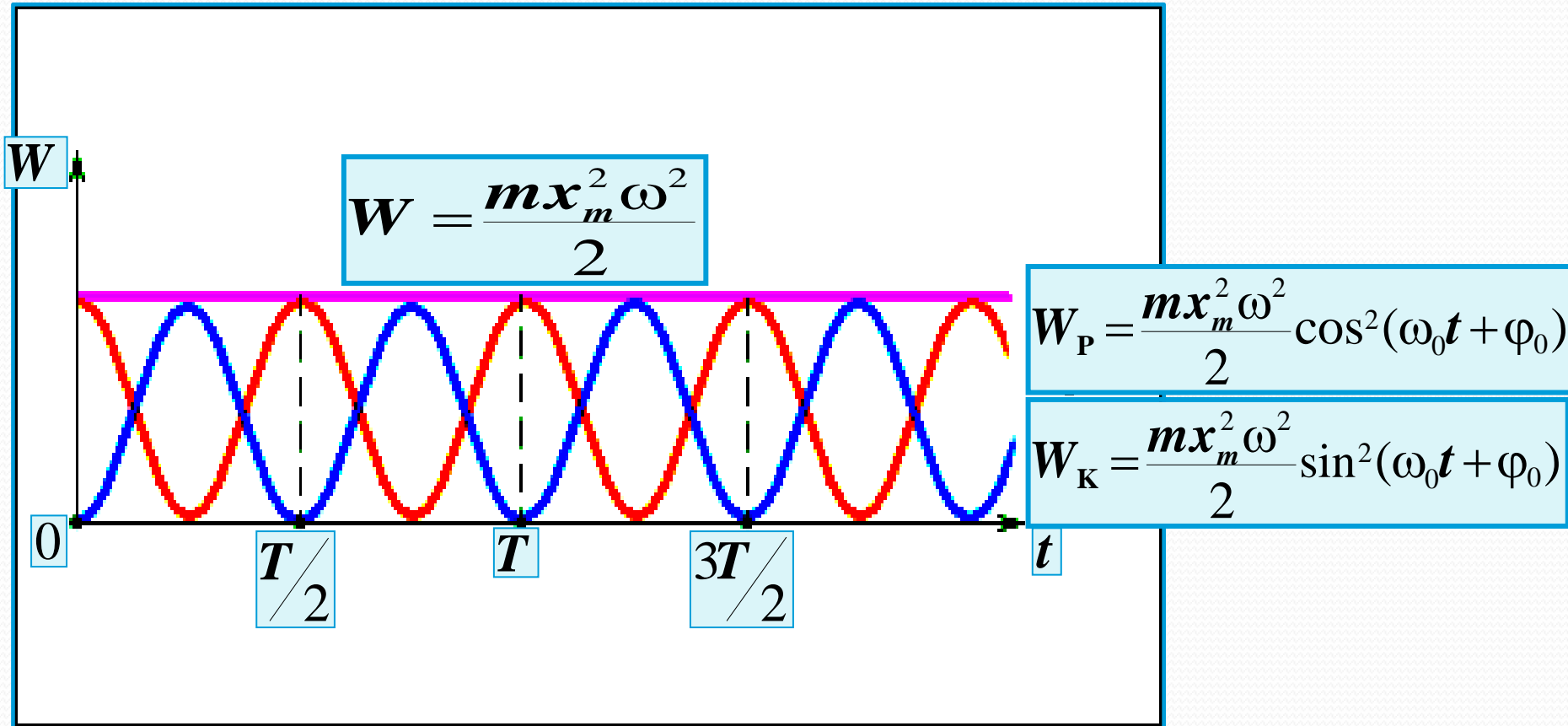
$$W = W_P + W_K = \frac{kx^2(t)}{2} + \frac{mv^2(t)}{2} \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

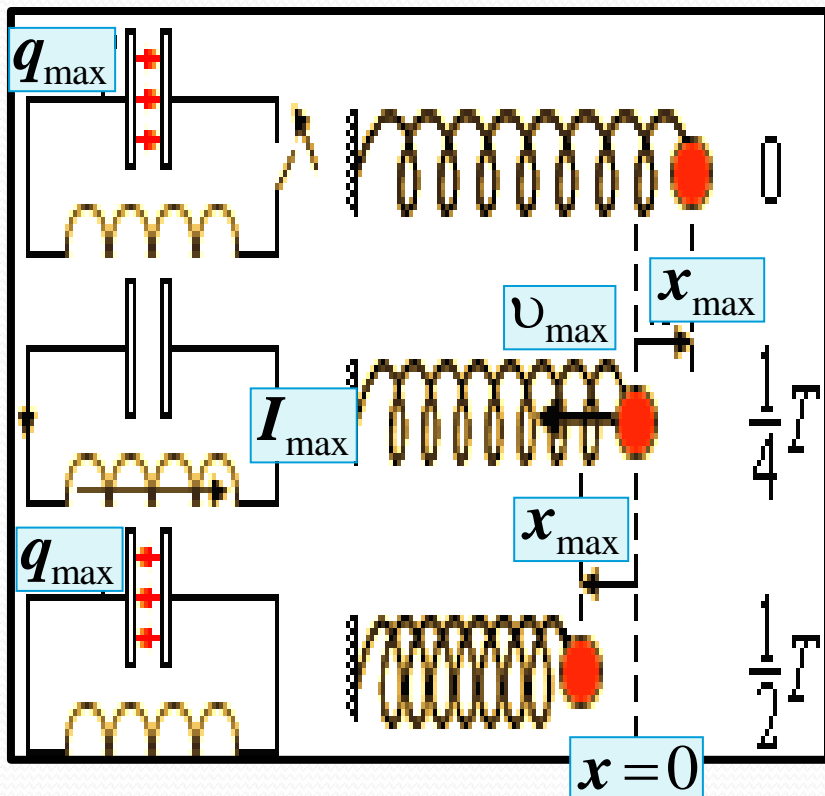
$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2$$

4.3.2. Енергія гармонічних незгасаючих механічних коливань

$$W = W_P + W_K = \frac{kx^2(t)}{2} + \frac{mv^2(t)}{2}$$



4.3.3. Перетворення енергії при гармонічних незгасаючих електромагнітних та механічних коливаннях



Електромагнітні

$$W_E = \frac{q_{\max}^2}{2C} \quad W_m = 0$$

$$W_E = 0 \quad W_m = \frac{LI_{\max}^2}{2}$$

$$W_E = \frac{q_{\max}^2}{2C} \quad W_m = 0$$

Механічні

$$W_p = \frac{kx_{\max}^2}{2} \quad W_K = 0$$

$$W_p = 0 \quad W_K = \frac{m v_{\max}^2}{2}$$

$$W_p = \frac{kx_{\max}^2}{2} \quad W_K = 0$$

Порівняння параметрів вільних коливань вантажу на пружині і процесів в електричному коливальному контурі

механічні величини

Координата

$$x(t)$$

Швидкість

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Маса

$$m$$

Коефіцієнт жорсткості

$$k$$

Сила пружності

$$kx$$

Потенціальна енергія пружини

$$\frac{kx^2}{2}$$

Кінетична енергія

$$\frac{mv^2}{2}$$

Імпульс

$$mv$$

електричні величини

Заряд конденсатора

$$q(t)$$

Сила струму у колі

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Індуктивність

$$L$$

Величина обернена до ємності конденсатора

$$\frac{1}{C}$$

Напруга на конденсаторі

$$U = \frac{q}{C}$$

Енергія електричного поля конденсатора

$$\frac{q^2}{2C}$$

Енергія магнітного поля котушки

$$\frac{LI^2}{2}$$

Магнітний потік

$$LI$$