Виберіть форму подання навчального матеріалу

Докладне подання √ **Скорочене подання**

3. Теорія переміщень

Зміст глави

Під впливом зовнішніх дій і навантажень споруди деформуються. При цьому координати, що характеризують положення кожного перерізу, змінюються, тобто перерізи переміщуються. Визначення цих переміщень – завдання теорії переміщень.

3.1.Робота зовнішніх і внутрішніх сил

Якщо до споруди прикладено певну силу, яка в процесі навантаження зростає від нуля до кінцевої величини з порівняно невеликою швидкістю (таке навантаження називається **статичним**), споруда деформується, точки, в яких прикладено навантаження, переміщуються і сили здійснює роботу.

Розглянемо статичне завантаження стержня (рис.3.1,а), який внаслідок дії розтягуючої сили P дістає подовження Δl. Якщо матеріал стержня є фізично-нелінійним, графік залежності між навантаженням і переміщенням кінця стержня буде криволінійним (рис.3.1,б).

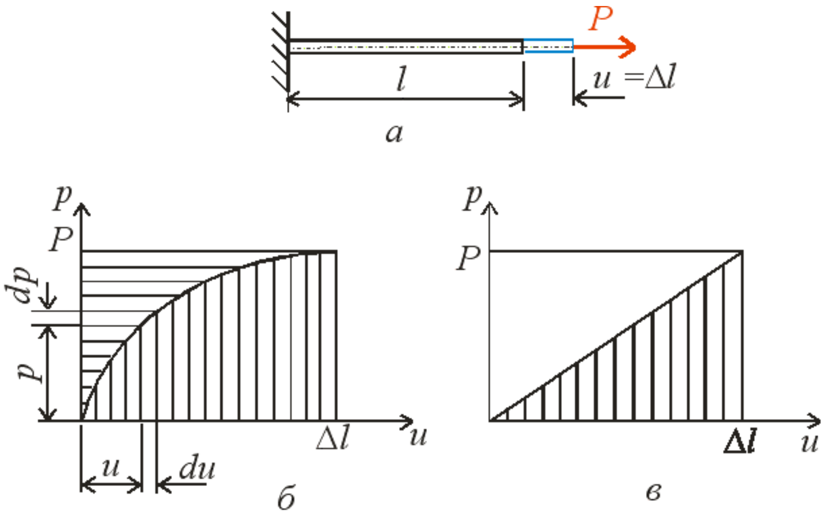

Рис.3.1

Для обчислення роботи, яку виконала сила P, візьмемо переміщення u в довільний момент часу і надамо йому приріст du. Тоді робота сили виражається інтегралом

$$A_p = \int_0^{\Delta l} p du \tag{3.1}$$

і являє собою площу між кривою і віссю u, яка на графіку (рис.3.1,б) заштрихована вертикальною штриховкою. Таку роботу називають **дійсною**.

Якщо ж надати приріст не переміщенню, а навантаженню, то робота виражатиметься інтегралом

$$A_u = \int_o^{P} u dp\,. \tag{3.2}$$

Таку роботу називають **додатковою**. На графіку (рис.3.1,б) площа, що відповідає додатковій роботі, позначена горизонтальною штриховкою.

Сума дійсної і додаткової роботи називається **повною роботою** зовнішніх сил:

$$A_{\text{п}} = A_p + A_u\,. \tag{3.3}$$

Очевидно, що повній роботі відповідає площа прямокутника.

Для лінійно деформованих систем між навантаженням і переміщенням, що їм зумовлене, існує лінійна залежність (рис.3.1,в). При цьому дійсна робота зображується площею заштрихованого трикутника. Очевидно, що додаткова робота в такому разі дорівнює дійсній роботі:

$$A_p = A_u = A \tag{3.4}$$

і може бути обчислена як площа трикутника

$$A = \frac{P\Delta}{2}\,. \tag{3.5}$$

Означена рівність називається **теоремою Клапейрона: в лінійно-деформованих системах дійсна робота статично прикладеної сили дорівнює половині добутку кінцевої величини сили на відповідне кінцеве переміщення, зумовлене цією силою**.

Отже, робота сили на зумовлених цією силою переміщеннях називається **дійсною**. Якщо ж сила P, залишаючись незмінною, здійснює роботу на переміщеннях Δl, зумовлених іншими діями, то таку роботу називають **можливою**. Можлива робота дорівнює добутку величини сили на відповідне переміщення, яке зумовлене іншими силами:

$$A = P \cdot \Delta l\,. \tag{3.6}$$

Для обчислення роботи внутрішніх сил відокремимо нескінченно малий елемент довжиною dx. На рис.3.2,а зображено внутрішні зусилля, які діють у перерізах елемента.

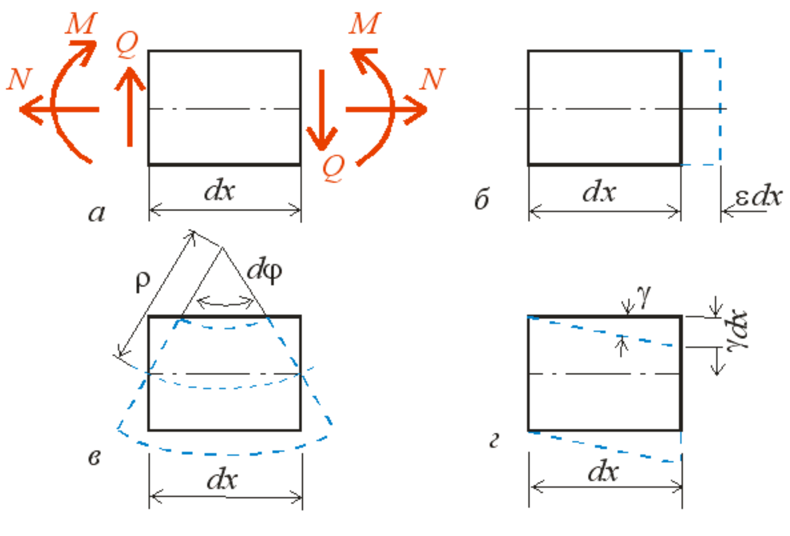

Рис.3.2

Сили N, M, Q здійснюватимуть роботу відповідно на поздовжніх деформаціях, взаємних кутах повороту і взаємних кутах зсуву перерізів. Ці деформації зображено на рис.3.2,б–3.2,г. Поздовжня деформація становить εdx, де ε – відносна поздовжня деформація ($\varepsilon = \Delta l / l$); взаємний кут повороту $d\varphi = \kappa dx$ (κ – кривизна осі деформованого стержня); поперечна деформація – γdx, де γ – кут зсуву.

Дійсна робота внутрішніх сил становитиме

$$U = -\frac{1}{2}\sum\int_l (N\varepsilon dx + M\kappa dx + Q\gamma dx). \tag{3.7}$$

Аналогічно можна записати можливу роботу внутрішніх сил одного стану i на переміщеннях іншого стану p:

$$U_{ip} = -\sum\int_l (N_i\varepsilon_p dx + M_i\kappa_p dx + Q_i\gamma_p dx). \tag{3.8}$$

У цих формулах підсумовування поширюється на всі стержні системи. Знак “мінус” поставлено тому, що внутрішні сили стержневої системи N, M, Q для нескінченно малого елемента, який вилучено із стержневої системи, є зовнішніми. Внутрішні ж сили в елементі будуть матимуть таку саму величину, але спрямовуються у зворотному напрямку.

3.2. Узагальнені сили і узагальнені переміщення

З точки зору проблем, що вивчаються будівельною механікою, всі переміщення (лінійні переміщення точок споруди, кути повороту перерізів в елементах, взаємні поступальні і кутові переміщення перерізів тощо) мають одні й ті самі властивості. Тому зазвичай будь-яке переміщення, незалежно від його характеру або від причин, що його зумовлюють, називають **узагальненим переміщенням**, тобто переміщенням у загальному розумінні цього слова.

Кожному переміщенню ставлять у відповідність певну силову дію, яка здійснює роботу на цьому переміщенні. Така силова дія називається **узагальненою силою**, тобто силовою дією в загальному сенсі слова. Різним узагальненим переміщенням відповідають різні за характером та напрямком узагальнені сили.

Розглянемо кілька прикладів узагальнених переміщень і відповідних цим силам узагальнених сил.

1. Зосередженій силі, яка прикладена в точці, відповідає поступальне переміщення цієї точки в напрямі сили.

2. Двом однаковим за величиною силам, що спрямовані вздовж однієї прямої назустріч одна одній, відповідає узагальнене переміщення, що характеризує зміну відстані між точками, в яких вони прикладені.

3. Зосередженому моменту відповідає кут повороту перерізу стержня в точці прикладення моменту.

4. Двом однаковим за величиною і протилежним за напрямом зосередженим моментам відповідає зміна кута поміж перерізами, в яких ці моменти прикладені.

3.3. Універсальні позначення переміщень

Будь-яке узагальнене переміщення позначається літерою Δ, якщо воно зумовлене зовнішньою дією довільної величини, або літерою δ, якщо величина дії дорівнює одиниці. В позначення вводяться два індекси, наприклад

$$\Delta_{3P}\,,\ \delta_{ik}\,.$$

Індекси позначають місцезнаходження і характер переміщення, а також дію, що його зумовлює. Перший індекс пов'язаний з характером та напрямом переміщення. Він вказує на узагальнену силу, яка відповідає цим характеристикам. Другий індекс пов'язаний із дією, яка викликає це переміщення.

На рис.3.4,а-в зображено три деформованих стани балки, що перебуває під дією різних навантажень.

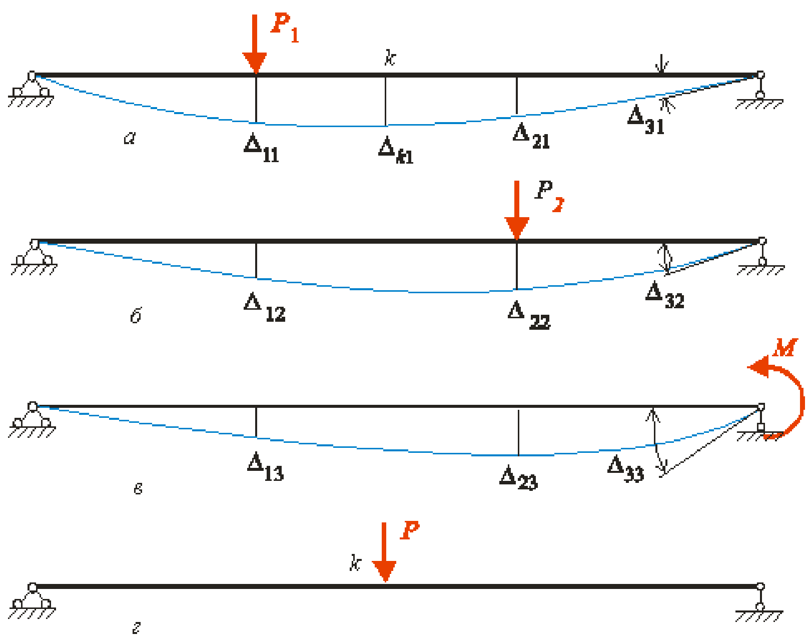

Рис.3.4

Так, Δ_{12} являє собою переміщення в напряму сили P_1 першого стану, тобто прогин балки, від дії сили P_2 другого стану; Δ_{31} – переміщення в напрямі сили P_3 третього стану, тобто кут повороту, від дії сили P_1 першого стану тощо. І взагалі можна сказати, що Δ_{ij} – це переміщення в напрямі узагальненої сили стану *i* від дії узагальненої сили стану *j*.

Отже, **для того щоб позначити будь-яке переміщення, необхідно створити допоміжний стан конструкції, приклавши узагальнену силу, яка відповідає переміщенню**. Так, для того, щоб позначити в попередньому прикладі вертикальне переміщення точки *k* від дії сил стану 1, створимо допоміжний стан *k*, приклавши в перерізі *k* балки вертикальну зосереджену силу (рис.3.4,г). Тоді дане переміщення позначатиметься Δ_{k1}.

3.4. Матриця податливості і матриця жорсткості

Розглянемо яку-небудь стержневу систему, наприклад балку, під дією кількох узагальнених сил P_1, P_2, … , P_n (рис.3.5).

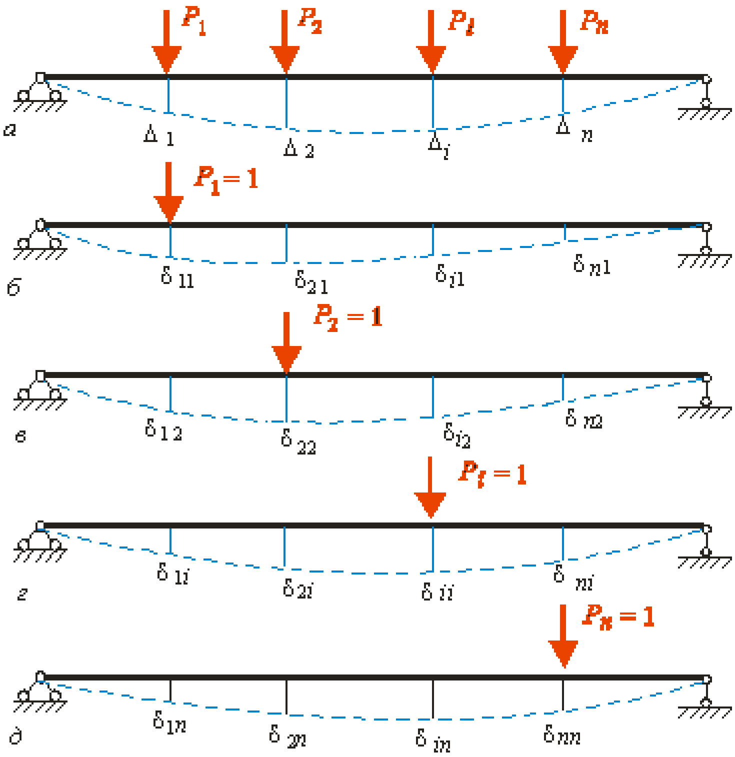

Рис.3.5

Повні переміщення точок прикладання сил можуть бути виражені через величини цих сил і переміщення, які зумовлені почерговою дією сил, величини яких дорівнюють одиниці:

$$\begin{array}{ccccccccc} \Delta_1 & = & \delta_{11}P_1 & + & \delta_{12}P_2 & + & \dots & + & \delta_{1n}P_n, \\ \Delta_2 & = & \delta_{21}P_1 & + & \delta_{22}P_2 & + & \dots & + & \delta_{2n}P_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_n & = & \delta_{n1}P_1 & + & \delta_{n2}P_2 & + & \dots & + & \delta_{nn}P_n. \end{array} \tag{3.9}$$

або в матричній формі

$$\vec{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{B}\ \vec{\mathbf{P}}, \tag{3.10}$$

Тут позначено: $\vec{\mathbf{\Delta}}^{\mathbf{T}} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_n\}$ – вектор узагальнених переміщень, $\vec{\mathbf{P}}^T = \{P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n\}$ – вектор зовнішніх дій, **B** – квадратна матриця одиничних переміщень, тобто переміщень, які зумовлені одиничними узагальненими силами. Зазначена матриця називається **матрицею податливості**:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Будь-який коефіцієнт матриці податливості δ_{ij} характеризує величину переміщення в напрямі *i* від дії в напрямі *j* одиничної узагальненої сили.

Із матричної рівності (3.10) можна мати величини сил, які відповідають одиничним узагальненим переміщенням:

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{\Delta}} \tag{3.12}$$

У цьому виразі $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}$ – квадратна матриця, яку називають **матрицею жорсткості**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

У координатній формі рівність (3.12) має вигляд

$$
\begin{array}{lllllllll}
P_1 & = & k_{11}\Delta_1 & + & k_{12}\Delta_2 & + & \dots & + & k_{1n}\Delta_n, \\
P_2 & = & k_{21}\Delta_1 & + & k_{22}\Delta_2 & + & \dots & + & k_{2n}\Delta_n, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
P_n & = & k_{n1}\Delta_1 & + & k_{n2}\Delta_2 & + & \dots & + & k_{nn}\Delta_n.
\end{array}
\qquad (3.14)
$$

Довільний коефіцієнт k_{ij} дорівнює силі P_i від дії примусового переміщення $\Delta_j = 1$ за умови, що всі інші переміщення дорівнюють нулю.

Елементи матриці жорсткості можна трактувати як опорні реакції в'язей, що накладені на систему в напрямі можливих переміщень (рис.3.6). Тому матрицю жорсткості інколи називають матрицею реакцій.

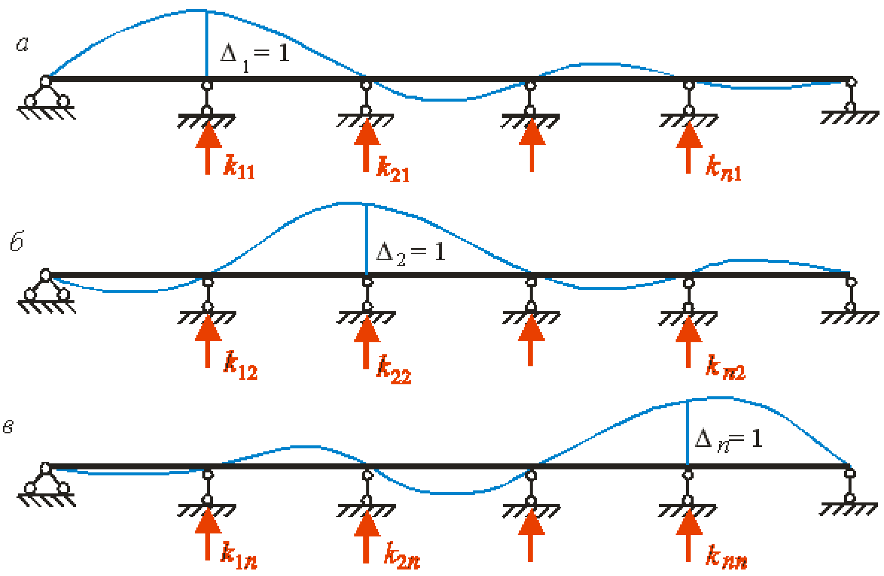

Рис.3.6

3.5. Інтеграл Мора

Найзагальнішим методом обчислення переміщень у стержневих системах є метод Мора. Він випливає з принципу можливих переміщень і дозволяє визначати переміщення точок системи через зусилля в її елементах.

Розглянемо два напружено-деформованих стани стержневої системи. Перший стан (рис.3.7,а) зумовлено зовнішніми навантаженнями, які, по суті, можуть бути довільними. Назвемо цей напружено-деформований стан стержневої системи **вантажним,** або станом *P*.

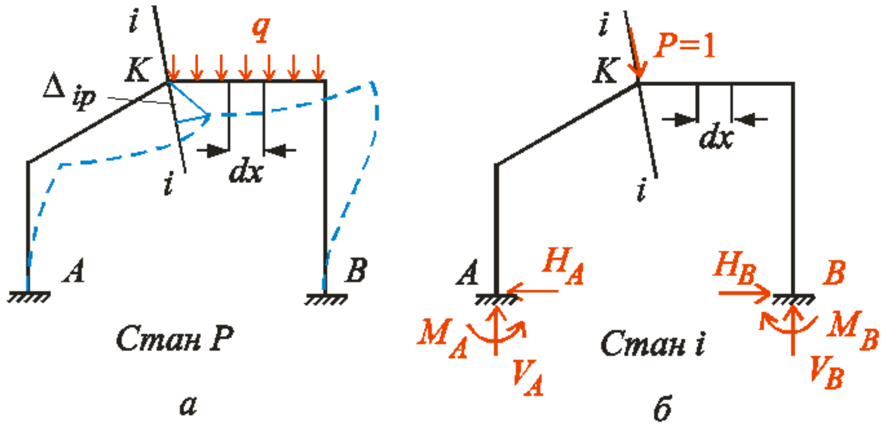

Рис.3.7

У другому стані на стержневу систему вздовж деякої довільної прямої *i-i* діє одна зосереджена сила, яка дорівнює одиниці. Такий стан (стан *i*) будемо називати **допоміжним,** або **одиничним**.

Переміщення у вантажному стані *p* у напрямі одиничної сили допоміжного стану *i* виражається формулою

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{N_i N_P}{EA} dx + \sum \int_l \frac{M_i M_P}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\eta Q_i Q_P}{GA} dx. \qquad (3.15)$$

Тут M_p, N_p, Q_p – зусилля від зовнішнього навантаження (вантажні зусилля); $\overline{M}_i, \overline{N}_i, \overline{Q}_i$ – зусилля у допоміжному стані (одиничні зусилля); *EI, EA, GA* – жорсткості стержнів відповідно при деформаціях згину, поздовжніх деформаціях та деформаціях зсуву; η – безрозмірний коефіцієнт, що залежить від форми перерізу стержня і обчислюється за формулою

$$\eta = A \int_A \frac{S_x^{\text{відс}}}{\mathrm{I_x} b_y} dA. \qquad (3.16)$$

(Зокрема, для прямокутного перерізу η=1,2).

Цей вираз називається формулою **Максвелла–Мора,** або **інтегралом Мора**. За допомогою цієї формули можна обчислити будь-яке переміщення в будь-якій стержневій системі через внутрішні зусилля двох її станів. Перший стан – вантажний – зумовлено дією зовнішніх навантажень, другий – допоміжний – дією одиничної узагальненої сили, яка відповідає переміщенню, що розшукується.

Таким чином, для обчислення будь-якого переміщення необхідно:

- Визначити зусилля M_p, N_p, Q_p від зовнішнього навантаження.

- Обрати допоміжний стан *i*, відкинувши зовнішні навантаження і приклавши одиничну узагальнену силу, що відповідає переміщенню.
- Визначити зусилля $\overline{M}_i, \overline{N}_i, \overline{Q}_i$ у допоміжному стані.
- Обчислити переміщення за формулою Максвелла-Мора (3.15).

3.6. Окремі випадки застосування формули Максвелла–Мора

Величини кожного з трьох доданків у формулі Максвелла– Мора характеризують внесок того чи іншого виду внутрішніх зусиль в переміщення, що розшукується. На підставі аналізу цих доданків можна дійти до висновку, що для різного виду конструкцій нехтування деякими видами зусиль мало позначається на значенні переміщення. Так, для балок і рам, деформування яких відбувається переважно за рахунок згину, можна знехтувати впливом поздовжніх і поперечних сил. У такому разі інтеграл Мора матиме вигляд

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} dx. \tag{3.16}$$

Для ферм, в стержнях яких існують головно поздовжні деформації, можна записати

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\overline{N}_i N_P}{EA} dx. \tag{3.17}$$

Для арок

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\overline{N}_i N_P}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} dx. \tag{3.18}$$

3.7. Обчислення інтеграла Мора

Інтеграл Мора може бути обчислений або безпосереднім інтегруванням, або за допомогою прийомів чисельного інтегрування. В практичних задачах, як правило, використовують два прийоми чисельного інтегрування: **правило Верещагіна** і **формулу Сімпсона– Корноухова**. Процедура обчислення інтеграла Мора в такому разі називають множенням епюр.

За правилом Верещагіна для обчислення інтеграла $\int_0^l \overline{M}_i M_p dx$ достатньо помножити площу епюри M_P на ординату епюри $\overline{M}_i$, що береться під центром тяжіння епюри M_P (рис.3.8):

$$\int_0^l \overline{M}_i M_p dx = A_p y_i . \tag{3.19}$$

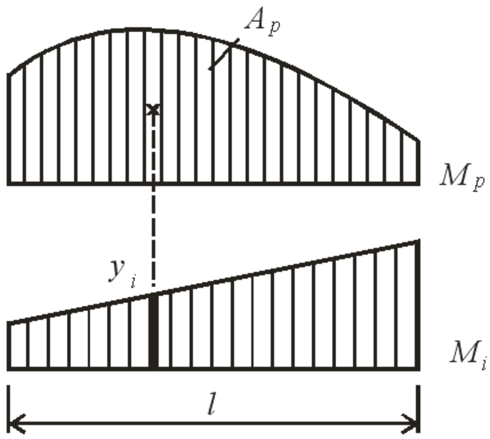

Рис.3.8

Якщо ордината y_i і площа A_p розташовані по один і той самий бік стержня, добуток береться зі знаком "плюс".

Необхідно звернути увагу:

- **принаймні одна з епюр, які перемножуються, має бути прямолінійною;**
- **ордината y_i повинна бути взята на прямолінійній епюрі.**

Формула Сімпсона–Корноухова – окремий випадок відомої з математичного аналізу формули Сімпсона для обчислення визначених інтегралів, коли інтервал інтегрування розкладається на дві ділянки (рис.3.10):

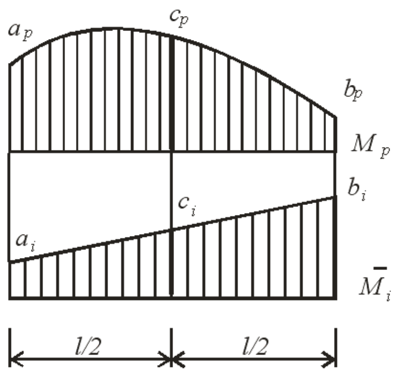

Рис.3.10

$$\int_0^l \overline{M}_i M_P dx = \frac{l}{6}\left(a_i a_p + 4 c_i c_P + b_i b_P \right) \tag{3.20}$$

При використанні формули Сімпсона–Корноухова необхідно, щоб **обидві перемножувані епюри не мали зламів, розривів і точок перегину. В противному разі інтервал інтегрування треба розкласти на окремі підінтервали.**

3.8. Переміщення від дії температури

Як відомо з фізики, тіла при нагріванні розширюються, а при охолодженні – скорочуються. Тому дія на споруду температури спричиняє деформування конструкцій. При цьому в статично визначуваних системах ані внутрішніх зусиль, ані опорних реакцій не виникає. А відтак формула Мора у вигляді (3.15) непридатна для обчислення температурних переміщень і виникає потреба мати ще один варіант формули, призначений власне для розрахунків на дію температури. Так, для систем, що складаються зі стержнів, які мають симетричні поперечні перерізи, переміщення від дії температури обчислюються за формулою

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} A_{Ni} + \sum \alpha \frac{|t_1 - t_2|}{h} A_{Mi} \tag{3.21}$$

Тут t_1, t_2 – температура (град) з одного та іншого боку кожного стержня, α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу стержня, h – висота поперечного перерізу стержня; A_{Mi}, A_{Ni} – відповідно площі епюри $\bar{M}_i$ і епюри $\bar{N}_i$ на стержнях в допоміжному стані. Знак сумирования розповсюджується на всі стержні.

У другому доданку різниця температур береться за модулем, оскільки в рамах згинаючі моменти не мають знаків. Добуток береться зі знаком плюс, якщо розтягнені волокна на стержні в допоміжному стані збігаються з розтягненими волокнами від дії температури.

3.9. Переміщення від примусового зміщення опор

Якщо опори споруди зміщуються, то споруда змінює своє розташування, а її точки одержують переміщення. При цьому неважко впевнитись у тому, що в статично визначуваних системах опорні реакції, внутрішні зусилля і деформації елементів дорівнюють нулю.

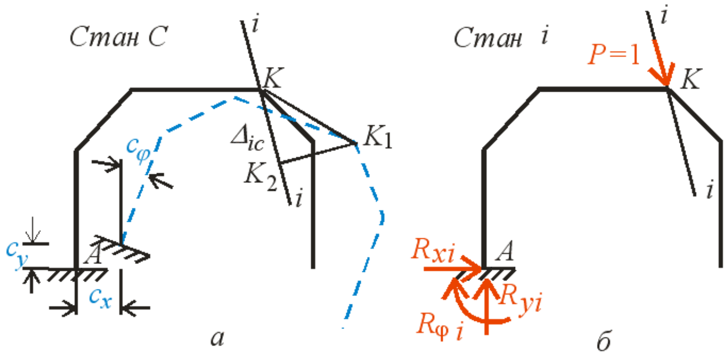

Рис.3.11

Розглянемо два можливих стани споруди.

Перший стан *C* (див.рис.3.11,а) зумовлено поступальними переміщеннями затиснення c_x і c_y в напрямі координатних осей і поворотом на кут c_φ. Як вже згадувалось, деформації елементів у цьому стані не виникають. У допоміжному стані *i* (див. рис.3.11,б) на раму в напрямі *i*-*i* діє одинична зосереджена сила, яка спричинює опорні реакції R_{xi}, R_{yi} і $R_{\varphi i}$.

Переміщення стану *C* у напрямі одиничної сили допоміжного стану *i* можна обчислити за формулою

$$\Delta_{ic} = -\sum R_{ji} c_j . \qquad (3.22)$$

У цьому виразі R_{ji} – опорна реакція R_j допоміжного стану *i*, c_j – відповідне вимушене зміщення опори у стані *C*.

Таким чином, **переміщення, яке зумовлене зміщеннями опор, обчислюється як від'ємна сума добутків опорних реакцій допоміжного стану на відповідні вимушені зміщення опор**.

3.10. Теореми взаємності

3.10.1.Теорема про взаємність робіт (теорема Бетті)

Розглянемо лінійно-деформівну систему, наприклад балку, під дією двох статично прикладених узагальнених сил P_1 і P_2 (рис.3.12).

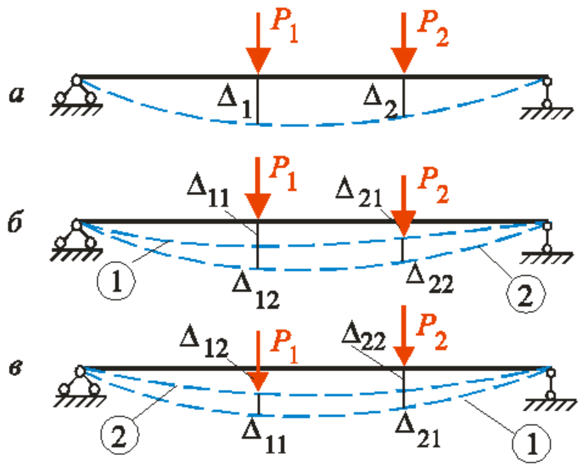

Рис.3.12

Якщо є два зрівноважених стани пружної системи, то робота сил першого стану на переміщеннях другого дорівнює роботі сил другого стану на переміщеннях першого:

$$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21} \tag{3.23}$$

або в загальному вигляді

$$A_{12} = A_{21}. \tag{3.24}$$

Зазначене положення називається **теоремою про взаємність робіт,** або **теоремою Бетті**.

3.10.2.Теорема про взаємність переміщень (теорема Максвелла)

Якщо в (3.23) покласти, що $P_1 = P_2 = P$, матимемо

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}.$$

Коли, до того ж, узагальнені сили дорівнюють одиниці $P_1 = P_2 = 1$, то

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \tag{3.25}$$

Рівність (3.44) виражає теорему про взаємність переміщень: **для двох одиничних станів пружної системи переміщення в першому стані в напрямі узагальненої сили другого стану чисельно дорівнює переміщенню в другому стані в напрямі узагальненої сили першого**.

Із теореми про взаємність переміщень, яка також відома як теорема Максвелла, випливає, що матриця податливості

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn}\end{bmatrix}$$

є симетричною відносно головної діагоналі.

3.10.3.Теорема про взаємність реакцій (теорема Релея)

Розглянемо пружну систему у вигляді багатопрогонової балки (рис.3.13) у двох станах *i* і *j*, зумовлених примусовими переміщеннями опор Δ_i та Δ_j відповідно.

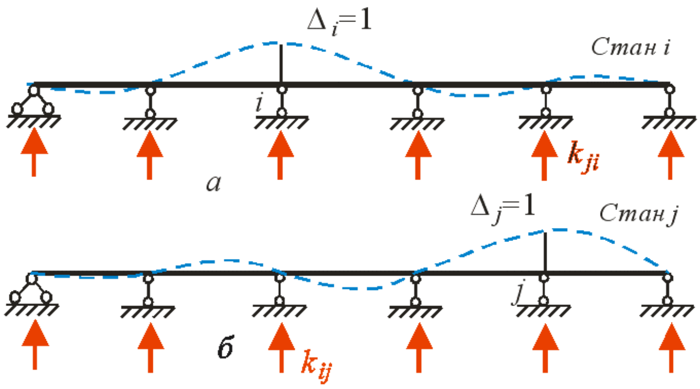

Рис.3.13

В обох станах балка вигинається і на її опорах виникають опорні реакції, які позначимо: k_{ij} – реакція на опорі *i* в стані *j*, k_{ji} – реакція на опорі *j* в стані *i*. Тоді з теореми про взаємність робіт випливає, що

$$k_{ij}=k_{ji}. \tag{3.26}$$

Реакція в'язі *i*, що зумовлена одиничним переміщенням в'язі *j* пружної системи, дорівнює реакції в'язі *j* від одиничного переміщення в'язі *i*. Це положення називають теоремою про взаємність реакцій. На підставі теореми (3.26) можна дійти висновку, що матриця жорсткості пружної системи

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn}\end{bmatrix}$$

завжди симетрична відносно головної діагоналі.

3.10.4. Теорема про взаємність реакцій і переміщень

Розглянемо таку саму багатопрогонову балку в інших одиничних станах (рис.3.14).

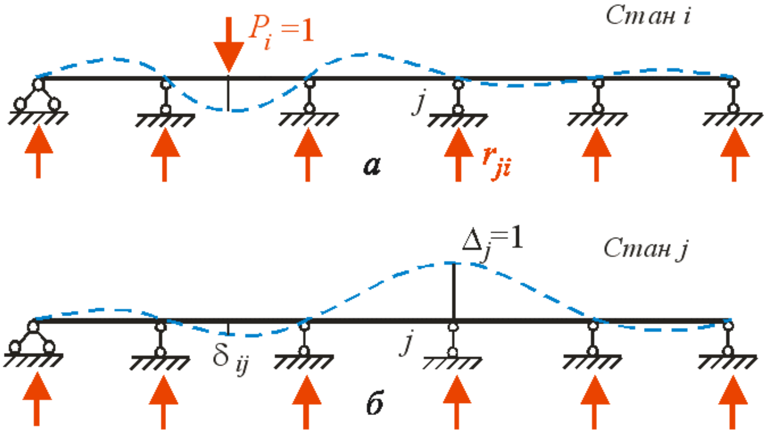

Рис.3.14

У стані *i* до балки прикладена одинична зосереджена сила $P_i = 1$ (рис.3.14,а), а в стані *j* примусово переміщується опора *j* (рис.3.14,б).

Реакція в'язі *j*, що зумовлена дією на пружну систему сили $P_i = 1$, дорівнює за величиною і протилежна за знаком переміщенню в напрямі сили $P_i = 1$ від одиничного переміщення в'язі *j*.

$$r_{ji} = -\delta_{ij} .$$