

Розділ 1. ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Практичне заняття № 1.1

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ

1. Визначники другого порядку.
2. Визначники третього порядку.
3. Мінори та алгебраїчні доповнення.
4. Визначники n -го порядку. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

1. Визначники другого порядку.

Визначником другого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Визначник другого порядку обчислюється за схемою: $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}.$

Задача 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 20 - 6 = 14.$$

Відповідь: 14.

Задача 2. Обчислити визначники: 1) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix};$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -6 \end{vmatrix};$ 3) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}.$

Відповідь: 1) 29; 2) -6; 3) -10.

Задача 3. Обчислити визначники: 1) $\begin{vmatrix} 0 & -a \\ 2 & b \end{vmatrix};$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & -a \end{vmatrix};$ 3) $\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$

Відповідь: 1) $2a$; 2) $-a$; 3) $3x-2y$.

Задача 4. Розв'язати рівняння: 1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$ 2) $\begin{vmatrix} x^3 & x \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = x.$

Відповідь: 1) -3; 1; 2) -3; 0; 3.

Задача 5. Розв'язати нерівність $\left| \begin{array}{cc} x-1 & 3 \\ 1 & 1/(x+2) \end{array} \right| \geq 1$.

Відповідь: $[-3; -2)$.

2. Визначники третього порядку.

Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Визначник третього порядку обчислюється за правилом Саррюса:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}.$$

Задача 6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 8 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + 5 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 8 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -16 + 12 - 30 + 1 = -33.$$

Відповідь: -33 .

Задача 7. Обчислити визначники за правилом Саррюса:

$$1) \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 1) -45 ; 2) -6 .

Задача 8. Обчислити визначники: 1) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & a & b \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$.

Відповідь: 1) $-2a^2$; 2) $2abc$.

Задача 9. Розв'язати рівняння: 1) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 1$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ x & 1 & x \\ x & 2x & 1 \end{vmatrix} = 4$.

Відповідь: 1) 0; 2; 2) $-0,5$; 1.

Задача 10. Розв'язати нерівності: 1) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -x^2 & 5 & x \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} > 0$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -4 & x^4 & x^2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$.

Відповідь: 1) $x \in \mathbb{R}$; 2) $[-2; -1] \cup [1; 2]$.

3. Мінори та алгебраїчні доповнення.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається визначник, який отримується з даного визначника шляхом викреслення рядка i і стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент (i -го рядка та j -го стовпця).

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається його мінор M_{ij} , взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Задача 11. Знайти алгебраїчне доповнення A_{12} елемента a_{12}

визначника $\begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (5 \cdot 0 - 1 \cdot 3) = -1 \cdot (-3) = 3.$$

Відповідь: 3.

Задача 12. Знайти мінори M_{21} і M_{33} відповідно елементів a_{21} і a_{33}

визначника $\begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

Відповідь: 4; -8 .

Задача 13. Знайти алгебраїчні доповнення A_{13}, A_{22}, A_{32} відповідно

$$\text{елементів } a_{13}, a_{22}, a_{32} \text{ визначника } \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: $-6; 9; 9$.

4. Визначники n -го порядку. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

Визначником (детермінантом) n -го порядку з n^2 елементів називається алгебраїчна сума $n!$ всіляких членів, кожний з яких є добутком n елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця визначника. Знак члена дорівнює $(-1)^t$, де t – число інверсій в перестановках других індексів елементів члена, коли перші індекси розташовані в зростаючому порядку. Визначник n -го порядку позначається символом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема. Визначник Δ дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}. \end{aligned}$$

Властивості визначників:

- 1) Значення визначника не зміниться, якщо його рядки замінити стовпцями, зберігаючи порядок слідування.
- 2) Визначник, що містить два однакових рядка (або стовпця), дорівнює нулю.
- 3) Визначник, що містить два пропорційних рядка (або стовпця), дорівнює нулю.
- 4) Якщо всі елементи будь-якого рядка (або стовпця) визначника помножити на одне й те саме число m , то значення визначника збільшиться в m разів.
- 5) Якщо всі елементи будь-якого рядка (або стовпця) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
- 6) Нехай кожен елемент k -го рядка визначника є сумою двох доданків. Тоді такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких k -й рядок

складається з перших доданків, а в другого – з других. Інші елементи усіх трьох визначників однакові.

- 7) Визначник не змінює свого значення, якщо до елементів будь-якого рядка (або стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на одне і те саме число.
- 8) Якщо поміняти місцями два рядка (або стовпця) визначника, то визначник змінить знак, але за абсолютною величиною не зміниться.

Зауваження: Визначник трикутного вигляду (під головною діагоналлю стоять всі нулі) дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Задача 14. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ методом розкладу по рядку чи стовпцю, спочатку спростивши.

Розв'язання:

Спростимо визначник, тобто використаємо властивість 7, для того щоб отримати як найбільше нулів в одному з рядків або стовпців визначника. Спочатку віднімемо від другого рядка третій, а потім від першого стовпчика другий, помножений на 3. Отриманий визначник розкладемо по другому рядку (він містить найбільшу кількість нулів):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = [\text{II} p - \text{III} p] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = [\text{I} cm - 3 \cdot \text{II} cm] = \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 36.$$

Відповідь: 36.

Задача 15. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 4 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & \dots & n^2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Даний визначник містить пропорційні стовпці (наприклад, перший і другий), тому за властивістю 3 цей визначник дорівнює 0.

Відповідь: 0.

Задача 16. Обчислити визначник методом зведення його до трикутного вигляду

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = [IIp - Ip] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = [IVp + 2 \cdot Ip] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$$

Відповідь: 48.

Задача 17. Обчислити визначники методом розкладу по рядку (стовпцю):

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 1) 0; 2) 33; 3) -202.

Задача 18. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -6 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & -7 & -9 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 1) 34; 2) -81; 3) 0.

Задача 19. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 15745 & 15743 & 17527 \\ 23736 & 23736 & 47477 \\ 23735 & 23735 & 47475 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 10.

Задача 20. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} x^2 + a^2 & ax & 1 \\ y^2 + a^2 & ay & 1 \\ z^2 + a^2 & az & 1 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 1) 0; 2) $a(x-y)(y-z)(x-z)$.

Задача 21. Обчислити визначники, попередньо спростивши:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 9 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & 4 & 1 \\ a & b & 2c & 9 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 1) 64; 2) 20; 3) 30; 4) $abcd$.

Домашнє завдання

Задача 1. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння: 1) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ 3 & 1/(x+2) \end{vmatrix} = 0$.

Задача 3. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 8 & -7 & -9 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Розв'язати нерівність

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ x & 5 & x \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \leq 0.$$

Задача 5. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 0 & -2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 6. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n+1 & \dots & n+n \end{vmatrix}.$$