

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Київський національний університет будівництва і архітектури

# **ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

Практичний посібник  
з вищої математики для студентів першого курсу  
інженерних спеціальностей

Київ 2018

УДК 517.3,517.91

ББК 22.311

I-73

Укладачі: Н.Д. Федоренко, канд. техн. наук, професор,  
С.В. Білощицька, канд. техн. наук, доцент,  
О.В. Забарило, канд. фіз.-мат. наук, доцент,  
Ю.А. Коротких, асистент

Рецензент О.В. Доля, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск В.М. Михайленко, д-р техн. наук,  
професор

*Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій  
проекування та прикладної математики, протокол № 2 від  
18 вересня 2017 року.*

Видається в авторській редакції.

**Інтегральне** числення та диференціальні рівняння: практичний  
I-73 посібник з вищої математики / уклад.: Н.Д. Федоренко та ін. – К.:  
КНУБА, 2018. – 100 с.

Містить необхідні для виконання індивідуальних завдань  
теоретичні та практичні відомості, зразок виконання індивідуальних  
завдань та 30 варіантів індивідуальних завдань.

Призначено для студентів першого курсу інженерних  
спеціальностей усіх форм навчання.

© КНУБА, 2018

## ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Це видання є практичним посібником для вивчення загального курсу вищої математики за модулями 3 та 4 студентами першого курсу інженерних спеціальностей.

У роботі містяться систематично підібрані задачі та вправи з розділів «Інтегральне числення» та «Диференціальні рівняння».

Основою навчання є самостійна робота студента над підручником, конспектом лекцій та виконання індивідуального завдання.

У практичному посібнику наведені завдання за варіантами для виконання самостійної роботи, а також приклади розв'язання типових задач.

### МОДУЛЬ 3

#### Розділ ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

**Завдання 1.** Знайти невизначені інтеграли.

**Завдання 2.** Обчислити визначені інтеграли.

**Завдання 3.** Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

**Завдання 4.** За допомогою визначеного інтеграла обчислити площу плоскої області  $D$ , обмеженої заданими лініями.

**Завдання 5.** Обчислити довжину дуги заданої лінії.

**Завдання 6.** Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури  $\Phi$  навколо заданої осі координат.

**Завдання 7.** Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої  $L$  навколо заданої осі.

**Завдання 8.** Змінити порядок інтегрування та зобразити область інтегрування.

**Завдання 9.** За допомогою подвійного інтеграла знайти площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями (зробити рисунок).

**Завдання 10.** Подати подвійний інтеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  у вигляді повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням по  $x$  і з зовнішнім інтегруванням по  $y$ , якщо область  $D$  обмежена заданими лініями.

**Завдання 11.** Обчислити потрійний інтеграл.

**Завдання 12.** За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями (зробити рисунок).

**Завдання 13–14.** Обчислити задані інтеграли.

## МОДУЛЬ 4

### Розділ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

**Завдання 1.** Розв'язати диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

**Завдання 2.** Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

**Завдання 3.** Розв'язати однорідне диференціальне рівняння першого порядку.

**Завдання 4.** Розв'язати диференціальне рівняння, що зводиться до однорідного.

**Завдання 5.** Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

**Завдання 6.** Розв'язати рівняння Бернуллі.

**Завдання 7.** Розв'язати диференціальне рівняння в повних диференціалах.

**Завдання 8.** Розв'язати диференціальне рівняння виду  $y^{(n)} = f(x)$ .

**Завдання 9.** Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку (рівняння без  $y$ ), що приводиться до диференціального рівняння першого порядку.

**Завдання 10.** Розв'язати диференціальні рівняння другого порядку (рівняння без  $x$ ), що приводиться до диференціальних рівнянь першого порядку.

**Завдання 11.** Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку.

**Завдання 12.** Розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку методом підбору частинного розв'язку.

**Завдання 13.** Знайти частинний розв'язок даного диференціального рівняння, який задовольняє вказаним початковим умовам (задача Коші).

**Завдання 14.** Розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку методом варіації довільних сталих.

**Завдання 15.** Розв'язати систему звичайних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

**Завдання 16.** Розв'язати систему звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

## ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

$$1. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

$$2. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$3. \int e^u du = e^u + C.$$

$$4. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$5. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$7. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$8. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$9. \int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$$

$$10. \int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$$

$$11. \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$$

$$12. \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$$

$$13. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$14. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$15. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \quad (a > 0).$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$17. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$18. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C.$$

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

### МОДУЛЬ 3

**Завдання 1.** Знайти невизначені інтеграли:

$$1. \int \frac{7x^3 - \sqrt[4]{x} + 2x - 5}{x^2} dx = \int (7x - x^{\frac{7}{4}} + \frac{2}{x} - 5x^{-2}) dx =$$

$$= \frac{7}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{-\frac{3}{4}} + 2\ln|x| + 5x^{-1} + C = \frac{7}{2}x^2 + \frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}} + \ln x^2 + \frac{5}{x} + C.$$

$$2. \int (\cos \frac{x}{4} + \sin \frac{x}{4})^2 dx = \int (1 + \sin \frac{x}{2}) dx = x - 2 \cos \frac{x}{2} + C.$$

$$3. \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int (\frac{1}{\sin^2 x} - 1) dx = -\operatorname{ctgx} - x + C.$$

$$4. \int \sin(7 - 2x) dx = -\frac{1}{2} \int \sin(7 - 2x) d(7 - 2x) = \frac{1}{2} \cos(7 - 2x) + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{3 - 8x^2} = -\frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{8}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{8}}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{\frac{3}{8}}}{x + \sqrt{\frac{3}{8}}} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} \ln \left| \frac{2x + \sqrt{\frac{3}{2}}}{2x - \sqrt{\frac{3}{2}}} \right| + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4) + 1} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 1} =$$

$$= \int \frac{d(x - 2)}{(x - 2)^2 + 1^2} = \operatorname{arctg}(x - 2) + C.$$

$$7. \int \frac{(2x - 4)dx}{x^2 - 4x + 5} = \int \frac{d(x^2 - 4x + 5)}{x^2 - 4x + 5} = \ln |x^2 - 4x + 5| + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{(\sin^2 x)(\cos^2 x)} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{(\sin^2 x)(\cos^2 x)} = \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}) dx =$$

$$= \operatorname{tgx} - \operatorname{ctgx} + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}} = \int \frac{d(x - 4)}{\sqrt{(x - 4)^2 + 1}} = \ln |x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 17}| + C.$$

$$10. \int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx = \left. \begin{array}{l} u = 2 \ln x + 3 \\ du = \frac{2 dx}{x} \\ \frac{du}{2} = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 + C =$$

$$= \frac{1}{8} (2 \ln x + 3)^4 + C.$$

$$11. \int \frac{x^3}{x-1} dx = \left. \begin{array}{l} u = x-1 \\ du = dx \\ x = u+1 \end{array} \right| = \int \frac{(u+1)^3}{u} du = \int \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 1}{u} du =$$

$$= \int (u^2 + 3u + 3 + \frac{1}{u}) du = \frac{u^3}{3} + \frac{3u^2}{2} + 3u + \ln|u| + C =$$

$$= \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{3(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + \ln|x-1| + C.$$

$$12. \int (2x+1) \sin x dx = \left. \begin{array}{l} u = 2x+1 \\ du = 2 dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -(2x+1) \cos x + \int 2 \cos x dx =$$

$$= -(2x+1) \cos x + 2 \sin x + C.$$

$$13. \int x^3 \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 \\ v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$$

$$14. \int e^x \sin 2x dx = \left. \begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \sin 2x dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x \frac{dx}{x} =$$

$$= \left. \begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \cos 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{e^x \sin 2x}{4} - \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x dx.$$

Звідки  $\int e^x \sin 2x dx = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{e^x \sin 2x}{4} - \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x dx.$

Дістали рівняння, з якого визначаємо шуканий інтеграл:

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x) + C.$$

$$15. \int e^{\sqrt{x}} dx = \left. \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ t = \sqrt{x} \end{array} \right| = 2 \int t e^t dt = \left. \begin{array}{l} u = t \\ du = dt \\ dv = e^t dt \\ v = e^t \end{array} \right| = 2(t e^t - \int e^t dt) =$$

$$= 2e^t (t - 1) + c = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C.$$

$$16. \int \frac{2x+3}{x^2+4x+9} dx = \left. \begin{array}{l} x = t-2 \\ dx = dt \\ t = x+2 \end{array} \right| = \int \frac{2(t-2)+3}{(t-2)^2+4(t-2)+9} dt =$$

$$= \int \frac{2t-1}{t^2+5} dt = \int \left( \frac{2t}{t^2+5} - \frac{1}{t^2+5} \right) dt = \ln(t^2+5) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \ln(x^2+4x+9) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

$$17. \int \frac{x^5+2}{x^3-1} dx = \int \left( \frac{x^2+2}{x^3-1} + x^2 \right) dx = \int \left( x^2 + \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \right) dx =$$



$$\begin{array}{l}
x^2 + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) \\
x^2 + 2 = x^2(A + B) + x(A - B + C) + (A - C) \\
A + B = 1 \\
A - B + C = 0 \\
A - C = 2 \\
A = 1 \\
B = 1 \\
C = -1
\end{array}
\left| \right. = \int \left( x^2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$18. \int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x-1}{x+1} = t^3 \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} = \\ dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} dt \\ x-1 = \frac{2}{t^3-1} \end{array} \right| = \int \frac{(t^3-1)^2 t(-6t^2)}{4(t^3-1)^2} dt =$$

$$= -\frac{3}{2} \int t^3 dt = -\frac{3}{8} t^4 + c = -\frac{3}{8} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$19. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} t^3 = 1 + x^{\frac{1}{4}} \\ x = (t^3 - 1)^4 \\ dx = 12t^2 (t^3 - 1)^3 dt \end{array} \right| = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C =$$

$$= \frac{12}{7} (1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}} - 3(1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{\sin x + 1} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = 2 \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$= -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$$

$$21. \int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cos^4 x (\cos x dx) =$$

$$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C =$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

22.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

$$23. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1-x-x^2} = xt - 1 \\ 1-x-x^2 = x^2 t^2 - 2xt + 1 \\ x = \frac{1+2t}{1+t^2}; dx = \frac{2(1-t-t^2)}{(1+t^2)^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{-2dt}{1+(t+1)^2} =$$

$$= -2 \operatorname{arctg}(t+1) + C = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x-x^2} + x + 1}{x} + C.$$

$$24. \int \frac{2e^{2x} - e^x - 3}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{2t^2 - t - 3}{t(t+1)(t-3)} dt = \int \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-3} \right) dt =$$

$$= \ln|t| + \ln|t-3| + \ln|C| = \ln|Ct(t-3)| = \ln|Ce^x(e^x-3)|.$$

**Завдання 2.** Обчислити визначені інтеграли.

$$1. \int_1^e \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, du = 2 \ln x \frac{1}{x} dx \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = e \ln^2 e - 2(x \ln x - x) \Big|_1^e = e - 2e + 2e - 2 \approx 0,72.$$

$$2. \int_{2/3}^{10/3} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{3x-1} = t, 3x-1 = t^2 \\ x = \frac{1}{3}(t^2+1), dx = \frac{2}{3}tdt \\ t = 1 \text{ при } x = 2/3 \\ t = 3 \text{ при } x = 10/3 \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{\frac{1}{3}(t^2+1) \cdot \frac{2}{3}tdt}{t^2t} =$$

$$= \frac{2}{9} \int_1^3 \frac{t^3+t}{t^3} dt = \frac{2}{9} \left( t - \frac{1}{t} \right) \Big|_1^3 = \frac{16}{27} \approx 0,59.$$

$$3. \int_0^1 \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \int_0^1 \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \ln 2 + \frac{\pi^2}{16} \right) \approx 0,655.$$

$$4. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{e^x-1} = t; x = \ln(t^2+1) \\ a = \sqrt{e^0-1} = 0; dx = \frac{2tdt}{t^2+1} \\ b = \sqrt{e^{\ln 5}-1} = 2; \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{(t^2+1)t \cdot 2tdt}{(t^2+4)(t^2+1)} =$$

$$= 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 \left( 1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt = 2 \left( t - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_0^2 = 4 - \pi.$$

$$5. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ \text{якщо } x = 0, \text{ то } 0 = a \sin t \Rightarrow t = 0 \\ \text{якщо } x = a, \text{ то } a = a \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ dx = a \cos t dt; \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$6. \int_1^e x \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x}; \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{4} (e^2 + 1).$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx = \left. \begin{array}{l} \sin x = t; \quad \cos x dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{x}; \quad x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = \left. \begin{array}{l} u = t \\ dv = \sin t dt \\ du = dt \\ v = -\cos t \end{array} \right| =$$

$$= 2 - \left( t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \right) = 2.$$

**Завдання 3.** Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність.

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - \arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

отже, даний інтеграл збіжний.

$$2. \int_{-\infty}^0 \cos 2x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos 2x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{\sin 2x}{2} \Big|_a^0 = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} (\sin 0 - \sin 2a) = -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin 2a,$$

оскільки ця границя не існує при  $a \rightarrow -\infty$ , то даний інтеграл розбіжний.

$$3. \int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - e^0) = +\infty,$$

отже, даний інтеграл розбіжний.

$$4. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arcsin \frac{2-\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2},$$

отже, даний інтеграл збіжний.

$$\begin{aligned} 5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^0 \frac{dx}{(x+2)^2 + 5} + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \frac{dx}{(x+2)^2 + 5} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_{\alpha}^0 + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_0^{\beta} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{\alpha+2}{\sqrt{5}} \right) + \\ &+ \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{\beta+2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

отже, даний інтеграл збіжний.

$$\begin{aligned}
6. \quad & \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \\
& = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{\beta} (3x^{4/3} + 2x^{-2/3}) dx + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 (3x^{4/3} + 2x^{-2/3}) dx = \\
& = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} \left( \frac{9}{7} x^{7/3} + 6x^{1/3} \right) \Big|_{-1}^{\beta} + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{9}{7} x^{7/3} + 6x^{1/3} \right) \Big|_{\alpha}^1 = \\
& = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} \left( \frac{9}{7} \beta^{7/3} + 6\beta^{1/3} + \frac{9}{7} + 6 \right) + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{9}{7} + 6 - \frac{9}{7} \alpha^{7/3} - 6\alpha^{1/3} \right) = 14\frac{4}{7},
\end{aligned}$$

отже, даний інтеграл збіжний.

**Завдання 4.** За допомогою визначеного інтеграла обчислити площу плоскої області  $D$ , обмеженої заданими лініями.

1. Прямою  $y = x$  і параболою  $y = 2 - x^2$  (рис. 1)

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$S = \int_{-2}^1 ((2 - x^2) - x) dx = \left( 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (кв.од.)}.$$

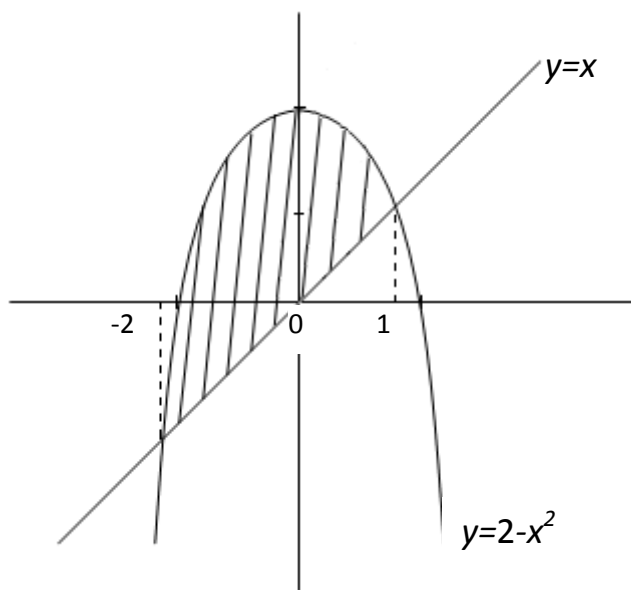


Рис. 1

2. Еліпсом  $x = acost$ ,  $y = bsint$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab \approx 3,14ab. \end{aligned}$$

3. «Трипелюстковою розою»  $\rho = 2 \cos 3\varphi$ .

$$\begin{aligned} S &= 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (2 \cos 3\varphi)^2 d\varphi = 12 \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 6 \left( \varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6} \right) \Big|_0^{\pi/6} = \pi \approx 3,14 \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

**Завдання 5.** Обчислити довжину дуги заданої лінії.

1.  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \left( \frac{x}{2} \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \approx 1,25 \text{ (од.)}. \end{aligned}$$

2. Однієї арки циклоїди

$x = 2(t - \sin t)$ ,  $y = 2(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2(1 - \cos t))^2 + (2 \sin t)^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{16 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -8 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 16 \text{ (од.)}. \end{aligned}$$

3. Кардіоїди  $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$ .

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(9(1 + \cos \varphi))^2 + 9 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 6 \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 12 \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 24 \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 24 \text{ (од.)}. \end{aligned}$$

**Завдання 6.** Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури  $\Phi$  навколо заданої осі координат.

1.  $\Phi: y^2=(x-1)^3, x=2; Ox$ (рис. 2).

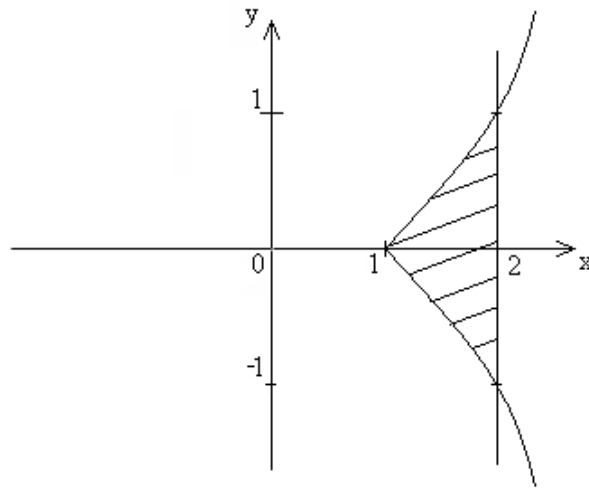


Рис.2

$$V = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x-1)^3 dx = \frac{1}{4} \pi (x-1)^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \pi \text{ (куб.од.)}$$

2.  $\Phi: \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  – астроида,  $Ox$ (рис. 3).

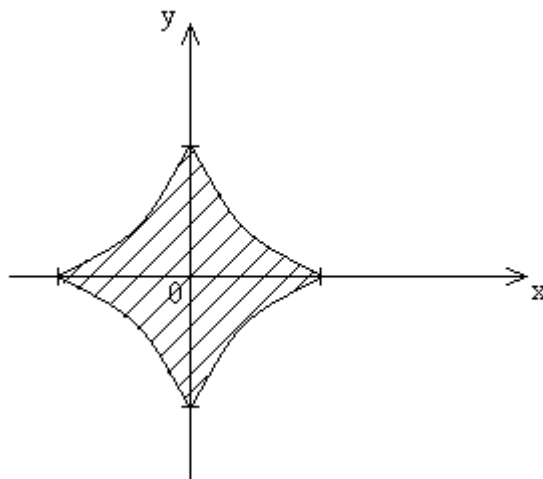


Рис.3

$$y=0 \Rightarrow a \sin^3 t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0;$$

$$x=0 \Rightarrow a \cos^3 t = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$



$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{\pi/2} y^2 dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} (a \sin^3 t)^2 d(a \cos^3 t) = \\
&= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 t \cos^2 t (-\sin t dt) = 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t d(\cos t) = \\
&= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t) d(\cos t) = \\
&= 6\pi a^3 \left( \frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{3}{5} \cos^5 t + \frac{3}{7} \cos^7 t - \frac{1}{9} \cos^9 t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{32}{105} \pi a^3 \text{ (куб.од.)}.
\end{aligned}$$

3.  $\Phi: x^2 + y^{\frac{2}{3}} = 1; Oy$ .

$$x^2 = 1 - y^{\frac{2}{3}}$$

При  $x = 0, y^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - y^{\frac{2}{3}}) dy = \pi \left( y - \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{5} \pi \text{ (куб.од.)}.$$

**Завдання 7.** Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої  $L$  навколо заданої осі.

1.  $L: a^2 y = x^3$  (дуга кубічної параболи) між прямими  $x = 0$  і  $x = a$ ; вісь  $Ox$ .

$$y' = \frac{3}{a^2} x^2; ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{1}{a^2} \sqrt{(a^4 + 9x^4)} dx;$$

$$2\pi y ds = \frac{2\pi}{a^4} \sqrt{a^4 + 9x^4} x^3 dx;$$

$$S = \frac{2\pi}{a^4} \int_0^a \sqrt{a^4 + 9x^4} x^3 dx = \frac{\pi}{27a^4} \left( \sqrt{(a^4 + 9x^4)^3} \right) \Big|_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1)a^2 \approx 3,6a^2 \text{ (кв. од.)}.$$

2.  $L: \begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$  –кардіоида; вісь  $Ox$ .

$$x' = 2a(\sin 2t - \sin t); \quad y' = 2a(\cos t - \cos 2t).$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} &= \sqrt{4a^2(\sin 2t - \sin t)^2 + 4a^2(\cos t - \cos 2t)^2} = \\ &= 2a\sqrt{2 - 2\sin t \sin 2t - 2\cos t \cos 2t} = 4a \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi a(2\sin t - \sin 2t) \cdot 4a \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^\pi \left( 2\sin t \sin \frac{t}{2} - \sin 2t \sin \frac{t}{2} \right) dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^\pi \left( \cos \frac{t}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \cos \frac{5}{2}t \right) t dt = 8\pi a^2 \left( 2\sin \frac{t}{2} - \sin \frac{3}{2}t + \frac{1}{5} \sin \frac{5}{2}t \right) \Big|_0^\pi = \\ &= 8\pi a^2 \left( 2 + 1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{128}{5} \pi a^2 \quad (\text{КВ. ОД.}). \end{aligned}$$

3. L:  $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ; полярна вісь.

Задана крива – лемніската Бернуллі; полярна вісь співпадає за  $Ox$  (рис. 4).

$$\rho \sin \varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi; \quad \rho' = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}; \quad \rho^2 + (\rho')^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi};$$

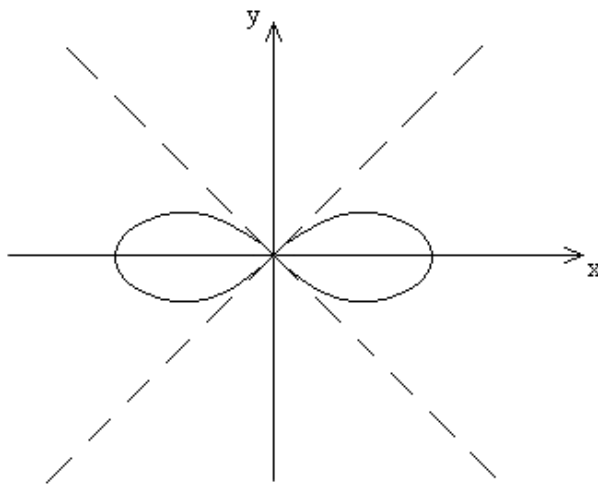


Рис. 4

$$\begin{aligned} S &= 4\pi \int_0^{\pi/4} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = 4\pi a^2 \cos \varphi \Big|_{\pi/4}^0 = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}) \quad (\text{КВ. ОД.}). \end{aligned}$$

**Завдання 8.** Змінити порядок інтегрування та зобразити область інтегрування.

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

Відновимо область інтегрування за границями інтегрування. Для цього на рисунок нанесемо лінії  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$  (рис. 5).

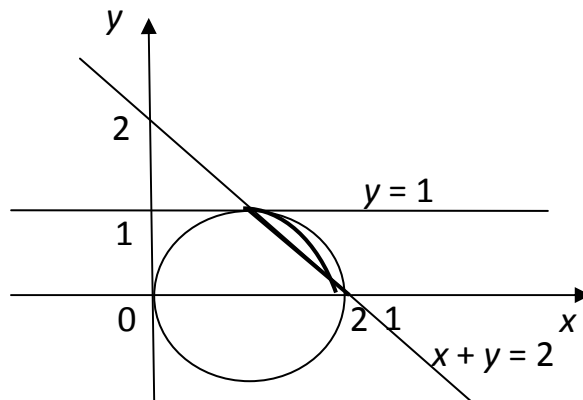


Рис. 5

Останні два рівняння представимо як  $x + y = 2$  та  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ . Змінюючи порядок інтегрування маємо:

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

**Завдання 9.** За допомогою подвійного інтеграла знайти площу плоскої фігури, обмеженої лініями (зробити рисунок).

$$D : y = x^2 - 3x, 3x + y - 4 = 0.$$

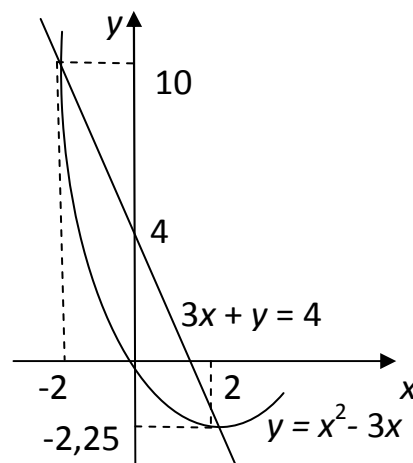


Рис. 6

Фігура обмежена знизу параболою  $y = x^2 - 3x$ , зверху прямою  $3x + y - 4 = 0$  (рис. 6).

Отже:

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-2}^2 dx \int_{x^2-3x}^{4-3x} dy =$$

$$= \int_{-2}^2 (4 - 3x - x^2 + 3x) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}.$$

**Завдання 10.** Подати подвійний інтеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  у вигляді повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням по  $x$  і з зовнішнім інтегруванням по  $y$ , якщо область  $D$  обмежена заданими лініями.

$$D: x = \sqrt{y}, \quad x = \sqrt{2+y}, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

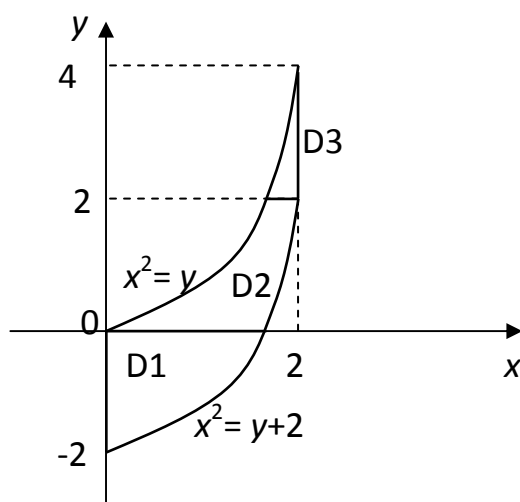


Рис. 7

Область  $D$  обмежена дугами парабол  $\begin{cases} x^2 = 2 + y, (y = x^2 - 2) \\ x^2 = y \end{cases}$  і прямими

$x = 0, \quad x = 2$  (рис. 7). Отже,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{x^2-2}^{x^2} f(x, y) dy =$$

$$= \int_{-2}^0 dy \int_0^{\sqrt{y+2}} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y+2}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx.$$

**Завдання 11.** Обчислити потрійний інтеграл.

$$\iiint_V (3x + 2y - z^3) dx dy dz, V : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 3.$$

Намалюємо область інтегрування (рис. 8).

$$\text{Згідно з формулою } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^a f(x, y, z) dz$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \iiint_V (3x + 2y - z^3) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 (3x + 2y - z^3) dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 \left( 3xz + 2yz - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_1^3 dy = \int_0^1 dx \int_0^2 (6x + 4y - 20) dy = \\ &= \int_0^1 (6xy + 2y^2 - 20y) \Big|_0^2 dx = \int_0^1 (12x - 32) dx = (6x^2 - 32x) \Big|_0^1 = -26. \end{aligned}$$

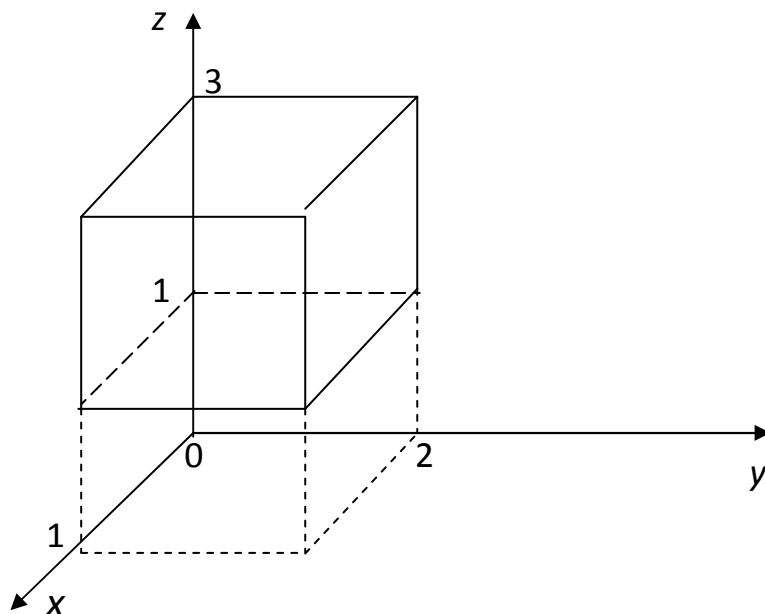


Рис. 8

**Завдання 12.** За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого даними поверхнями (зробити рисунок).

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 2, 2z = x^2 + y^2.$$

Рівняння  $2z = x^2 + y^2$  – параболоїд обертання, інші поверхні – площини.

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{(x^2+y^2)/2} dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} z \Big|_0^{(x^2+y^2)/2} dy = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{2-x} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left( x^2(2-x) + \frac{1}{3}(2-x)^3 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left( 2x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(2-x)^3 \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12} (2-x)^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} \text{ (куб. од.)}.
\end{aligned}$$

**Завдання 13.** Обчислити заданий інтеграл.

$$\int_{L_{OB}} x dl, \text{ де } L_{OB} \text{ – відрізок прямої від точки } O(0, 0) \text{ до точки } B(1, 2).$$

Запишемо рівняння прямої  $OB$  за двома точками:  $y = 2x$ .

$$\text{Отже: } dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx, \quad dl = \sqrt{5} dx;$$

$$\int_{L_{OB}} x dl = \sqrt{5} \int_0^1 x dx = \sqrt{5} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

**Завдання 14.** Обчислити заданий інтеграл.

$$\oint_L (x^2 + y^2)^n dl, \text{ де } L \text{ – коло } x^2 + y^2 = a^2.$$

Запишемо рівняння кола в параметричному вигляді:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\text{Тоді } x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = a \cos t, \quad dl = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt,$$

$$dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = a dt.$$

$$\text{Отже } \int_L (x^2 + y^2)^n dl = a^{2n+1} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^{2n+1}.$$

## МОДУЛЬ 4

### 1. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить у собі незалежну змінну  $x$ , шукану функцію  $y = f(x)$  та її похідні  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Якщо функція  $y = f(x)$  є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, що міститься в рівнянні.

Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називається функція  $y = f(x)$ , яка при підстановці її в рівняння перетворює його в тотожність.

Рівняння виду  $y' = f(x, y)$  називається звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної.

*Теорема.* Про існування та єдності розв'язку диференціального рівняння першого порядку.

Якщо для диференціального рівняння  $y' = f(x, y)$  функція  $f(x, y)$  та її похідна неперервні в деякій області  $D$  на площині  $ХОУ$ , яка містить у собі точку  $(x_0, y_0)$ , то тоді існує єдиний розв'язок диференціального рівняння  $y = \varphi(x)$ , який задовольняє умові

$$y(x_0) = y_0.$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція  $y = \varphi(x, c)$ , яка залежить тільки від сталої  $c$  і задовольняє умовам:

1. Функція  $y = \varphi(x, c)$  – перетворює в тотожність диференціальне рівняння при довільному значенні сталої  $c$ ;
2. Які б не були задані початкові умови  $y(x_0) = y_0$ , завжди знайдеться така стала  $c = c_0$ , що функція  $y = \varphi(x, c_0)$  буде задовольняти початковій умові.

Розв'язок диференціального рівняння, записаний у неявному вигляді  $\Phi(x, y, c) = 0$ , називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається функція  $y = \varphi(x, c_0)$ , яка задовольняє початковим умовам. Із геометричної точки зору, загальний інтеграл є сукупністю кривих, які називаються інтегральними кривими. Частинний інтеграл або частинний розв'язок є фіксованою інтегральною кривою, яка проходить через задану точку  $(x_0, y_0)$ .

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $x dx + y dy = 0$  при умові  $y(0) = 1$ .

*Розв'язання:* Після інтегрування отримаємо  $\int x dx + \int y dy = \int 0 dx$ ,

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2$  – загальний інтеграл диференціального рівняння.

Загальний розв'язок має вид:  $y = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$ .

Враховуючи початкову умову, знаходимо сталу  $c$ :

$$0^2 + 1^2 = c^2 \Rightarrow c = 1,$$

$x^2 + y^2 = 1$  – частинний інтеграл,

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$  – частинний розв'язок.

Із геометричної точки зору загальний інтеграл є сукупністю концентричних кіл радіуса  $c$  з центром у точці  $(0, 0)$ , а частинний інтеграл – фіксоване коло, що проходить через точку  $(0, 1)$  (рис.1).

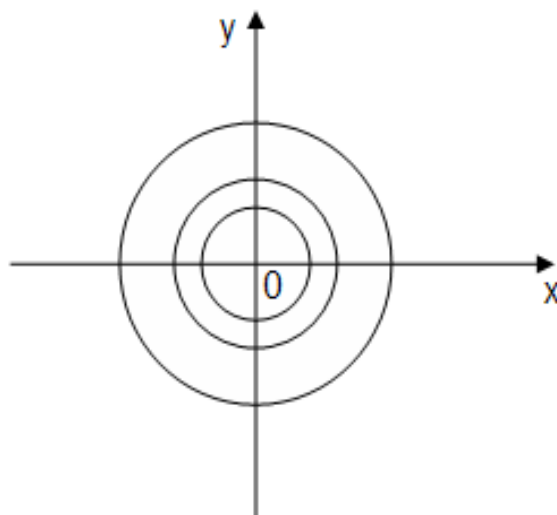


Рис. 1



### 1.1. Диференціальне рівняння з відокремленими змінними

Рівняння  $N(x)dx + M(y)dy = 0$  називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними. Його загальний інтеграл  $\int N(x)dx + \int M(y)dy = c$ .

*Приклад.* Розв'язати рівняння  $x dx + tg y dy = 0$ .

*Розв'язання:* Після інтегрування одержимо загальний інтеграл  $\frac{x^2}{2} - \ln \cos y = c$ .

### 1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння  $N_1(x)N_2(y)dx + M_1(x)M_2(y)dy = 0$  називається рівнянням з відокремлюваними змінними  $\frac{N_1(x)}{M_1(x)}dx + \frac{M_2(y)}{N_2(y)}dy = 0$ .

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $x\sqrt{1-y^2}dx + \frac{y}{x}dy = 0$ .

*Розв'язання:* Помножимо рівняння на  $\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}$ .

Маємо  $x^2 dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = 0$ .

Після інтегрування одержимо загальний інтеграл  $\frac{x^3}{3} - \sqrt{1-y^2} = c$ .

### 1.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Функція  $y = f(x)$  називається однорідною функцією  $n$ -го виміру відносно змінних  $x, y$ , якщо для довільного  $\lambda$  виконується умова:  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ .

Наприклад:  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$  – однорідна функція першого виміру. Дійсно  $f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^3 x^3 - \lambda^3 y^3} = \sqrt[3]{\lambda^3(x^3 - y^3)} = \lambda \sqrt[3]{x^3 - y^3} = \lambda f(x, y)$ .

Диференціальне рівняння  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  називається однорідним, якщо  $M(x, y)$  та  $N(x, y)$  – однорідні функції одного і того ж виміру. Це диференціальне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою нової шуканої функції  $u = \frac{y}{x}$ .

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $x^2 y' + y^2 = 0$ .

*Розв'язання:* Запишемо його у вигляді  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}$ .

Замінюємо  $\frac{y}{x} = u$ , тоді  $y = ux$  і  $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ .

Отже, одержимо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:  $x \frac{du}{dx} = -u^2 - u$  або  $\frac{du}{u^2 + u} = -\frac{dx}{x}$ . Інтеграція дає

$$\ln \frac{u}{u+1} = -\ln x + \ln c \quad \text{або} \quad \frac{u}{u+1} = \frac{c}{x}.$$

Остаточно загальний інтеграл рівняння  $\frac{y}{y+x} - \frac{c}{x} = 0$ .

#### 1.4. Диференціальні рівняння, що зводяться до однорідних

До однорідного зводяться рівняння виду  $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$ , причому  $c$  або  $c_1$  відмінні від нуля.

Зробивши заміну змінних  $\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases}$ , будемо мати

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}.$$

Підберемо  $h$  і  $k$  так, щоб вони були коренями системи

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

При цій умові рівняння зводиться до однорідного і розв'язується як попередній приклад. Але, якщо визначник системи  $\Delta = ab_1 - a_1b = 0$ , то  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$  і попередній спосіб застосувати не можна, але в цьому випадку підстановка  $l = a_1x + b_1y$  одразу перетворює рівняння в рівняння з відокремленими змінними.

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$

*Розв'язання:* Після заміни  $x = x_1 + h$ ,  $y = y_1 + k$  система (1) має вигляд:

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = 2, k = 1.$$

У результаті одержимо однорідне рівняння  $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$ , яке

розв'язуємо підстановкою  $u = \frac{y_1}{x_1}$ , тоді

$$y_1 = ux_1, \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1}; u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u}, \text{ і ми одержимо рівняння з}$$

відокремлюваними змінними  $x_1 \cdot \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}$  або  $\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}$ .

Інтеграція дає  $\arctgu - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln x_1 + \ln c$  або  $cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\arctgu}$ .

Остаточно, повертаючись до змінних  $x, y$  одержуємо:

$$c\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\frac{y-1}{\arctg \frac{y-1}{x-2}}}$$

Приклад. Розв'язати рівняння  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 1}{8x + 4y - 2}$ .

Розв'язання: Перевіряємо умову  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ .

У цьому випадку користуємося підстановкою  $t = 2x + y$ ,  $\frac{dt}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$ ,

$$\frac{dt}{dx} - 2 = \frac{t+1}{4t-2}, \frac{dt}{dx} = \frac{9t-3}{4t-2} \text{ або } \frac{dt(4t-2)}{9t-3} = dx.$$

Інтеграція дає  $\frac{4}{9}t - \frac{2}{27} \ln 3t - 1 = x + c$ .

Повертаючись до змінних  $x, y$ , остаточно одержуємо загальний інтеграл

$$\frac{4}{9}(2x + y) - \frac{2}{27} \ln(6x + 3y) - 1 = x + c.$$

### 1.5. Лінійні диференціальні рівняння і рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння першого порядку називають лінійним, якщо воно лінійне відносно шуканої функції та її похідної. Загальний вид лінійного рівняння

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \quad (2)$$

Розв'язується лінійне рівняння заміною  $y = u(x) \cdot \mathcal{G}(x)$ . Одну з функцій  $u$  або  $\mathcal{G}$  можна вибирати довільно, іншу треба визначити з рівняння (2).

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $\frac{dy}{dx} + x^2 y = x^2$ .

*Розв'язання:* Запровадимо заміну  $y = u \cdot \mathcal{G}$ , тоді  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \mathcal{G} + u \frac{d\mathcal{G}}{dx}$ .

Підставлення в рівняння дає

$$\frac{du}{dx} \mathcal{G} + u \frac{d\mathcal{G}}{dx} + x^2 u \mathcal{G} = x^2 \text{ або } \mathcal{G} \left( \frac{du}{dx} + x^2 u \right) + \frac{d\mathcal{G}}{dx} u = x^2. \quad (3)$$

Поклавши  $\frac{du}{dx} + x^2 u = 0$ , одержимо диференціальне рівняння з

відокремлюваними змінними:  $\frac{du}{u} = -x^2 dx$ , частинним розв'язком якого (при

$$c=0) \in \ln|u| = -\frac{x^3}{3} \text{ або } u = e^{-\frac{x^3}{3}}.$$

Вибравши так  $u(x)$ , зведемо (3) до рівняння  $e^{-\frac{x^3}{3}} \frac{d\mathcal{G}}{dx} = x^2$ , або

$$d\mathcal{G} = x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx, \quad \mathcal{G} = e^{x^3} + c.$$

Тому загальний розв'язок заданого рівняння буде  $y = e^{-\frac{x^3}{3}} \left( e^{x^3} + c \right)$ .

Диференціальне рівняння  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^n Q(x)$  називають рівнянням

Бернуллі.

Підстановка  $y^{-n} = z$  зводить його до лінійного. Можна також безпосередньо інтегрувати це рівняння заміною  $y = u \cdot \mathcal{G}$ , причому  $u(x)$  або

$v(x)$  добирається так, щоб  $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$ .

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y' + 2xy = 2x^3 y^3$ .

*Розв'язання:* Запишемо рівняння у вигляді  $y^{-3} y' + 2xy^{-2} = 2x^3$ .

Запровадимо заміну  $\begin{cases} y^{-2} = z \\ -2y^{-3} y' = z' \end{cases}$ , тоді  $-\frac{1}{2} z' + 2xz = 2x^3$  або

$$z' - 4xz = -4x^3.$$

Отримали лінійне рівняння яке розв'язуємо заміною  $z = uv$ ,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u,$$

$$\frac{du}{dx} \mathcal{G} + u \frac{d\mathcal{G}}{dx} - 4xu\mathcal{G} = -4x^3 \cdot \mathcal{G} \left( \frac{du}{dx} - 4xu \right) + \frac{d\mathcal{G}}{dx} \cdot u = -4x^3. \quad (4)$$

Підберемо  $u(x)$  так, щоб вона була розв'язком рівняння  $\frac{du}{dx} - 4xu = 0$ .

Звідки  $\frac{du}{u} = 4x dx$ .

Частинний розв'язок цього рівняння  $u = e^{2x^2}$ .

Вибравши так  $u(x)$ , зведемо рівняння (4) до рівняння з відокремлюваними змінними  $e^{2x^2} \frac{d\mathcal{G}}{dx} = -4x^3$ , після відокремлення змінних і

інтеграції одержимо  $d\mathcal{G} = -4x^3 e^{2x^2} dx$ ,  $\mathcal{G} = x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2} e^{-2x^2} + c$ ,

$$z = e^{2x^2} \left( x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2} e^{-2x^2} + c \right), \quad y = \left( x^2 + \frac{1}{2} + c e^{2x^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 1.6. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.

### Інтегрувальний множник

Диференціальне рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (5)$$

є рівнянням у повних диференціалах, якщо  $M(x, y)$  і  $N(x, y)$  неперервні і диференційовані функції двох змінних, для яких виконується умова:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (6)$$

причому  $\frac{\partial M}{\partial y}$  і  $\frac{\partial N}{\partial x}$  неперервні в деякій області. Тоді ліва частина рівняння

(5) являє собою повний диференціал деякої функції  $u(x, y)$  і загальний інтеграл рівняння (5) є  $u(x, y) = c$ .

Коли рівняння (6) не виконується, то після множення рівняння (5) на деякий множник  $\mu(x, y)$ , буде виконуватись умова

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \quad (7)$$

Тоді рівняння називають рівнянням, що зводиться до рівняння у повних диференціалах. Функція  $\mu(x, y)$ , яка задовольняє умові (7), називається інтегровальним множником, тепер вже вираз  $\mu(x, y)[M(x, y)dx + N(x, y)dy]$  є повним диференціалом.

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $\frac{2x}{y^2}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ .

*Розв'язання:* Спочатку перевіримо, чи є це рівняння в повних диференціалах. Позначимо  $M(x, y) = \frac{2x}{y^3}$ ,  $N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ , тоді  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-6x}{y^4}$ ,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-6x}{y^4}.$$

Умова (6) виконується в будь-якій області, яка не містить у собі відрізків осі абсцис. Отже, ліва частина даного рівняння є повний диференціал функції  $u(x, y)$ .

Знайдемо цю функцію. Оскільки  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} = N$ , то

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y), \text{ де } \varphi(y) \text{ — поки що невизначена функція від } y.$$

Диференціюючи це співвідношення по  $y$  і враховуючи, що  $\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ , знаходимо  $-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ .

$$\text{Отже, } \varphi'(y) = \frac{1}{y^2}. \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + c, \quad u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + c.$$

$$\text{Таким чином, шуканий загальний інтеграл } \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c.$$

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0.$$

*Розв'язання:* У даному рівнянні  $M(x, y) = x \sin y + y \cos y$ ;  
 $N(x, y) = x \cos y - y \sin y$ .

$$\text{Знайшовши частинні похідні } \frac{\partial M}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y,$$

переконаємось, що умова (6) не виконується, тобто ліва частина заданого

рівняння не є повним диференціалом. Розглянувши різницю  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x \cos y - \sin y$  і вирази  $M(x, y)$  і  $N(x, y)$ , приходимо до висновку,

що інтегральний множник залежить лише від  $x$ , тобто  $\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = 1$ , звідки  $d \ln \mu = dx, \ln \mu = x, \mu = e^x$ .

Помножимо задане рівняння на  $e^x$ , одержимо рівняння в повних диференціалах  $e^x(x \sin y + y \cos y)dx + e^x(x \cos y - y \sin y)dy = 0$ , тобто ліва частина одержаного рівняння є повний диференціал деякої функції  $u(x, y)$ , для якої:  $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x \sin y + y \cos y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x \cos y - y \sin y)$ .

За даною частинною похідною  $\frac{\partial u}{\partial x}$  знаходимо значення  $u(x, y)$  з точністю до довільної функції  $\varphi(y)$ :

$$u(x, y) = \int e^x x \sin y dx + \int e^x y \cos y dx + \varphi(x, y) = \sin y \int x e^x dx + e^x y \cos y + \varphi(x, y) = x e^x \sin y - e^x \sin y + e^x y \cos y + \varphi(x, y)$$

Продиференціюємо функцію  $\varphi(x, y)$  по  $y$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x e^x \cos y - e^x \sin y + \varphi'(x, y).$$

Прирівнюючи одержаний вираз до вже відомого, одержимо  $\varphi'(x, y) = 0$ , звідки  $\varphi(x, y) = c$ .

$$\text{Отже, } u(x, y) = x e^x \sin y + y e^x \cos y - e^x \sin y + c.$$

## 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

Теорема про існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння. Якщо для диференціального рівняння  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . (8)

Функція  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  – неперервна по  $x, y$  і частинним похідним у деякій області, яка містить значення  $x = x_0, y = y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ , то існує і причому єдиний розв'язок  $y = y(x)$ , що задовольняє цим умовам.

Функцію  $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$  називають розв'язком диференціального рівняння (8) якщо:

1) при довільних значеннях сталих  $c_1, c_2, \dots, c_n$  вона задовольняє диференціальному рівнянню;

2) для заданих початкових умов  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$  завжди можна підібрати такі сталі  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , що функція  $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$  буде задовольняти початковим умовам.

## 2.1 Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ .

Це рівняння є найпростішим  $n$ -го порядку, а його загальний інтеграл знаходимо шляхом  $n$ -кратної квадратури

$$y = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_n}^x f(x) dx \dots dx + c_1 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n.$$

*Приклад.* Знайти загальний інтеграл рівняння  $y'' = \sin x$ .

*Розв'язання:* Знаходимо  $y' = \int \sin x dx = -\cos x + c_1$ .

Після другої інтеграції маємо  $y = \int y' dx = \int (-\cos x + c_1) dx = -\sin x + c_1 x + c_2$ .

## 2.2 Диференціальні рівняння другого порядку, що приводяться до диференціальних рівнянь першого порядку

Диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (9)$$

не містить явно шуканої функції  $y(x)$ . Поклавши в (9)  $y' = p(x)$ , одержимо рівняння першого порядку.

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $x \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$ .

*Розв'язання:* Покладемо  $\frac{dy}{dx} = p$ , тоді  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$  і одержимо диференціальне рівняння першого порядку відносно допоміжної функції

$$p(x): x \frac{dp}{dx} = p.$$

Відокремлюючи змінні, маємо:  $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$ , звідки  $\ln p = \ln x c_1$  або  $p = x c_1$ .

Після інтеграції маємо  $\frac{dy}{dx} = x c_1$ ,  $y = \frac{x^2}{2} c_1 + c_2$ .



Це є загальний розв'язок рівняння.

Диференціальне рівняння  $\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$  не містить явно незалежної змінної  $x$ . У цьому випадку покладемо  $\frac{dy}{dx} = p(y)$  і будемо вважати  $y$  за незалежну змінну. Матимемо

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Підставивши  $\frac{dy}{dx}$  і  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  в задане рівняння, дістанемо рівняння першого порядку відносно допоміжної функції  $p(x)$ .

*Приклад.* Розв'язати рівняння  $y'' = 2y \cdot y'$ .

*Розв'язання.* Маємо рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежної змінної  $x$ . Покладемо  $y' = p(y)$ ;  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ .

Одержимо  $p \frac{dp}{dy} = 2yp$ .

Відокремлюючи змінні, отримаємо  $dp = 2y dy$ .

Інтеграція дає  $p = y^2 + c_1$ .

Оскільки  $p = \frac{dy}{dx}$ , знову одержимо диференціальне рівняння першого порядку відносно шуканої функції  $y(x)$ :  $\frac{dy}{dx} = y^2 + c_1$ .

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, дістанемо  $\frac{dy}{y^2 + c_1} = dx$ ,

$\frac{1}{\sqrt{c_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{c_1}} = x + c_2$  – загальний інтеграл заданого диференціального рівняння.

### 2.3 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (10)$$

де  $y$  – шукана функція,  $p, q$  – задані числа.

Загальний розв'язок рівняння (10) записується у вигляді

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

де  $c_1, c_2$  – сталі інтегрування,  $y_1, y_2$  – частинні лінійно-незалежні розв'язки. Для їх визначення необхідно розв'язати характеристичне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Можливі випадки:

1. Корені характеристичного рівняння  $k_1, k_2$  – дійсні і різні. Тоді маємо  $y_1 = e^{k_1 x}$ ,  $y_2 = e^{k_2 x}$ .

2. Корені характеристичного рівняння  $k_1, k_2$  – комплексно-спряжені числа, тобто числа виду  $\alpha \pm \beta i$ , тоді:  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

3. Характеристичне рівняння має дійсні кратні корені  $k_1 = k_2$ , тоді  $y_1 = e^{kx}$ ,  $y_2 = e^{kx} \cdot x$ .

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 0$ .

*Розв'язання:* Характеристичне рівняння має дійсні і різні корені  $k_1 = 2, k_2 = 1$ . Тоді  $y_1 = e^{2x}$ ,  $y_2 = e^x$ . Загальний розв'язок рівняння  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$ .

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $y'' + 3y' + 4y = 0$ .

*Розв'язання:* Характеристичне рівняння має комплексно-спряжені корені  $k_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$ ,  $k_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$ . Тоді  $y_1 = e^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x$ ,  $y_2 = e^{-\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x$ .

Загальний розв'язок рівняння  $y = e^{-\frac{3}{2}x} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x \right)$ .

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $y'' - 6y' + 9y = 0$ .

*Розв'язання:* Характеристичне рівняння  $k^2 - 6k + 9 = 0$  має корені  $k_1 = k_2 = 3$ . Тоді  $y_1 = e^{3x}$ ,  $y_2 = x e^{3x}$ , загальний розв'язок  $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ .

Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де  $f(x)$  – неперервна функція.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сума будь-якого його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного лінійного рівняння  $y = \bar{y} + y^*$ ;

де  $\bar{y}$  – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а  $y^*$  – будь-який частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

При певній структурі функції  $f(x)$  для знаходження частинного розв'язку  $y^*$  неоднорідного рівняння вдаються до методу невизначених коефіцієнтів.

Окремі випадки:

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x},$$

де  $P_n(x)$  – многочлен ступеня  $n$ , тоді:  $y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$ .

Причому стала  $\alpha$  відмінна від коренів характеристичного рівняння,  $Q_n(x)$  – багаточлен ступеня  $n$  із невизначеними коефіцієнтами, які визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаної внаслідок підстановки  $y^*$  в рівняння і прирівнювання коефіцієнтів при однакових ступенях змінної  $x$ .

Якщо  $\alpha$  збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, то  $y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$ .

Якщо  $\alpha$  є двократним коренем характеристичного рівняння, то  $y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$ .

Якщо  $f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x$ , причому  $\beta$  не є коренем характеристичного рівняння, то  $y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x$ .

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального неоднорідного рівняння  $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$ .

*Розв'язання:* Характеристичне рівняння  $2k^2 + 5k = 0$  має корені  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = -\frac{5}{2}$ , тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд  $\bar{y} = c_1 + c_2 e^{-\frac{5}{2}x}$ .

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі  $y^* = (ax^2 + bx + c)x$ , де  $a$  і  $b$  – сталі коефіцієнти, які треба визначити.

Підставлення  $y^*$ , та його похідних у рівняння дає систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 15a = 5 \\ 12a + 10b = -2, \text{ звідки } a = +\frac{1}{3}, b = -\frac{3}{5}, c = \frac{7}{25}. \\ 4b + 5c = -1 \end{cases}$$

Загальний розв'язок даного рівняння  $y = \bar{y} + y^*$ , тобто

$$y = c_1 + c_2 e^{\frac{5}{2}x} + \left( \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{7}{25} \right) x.$$

*Приклад.* Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 13y = 12e^{2x} \sin 3x, \quad (3)$$

який задовольняє початковим умовам:  $y|_{x=0} = 7; y'|_{x=0} = 24$ .

*Розв'язання:* Знаходимо загальний розв'язок  $y = \bar{y} + y^*$ .

Характеристичне рівняння  $k^2 - 4k + 13 = 0$  має корені  $k_1 = 2 + 3i$ ;  $k_2 = 2 - 3i$ . Тоді  $\bar{y} = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$ .

Враховуючи структуру правої частини даного рівняння, а також те, що характеристичне рівняння має просту пару комплексно-спряжених коренів, а саме  $k_{1,2} = 2 \pm 3i$ , шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у формі  $y^* = e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)x$ .

Тоді:

$$\begin{aligned} y^{*'} &= 2e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)x + e^{2x}(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x)x + \\ &+ e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x); \\ y^{*''} &= 4e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)x + 2e^{2x}(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x)x + \\ &+ 2e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x) + 2e^{2x}(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x)x + \\ &+ e^{2x}(-9A \cos 3x - 9 \sin 3x)x + e^{2x}(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) + \\ &+ 2e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x) + e^{2x}(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x). \end{aligned}$$

Підставивши  $y^*$ ,  $y^{*'}$ ,  $y^{*''}$  в (3), знайдемо тотожність  $2e^{2x}(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) = 12e^{2x} \sin 3x$ .

Порівняння коефіцієнтів при  $\sin 3x$  і  $\cos 3x$  дає значення  $A = -2, B = 0$ .

Тому частинний розв'язок буде  $y^* = -2xe^{2x} \cos 3x$ , а загальний

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) - 2xe^{2x} \cos 3x = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - 2x \cos 3x).$$

Враховуючи початкові умови, дістанемо систему  $\begin{cases} 7 = c_1, \\ 24 = 2c_1 + 3c_2 - 2. \end{cases}$

Звідси  $c_1 = 7, c_2 = 4$ . Підставивши ці значення в загальний розв'язок даного рівняння, одержимо шуканий частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам:  $y = e^{2x}(7 \cos 3x + 4 \sin 3x - 2x \cos 3x)$ .

Відповідь:  $y = e^{2x}(7 \cos 3x + 4 \sin 3x - 2x \cos 3x)$ .

Якщо права частина диференціального рівняння має довільну форму, то для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння використовують спосіб варіації довільних сталих. Він полягає в тому, що в загальному розв'язку однорідного рівняння  $c_1$  і  $c_2$  розглядаємо, як деякі поки що невідомі функції від  $x$ . Знаходячи від  $\bar{y} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$  похідні  $\bar{y}'$  і  $\bar{y}''$  і підставляючи в рівняння, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 = f(x) \end{cases}, \text{ з якої визначаємо } c_1 \text{ і } c_2.$$

*Приклад.* Розв'язати диференціальне рівняння  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ .

*Розв'язання:* Розглянемо однорідне рівняння  $y'' - 2y' + y = 0$ .

Відповідне йому характеристичне рівняння  $k^2 - 2k + 1 = 0$  має корені  $k_1 = k_2 = 1$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ .

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо за методом варіацій довільних сталих. Маємо систему двох рівнянь для визначення  $c_1'(x), c_2'(x)$ :

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' \cdot x e^x = 0 \\ c_1' e^x + c_2' e^x + c_2' x e^x = \frac{e^x}{x^2 + 1} \end{cases}.$$

Звідси  $c_1' = -\frac{x}{x^2 + 1}, c_2' = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

Інтегруючи, знаходимо  $c_2 = \arctg x + \bar{c}_2, c_1 = -\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \bar{c}_1$ .

Підставляючи вирази для  $c_1$  і  $c_2$  в загальний розв'язок однорідного рівняння, одержимо  $y = \overline{c_1}e^x - \frac{1}{2}e^x \ln|x^2 + 1| + xe^x(\operatorname{arctg}x + \overline{c_2})$ . Це і є шуканий розв'язок неоднорідного рівняння.

### 3. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Загальний вигляд системи звичайних однорідних диференціальних рівнянь такий:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Розв'язати систему – означає відшукати такі функції  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , які перетворюють систему рівнянь у сукупність тотожностей.

Система  $n$  лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами шляхом послідовного виключення  $(n-1)$ -ї невідомої функції, зводиться до одного лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку відносно однієї функції.

*Приклад.*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 6y \end{cases}$$

*Розв'язання:* З другого рівняння маємо  $4x = \frac{dy}{dt} - 6y$ .

Підставлення в перше рівняння системи дає  $\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} + 16y = 0$ .

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння  $k^2 - 10k + 16 = 0$  має корені  $k_1 = 8, k_2 = 2$ .

Тоді  $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}$ .

Шукану функцію  $x$  знайдемо з другого рівняння системи  $x = \frac{1}{2} c_1 e^{8t} - c_2 e^{2t}$ .

Загальний вигляд системи звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами таких:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \varphi_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \varphi_2(t) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + \varphi_n(t) \end{cases}$$

Послідовним виключенням невідомих функцій система зводиться до одного диференціального неоднорідного рівняння  $n$ -го порядку.

Приклад.  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y + e^t \end{cases}$ .

Розв'язання: Виключимо невідому  $y$  з першого рівняння  $y = x - \frac{dx}{dt}$ .

Підставлення у друге рівняння системи дає лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = +e^t$ , загальний розв'язок якого має вигляд:

$x = e^t (c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1)$  тоді  $y = x - \frac{dx}{dt} = e^t (c_1 \sin t - c_2 \cos t)$ .

## ВАРІАНТ 1

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x}} dx$	2. $\int \sqrt{3 + x} dx$	3. $\int \frac{dx}{3 - x}$	4. $\int \sin(2 - 3x) dx$
5. $\int \frac{\sqrt{3} dx}{9x^2 - 3}$	6. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$	7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x^2}}$	8. $\int \cos^2 3x dx$
9. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - 2x}} dx$	10. $\int \frac{5x^2}{5 - 2x^3} dx$	11. $\int (3 - 5x) \ln x dx$	12. $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 4x + 5} dx$
13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}}$	14. $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$	15. $\int \frac{x dx}{x^2 - 5x + 6}$	16. $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^3 3x}} dx$
17. $\int \sqrt{4^x - 94^x} dx$	18. $\int x \cos 3x dx$	19. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$	20. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + x^2} dx$	2. $\int_2^3 y \ln(y - 1) dy$	3. $\int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$
4. $\int_0^2 x^2 \sqrt{x - x^2} dx$	5. $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$	6. $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x + 3)^4}$	2. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}$	3. $\int_2^3 \frac{4x dx}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}}$	4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$
---	---	--	---

**Завдання 4.**  $\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$ .

**Завдання 5.**  $x = 2(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = 2(\sin t - t \cos t)$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ).

**Завдання 6.**  $\Phi: x^2/9 + y^2/4 = 1$ ,  $Oy$ .

**Завдання 7.**  $L: \rho = 4 \sin \varphi$ , полярна вісь.

**Завдання 8.**  $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y) dy$ .



**Завдання 9.**  $X = y, \quad x = 2y, \quad x + y = 3, \quad x + 3y = 3.$

**Завдання 10.**  $D: y = \sqrt{4 - x^2}, \quad y = \sqrt{3x}, \quad x \geq 0.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (2x^2 + 3y + z) dx dy dz, \quad V: 2 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2,$   
 $0 \leq z \leq 4.$

**Завдання 12.**  $z^2 = 4 - x, \quad x^2 + y^2 = 4x.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy,$  де  $L_{AB}$  – дуга параболи

$y = x^2$  від точки  $A(-1, 1)$  до точки  $B(1, 1)$ .

**Завдання 14.**  $\int_L \sqrt{2 - z^2} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl,$  де  $L$  – дуга кривої  
 $x = t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

#### Модуль 4

1. $x \cos 5x dx - \frac{dy}{y \ln^2 y} = 0$	2. $y' = \sqrt{y^2 + 4} \cdot \ln^2 x$
3. $xy' - y = \sqrt{4x^2 + y^2}$	4. $y' = e^{\frac{x+y-3}{x-y-1}}$
5. $y' + \frac{x^2 y}{x^3 + 1} = x^2 + x^5$	6. $y' + \frac{y}{x} = \sqrt{y} \ln x$
7. $xy' \cos y + \sin y = 0$	8. $\sqrt{1 + x^2} y'' - 1 = 0$
9. $y'' - \frac{y'}{x} = x \operatorname{arctg} x$	10. $2y'' = \sqrt{(1 + y')^2}$
11. $3y'' - 4y' + 2y = 0$	12. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} + \sin 2x$
13. $y'' + y' - 6y = (2x^2 - 2x - 7)e^x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + 4y = \sec 2x$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 6y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2x + y = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - x - 5e^t \sin t \end{cases}$

## ВАРІАНТ 2

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx$	2. $\int \sqrt[3]{1+x} dx$	3. $\int \frac{dx}{3x+9}$	4. $\int \sin(3-2x) dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}}$	6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}$	7. $\int \frac{dx}{2x^2-5}$	8. $\int \operatorname{tg}^2 5x dx$
9. $\int \frac{dx}{2x-\sqrt{x}}$	10. $\int x \sin \frac{x}{3} dx$	11. $\int \frac{2-3x}{x^2+2x+10} dx$	12. $\int x \cos 5x dx$
13. $\int \frac{(2-x)}{\sqrt{8-x^2}-2x} dx$	14. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$	15. $\int (x+3)e^{2x} dx$	16. $\int \frac{dx}{x^2-4x^2+6x}$
17. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx$	18. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$	19. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$	20. $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+1}}$	2. $\int_0^{\pi/9} \frac{xdx}{\cos^2 3x}$	3. $\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x+1}$
4. $\int_0^{1/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	5. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$	6. $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x-21}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\cos 2x}$	2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$	3. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4)^2}$	4. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+3)^2}$
--	---	--	--

**Завдання 4.**  $y = x^2, y = 3-x.$

**Завдання 5.**  $\rho = \sin^3(\varphi/3), (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$

**Завдання 6.**  $\Phi : y^3 = x^2, y = 1, Ox.$

**Завдання 7.**  $L : x = \cos t, y = 2 + \sin t, Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_{-6}^2 dy \int_{(y^2/4)-1}^{2-y} f(x, y) dx.$

**Завдання 9.**  $y^2 = 10x + 25, y^2 = -6x + 9.$

**Завдання 10.**  $D: x^2 = 2y, 5x - 2y - 6 = 0.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V x^2 yz dx dy dz, V: -1 \leq x \leq 2,$   
 $0 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 3.$

**Завдання 12.**  $z = 4 - y^2, x^2 + y^2 = 4, z \geq 0.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}},$  де  $L_{AB}$  – дуга астроїди  $x = 2 \cos^3 t,$   
 $y = 2 \sin^3 t$  від точки  $A(2, 0)$  до точки  $B(0, 2).$

**Завдання 14.**  $\oint_L (x^2 + y^2) dl,$  де  $L$  – коло  $x^2 + y^2 = 4.$

#### Модуль 4

1. $\sin^2 x \cos^2 x dx + \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 2y + 5}} = 0$	2. $y' = \frac{x \sin x}{\cos^4 y}$
3. $(x^2 + y^2) dx - xy dy = 0$	4. $y' = \frac{3x - y + 2}{2x + y}$
5. $y' + \frac{y}{(x-2)(x-4)} = \sqrt{x-2}$	6. $y' + \frac{y}{x+1} = \frac{\sqrt{y}}{x}$
7. $(6y^2 - 3x^2 y + 1)y' - 3xy^2 + x^2 = 0$	8. $y''' \sin^3 x = 2 \cos x$
9. $y'' - \frac{y'}{x} = x^2 \ln x$	10. $(y-4)(y-5)y'' = (y')^2$
11. $y'' + 2y' + y = 0$	12. $y'' - y' = e^x + \cos x - 3 \sin x$
13. $y'' + y' - 2y = 3e^x; y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 3$	14. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$

## ВАРІАНТ 3

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x+4x^2-5}}{2x^2} dx$	2. $\int \sqrt[3]{(1+x)^2} dx$	3. $\int \frac{dx}{2-3x}$	4. $\int \sin(5-3x) dx$
5. $\int \frac{dx}{9x^2+3}$	6. $\int \frac{3x dx}{4x^2+1}$	7. $\int \frac{dx}{5x^2+2}$	8. $\int \sin 3x \cos 5x dx$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$	10. $\int (2x+1) \cos x dx$	11. $\int \frac{x dx}{2x^2+4x-7}$	12. $\int \frac{dx}{2+\operatorname{tg} x}$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$	14. $\int \frac{(\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 1)}{\cos^2 x} dx$	15. $\int x \ln 4x dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3+2x^2}$
17. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx$	18. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$	19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$	20. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1}$	2. $\int_{-2}^0 x^2 e^{-x/2} dx$	3. $\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1} dx$
4. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$	5. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$	6. $\int_{-1/2}^1 \frac{x^3}{x^2+x-1} dx$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$	2. $\int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4-1}$	3. $\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^2}$	4. $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{(x^2-4)^3}} dx$
------------------------------------	---	---	---

**Завдання 4.**  $y = \sqrt{x}, y = x^3$ .

**Завдання 5.**  $\rho = 2 \sin^3(\varphi/3) (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t), Ox$ .

**Завдання 7.**  $L: x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, Ox$ .

**Завдання 8.**  $\int_0^1 dy \int_{y^{2/3}}^y f(x, y) dx$ .

**Завдання 9.**  $x = -y^2 + 5, x = 4y$ .

**Завдання 10.**  $D : x = \sqrt{8 - y^2}, \quad y \geq 0, \quad y = x.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x + y + 4z^2) dx dy dz, \quad V : -1 \leq x \leq 1,$

$0 \leq y \leq 2, \quad -1 \leq z \leq 1.$

**Завдання 12.**  $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 2 - x - y, \quad z \geq 0.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{OA}} (x^2 - y^2) dx + 2xy dy,$  де  $L_{OA}$  – дуга кубічної параболи

$y = x^3$  від точки  $O(0, 0)$  до точки  $A(1, 1)$ .

**Завдання 14.**  $\int_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}},$  де  $L_{OB}$  – відрізок прямої, що з'єднує точки  $O(0, 0)$  та  $B(2, 2)$ .

#### Модуль 4

1. $\frac{e^x dx}{e^x + 1} + tg^2 3y dy = 0$	2. $\frac{2x(1 - e^y) dx}{(1 + x^2)^2} + \frac{e^y dy}{1 + x^2} = 0$
3. $x^3 dy + (3x^2 y + y^3) dx = 0$	4. $\frac{dy}{dx} = \sin\left(\frac{2x - y}{x + 3y + 1}\right)$
5. $y' + \frac{y}{(x + 1)(x - 5)} = \sqrt{x - 3}$	6. $y' - \frac{y}{x} = \sqrt{xy} tg^2 x$
7. $(y^2 + x^2) y' + 2x(y + 2x) = 0$	8. $y'' = \arcsin x$
9. $y'' - \frac{y'}{x} = x^2 \sin x$	10. $(y + 1)(y + 2) y'' = (y')^2$
11. $4y'' + 9y = 0$	12. $y'' + y = x - 2 + e^x \sin x$
13. $y'' - 2y' + y = 2e^x; y _{x=0} = -1; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' - y = \frac{1}{1 + e^x}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 11y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y + t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y \end{cases}$

## ВАРІАНТ 4

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{2\sqrt{x-x^2+3}}{\sqrt[3]{x}} dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$	3. $\int \frac{dx}{1-4x}$	4. $\int \cos(2+3x) dx$
5. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$	6. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}$	7. $\int \frac{dx}{2x^2+3}$	8. $\int \sin^2 4x dx$
9. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} dx$	10. $\int (1-3x)\sin x dx$	11. $\int \frac{2x-1}{x^2+4x-5} dx$	12. $\int \frac{\cos x}{2\sin x-5} dx$
13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-4}} dx$	14. $\int \frac{\sqrt{\ln x+3}}{x} dx$	15. $\int \arcsin 2x dx$	16. $\int \frac{xdx}{x^3-8}$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$	18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x \cos x}$	19. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$	20. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$	2. $\int_{1/2}^1 \arcsin(1-x) dx$	3. $\int_4^5 \frac{dx}{x^2(x-1)}$
4. $\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$	5. $\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x dx$	6. $\int_4^5 \frac{xdx}{x^4-4x^2+3}$

#### Завдання 3.

1. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$	2. $\int_0^{\infty} \frac{\arctg 2x}{\pi(1+4x^2)} dx$	3. $\int_{-3}^0 \frac{dx}{(2x+6)^3}$	4. $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{dx}{x^7 \sqrt{\ln^5 x}}$
---	---	--------------------------------------	---

**Завдання 4.**  $x = 7 \cos^3 t, y = 7 \sin^3 t.$

**Завдання 5.**  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}.$

**Завдання 6.**  $\Phi : x = 3 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t (0 \leq t \leq \pi/2), O_y.$

**Завдання 7.**  $L : y = x^3$  між прямими  $x = \pm 2/3, O_x.$

**Завдання 8.**  $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$

**Завдання 9.**  $y = 10 - x, xy = 9, x = 7, x = 9.$

**Завдання 10.**  $D: x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1, y = \ln x.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 3,$

$-1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2.$

**Завдання 12.**  $z = y^2, x \geq 0, z \geq 0, x + y = 2.$

**Завдання 13.**  $\oint_L (x + 2y) dx + (x - y) dy,$  де  $L$  – коло

$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$  при додатному напрямку обходу.

**Завдання 14.**  $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl,$  де  $L_{AB}$  – відрізок прямої  $AB; A(-1, 0);$

$B(0, 1).$

#### Модуль 4

1. $\frac{xdx}{\sin^2 x} - ctg^2 y dy = 0$	2. $\cos^2 y ctg x dx + \sin^2 y tgy dy = 0$
3. $y^2 dx - (x^2 + xy) dy = 0$	4. $y' = \frac{2x - 2y + 3}{3x - 7y + 1}$
5. $2y' + \frac{y}{(x-2)(x-4)} = \sqrt{x-2}$	6. $y' + \frac{y}{x} = y^3 x^2 \arcsin x$
7. $(y^2 + x^2 + 3)y' + 2xy + x^2 + 6 = 0$	8. $y'' = \ln x$
9. $y'' - \frac{y'}{x} = xe^{2x}$	10. $y'' y^3 = 1$
11. $y'' - 4y' + 4y = 0$	12. $y'' - 4y = e^x + \cos 3x$
13. $y'' + 9y' - 10y = 11e^x + 11\cos x + 9\sin x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 8$	14. $y'' + y = \sec x$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 5x + 3y = 2e^{3t}, \\ \frac{dx}{dt} = 5e^{-t} + x + y \end{cases}$

## ВАРІАНТ 5

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x-2x+5}}{x^2} dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}$	3. $\int \frac{dx}{2+3x}$	4. $\int \cos(3+2x) dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$	6. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{8x^2-9}}$	7. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$	8. $\int \cos^3 4x dx$
9. $\int \frac{dx}{3x+\sqrt{x}}$	10. $\int (8-x)e^x dx$	11. $\int \frac{1-4x}{x^2+6x-7} dx$	12. $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^3} dx$
13. $\int \frac{x}{x^2-7x+13} dx$	14. $\int \frac{dx}{1+5\cos x}$	15. $\int \frac{x}{\sin^2 4x} dx$	16. $\int \frac{xdx}{x^2-2x-8}$
17. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$	18. $\int \sqrt[4]{x^3-12x^2} dx$	19. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$	20. $\int \frac{dx}{\cos x-2\sin x+3}$

#### Завдання 2.

1. $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$	2. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$	3. $\int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x-1)} dx$
4. $\int_0^{\sqrt{2,5}} \frac{dx}{(5-x^2)^3}$	5. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\sin x} dx$	6. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$

#### Завдання 3.

1. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$	2. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$	3. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+2x+5}$	4. $\int_1^e \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}$
---	--	---	---

**Завдання 4.**  $\rho = 4 \cos 3\varphi$ .

**Завдання 5.**  $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$ .

**Завдання 6.**  $\Phi : y^2 = x, \quad x^2 = y, \quad O_x$ .

**Завдання 7.**  $L : \rho^2 = 9 \cos 2\varphi$ , полярна вісь.

**Завдання 8.**  $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$ .

**Завдання 9.**  $y = 11 - x^2, \quad y = -10x$ .



**Завдання 10.**  $D: x^2 = 2 - y, \quad x + y = 0.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V x^2 y^2 z dx dy dz, \quad V: -1 \leq x \leq 3,$

$0 \leq y \leq 2, \quad -2 \leq z \leq 5.$

**Завдання 12.**  $y \geq 0, z \geq 0, z = x, x = \sqrt{9 - y^2}, x = \sqrt{25 - y^2}.$

**Завдання 13.**  $\oint_L (x^2 y - x) dx + (y^2 x - 2y) dy,$  де  $L$  – дуга еліпса

$x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$  при додатному напрямку обходу.

**Завдання 14.**  $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5(x-y)}},$  де  $L_{AB}$  – відрізок прямої, замкнений між точками  $A(0, 4)$  та  $B(4, 0)$ .

#### Модуль 4

1. $x 3^x dx - \frac{y^2 dy}{y^6 + 4} = 0$	2. $\sqrt{y} dx + x^2 dy = 0$
3. $(x^2 - xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$	4. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 2y + 2}{3x + 2y - 1}$
5. $y' + \frac{2y}{1 - x^2} = \frac{1 - x}{(1 + x)^3}$	6. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$
7. $(y^2 - x)y' - y + x^2 = 0$	8. $y''' = x e^{2x}$
9. $y'' - \frac{y'}{x} = x \sin x$	10. $1 + (y')^2 = y y''$
11. $y'' - 2y' + 17y = 0$	12. $y'' - y' - 2y = e^{-x}(x + 2)$
13. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1};$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + y = \sec^2 x$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3y - 5x = t e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + e^{3t} - y \end{cases}$

## ВАРІАНТ 6

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$	3. $\int \frac{dx}{2-5x}$	4. $\int \sin(4-2x) dx$
5. $\int \frac{dx}{7x^2-4}$	6. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$	7. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}$	8. $\int \sin 2x \sin 6x dx$
9. $\int x\sqrt{1-3x} dx$	10. $\int x e^{-\frac{x}{2}} dx$	11. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx$	12. $\int \frac{dx}{1-\sin^2 x}$
13. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$	14. $\int \frac{(e^{-x}+5)^3}{e^x} dx$	15. $\int \ln(3x+1) dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3+1}$
17. $\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{x-2\sqrt{x+1}+2}$	18. $\int \operatorname{ctg}^2 5x dx$	19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$	20. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$	2. $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$	3. $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$
4. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$	5. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$	6. $\int_{-3/2}^2 \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4} dx$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$	2. $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$	3. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$	4. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$
--	--	----------------------------------	--

**Завдання 4.**  $\rho = 3 \cos 2\varphi$ .

**Завдання 5.**  $y^2 = (x+1)^3$ , що відсікаються прямою  $x = 4$ .

**Завдання 6.**  $\Phi : y^2 = (x-1)^3, x = 2, Ox$ .

**Завдання 7.**  $L : x = 2 \cos t, y = 3 + 2 \sin t, Ox$ .

**Завдання 8.**  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$ .

**Завдання 9.**  $y = \frac{1}{x}, y = 6e^x, y = 1, y = 6$ .

**Завдання 10.**  $D: y = \sqrt{2-x^2}, y = x^2.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x+y+z) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1,$   
 $-1 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2.$

**Завдання 12.**  $x^2 + y^2 = 4, z = 4 - x - y, z \geq 0.$

**Завдання 13.**  $\oint_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2 y dy,$  де  $L_{AB}$  – дуга еліпса  
 $x = \cos t, y = 2 \sin t$  від точки  $A(1, 0)$  до точки  $B(0, 2).$

**Завдання 14.**  $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dl,$  де  $L$  – дуга кардіоїди  
 $\rho = 2(1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$

#### Модуль 4

1. $\arcsin x dx + \frac{2^y dy}{\sqrt{1-4^y}} = 0$	2. $\cos^2 y dx - (x^2 + 1) dy = 0$
3. $y - xy' = \sqrt{x^2 - y^2}$	4. $y'(2x + y) = -5x + 2y + 2$
5. $y' - \frac{xy}{x^2 - 9} = x^3$	6. $y' + xy^3 = xy$
7. $(y^2 + x^2 + 8)y' + 2xy = 0$	8. $y'' \sin^3 x = \sin 2x$
9. $y'' - \frac{y'}{x} = x \cos^2 x$	10. $yy'' + (y')^2 = 0$
11. $y'' + 2y' - 8y = 0$	12. $y'' + y = e^{-x}(x+2) + e^x \sin x$
13. $y'' + 2y' - 3y = 4 \cos 2x - 7 \sin 2x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + e^t \end{cases}$

## ВАРІАНТ 7

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( \sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} + 3 \right) dx$	2. $\int (1 - 4x)^7 dx$	3. $\int \frac{dx}{3x - 2}$	4. $\int \cos(5 - 2x) dx$
5. $\int \frac{3dx}{\sqrt{7x^2 - 4}}$	6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9 - 8x^2}}$	7. $\int \frac{dx}{3x^2 - 7}$	8. $\int \sin^3 5x dx$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 4x}$	10. $\int x \ln(1 - x) dx$	11. $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 6x} dx$	12. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 3}} dx$
13. $\int e^{x^2 + 2x} (x + 1) dx$	14. $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx$	15. $\int \operatorname{arctg} 4x dx$	16. $\int \frac{xdx}{(x - 1)(x^2 - x + 2)}$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 25}}$	18. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x - 3\sin^2 x}$	19. $\int \frac{dx}{x^2(x + \sqrt{1 + x^2})}$	20. $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$	2. $\int_1^2 (y - 1) \ln y dy$	3. $\int_2^3 \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx$
4. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2} dx$	5. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx$	6. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$	2. $\int_0^{1/3} \frac{e^{3+1/x}}{x^2} dx$	3. $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^6} dx$	4. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x + 2)^3}$
--	--	---	---------------------------------------

**Завдання 4.**  $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ .

**Завдання 5.**  $x^3 = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: y^2 = 4 - x, x = 0, Oy$ .

**Завдання 7.**  $L: x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t, Ox$ .

**Завдання 8.**  $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{x^3} f(x, y) dy$ .

**Завдання 9.**  $y = \sin x, y = \cos x, x = 0$ .

**Завдання 10.**  $D: y = x^2 - 2, \quad y = x.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (2x + y^2 + z) dx dy dz, \quad V: 1 \leq x \leq 5,$

$0 \leq y \leq 2, \quad -1 \leq z \leq 0.$

**Завдання 12.**  $z \geq 0, \quad z = x^2, \quad z \geq 0x - 2y + 2 = 0, \quad x + y = 7.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{OBA}} 2xy dx - x^2 dy,$  де  $L_{OBA}$  – ламана  $OBAO(0, 0), B(2, 0),$   
 $A(2, 1).$

**Завдання 14.**  $\int_{L_{AB}} y dl,$  де  $L_{AB}$  – дуга астроїди  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t,$   
замкнена між точками  $A(1, 0)$  та  $B(0, 1).$

#### Модуль 4

1. $\frac{dx}{x \ln x} + \arctg y dy = 0$	2. $x\sqrt{1-y^2} dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0$
3. $xy' = y + x \cos e \frac{y}{x}$	4. $(2x - 5y + 1)dy - (3x + y - 2)dx = 0$
5. $y' + \frac{y}{(x-2)(x-4)} = x - 2$	6. $y' - \frac{y}{x(x-1)} = y\sqrt{xy}$
7. $2x^2 yy' + 3x^2 y^2 + 7 = 0$	8. $y'' = x \sin x$
9. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos^3 x$	10. $y(y+1)y'' = (y')^2$
11. $y'' + 6y' + 13y = 0$	12. $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + \sin 3x$
13. $y'' - y' - 6y = xe^{2x}; y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x, \\ \frac{dz}{dx} - y - z = x \end{cases}$

## ВАРІАНТ 8

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx$	2. $\int (1 + 4x)^5 dx$	3. $\int \frac{dx}{2x + 3}$	4. $\int \cos(7x + 3) dx$
5. $\int \frac{dx}{5x^2 + 3}$	6. $\int \frac{\sqrt{3}x dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}$	7. $\int \frac{dx}{5x^2 - 4}$	8. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$
9. $\int \frac{dx}{1 - \sqrt[3]{x}}$	10. $\int (2x + 1)3^x dx$	11. $\int \frac{2 - x}{x^2 + 4x - 5} dx$	12. $\int x e^{3x-5} dx$
13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}$	14. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} x + 4}}{\sin^2 x} dx$	15. $\int x^4 \ln 3x dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3 - x^2 + 5x - 5}$
17. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}$	18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$	19. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$	20. $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_3^8 \sqrt{x+1} dx$	2. $\int_0^1 \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}} dx$	3. $\int_{-1}^1 \frac{y^5 dy}{y+2}$
4. $\int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4} dx$	5. $\int_0^{\pi/8} \sin x \sin 3x dx$	6. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}$

#### Завдання 3.

1. $\int_5^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 8x + 17}$	2. $\int_{1/2}^1 \frac{\ln 2x}{(1-x)\ln^2(1-x)}$	3. $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^5}} dx$	4. $\int_0^2 \frac{x dx}{4-x^2}$
---	--	---	----------------------------------

**Завдання 4.**  $\rho^2 = 2 \sin 2\varphi$ .

**Завдання 5.**  $y = 1 - \ln \cos x, \quad (0 \leq x \leq \pi/6)$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}, x = 0, y = 0, Ox$ .

**Завдання 7.**  $L: \rho = \frac{2}{3} \sin \varphi$ , полярна вісь.

**Завдання 8.**  $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$ .

**Завдання 9.**  $x = 5 - y^2, x = -4y$ .

**Завдання 10.**  $D: x \geq 0, y \geq 1, y \leq 3, y = x$ .

**Завдання 11.**  $\iiint_V 2xy^2 z dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2.$

**Завдання 12.**  $x \geq 0, z \geq 0, z = y, x = 4, y = \sqrt{25 - x^2}.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} (x^2 - y^2) dx + xy dy,$  де  $L_{AB}$  – відрізок прямої  $AB; A(1, 1); B(3, 4).$

**Завдання 14.**  $\int_{L_{OB}} y dl,$  де  $L_{OB}$  – дуга параболи  $y^2 = \frac{2}{3}x$  між точками  $O(0, 0)$  та  $B(\sqrt{35}/6, \sqrt{35}/3).$

### Модуль 4

1. $\frac{(\arctg x)^2 dx}{1+x^2} - e^{\sin^2 y} \sin 2y dy = 0$	2. $\sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0$
3. $(y + 2\sqrt{xy}) dx - x dy = 0$	4. $y'(y - 2x + 1) = 7x + 2y$
5. $y' + xy = x^2$	6. $y' + \frac{y}{x} = y\sqrt{y}(x - 2)^5$
7. $(6xy + x^2 + 3)y' + 3xy^2 + 2x(y + 1) = 0$	8. $y''' = x \cos x$
9. $y'' - \frac{y'}{\sin x} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}}$	10. $y(y - 1)y'' = (y')^2$
11. $y'' - 6y' + 9y = 0$	12. $y'' + y = 3 \sin x + 5 \cos x$
13. $2y'' + y' + y = 3xe^x + 24;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' - y' = e^{2x} \cos^2(e^x)$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 9y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x \end{cases}$

## ВАРІАНТ 9

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{3x^2 - \sqrt[5]{x} + 2}{x} dx$	2. $\int (1 - 3x)^4 dx$	3. $\int \frac{dx}{3x - 4}$	4. $\int \sin(8x - 3) dx$
5. $\int \frac{dx}{5x^2 - 3}$	6. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}$	7. $\int \frac{dx}{6x^2 - 7}$	8. $\int \cos x \cos 5x dx$
9. $\int (x+1)\sqrt{x-2} dx$	10. $\int (x+1)\cos 3x dx$	11. $\int \frac{3-x}{x^2 - 4x} dx$	12. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}} dx$
13. $\int \frac{x+2}{\sqrt{3x+1}} dx$	14. $\int \sqrt[3]{9^x + 89^x} dx$	15. $\int x \sin \frac{x}{3} dx$	16. $\int \frac{x dx}{x^2 + 4x - 5}$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$	18. $\int \frac{dx}{3\cos x + 2\sin x - 1}$	19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$	20. $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$	2. $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$	3. $\int_4^6 \frac{x dx}{x^3 - 6x^2 + 16x - 6}$
4. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3 + 1}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} dx$	5. $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx$	6. $\int_3^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{8x - x^2 - 15}}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\infty} x e^{-x/2} dx$	2. $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$	3. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$	4. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$
------------------------------------	--	---	---

**Завдання 4.**  $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t)$ .

**Завдання 5.**  $\rho = 6 \cos^3(\varphi/3), (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: x = \sqrt{1 - y^2}, y = \sqrt{\frac{3}{2}}x, y = 0, Ox$ .

**Завдання 7.**  $L: \rho = 2 \sin \varphi$ , полярна вісь.

**Завдання 8.**  $\int_0^1 dx \int_{-x^2}^x f(x, y) dy$ .

**Завдання 9.**  $x^2 + y^2 = 12, x^2 = \sqrt{-6y}, (y \leq 0)$ .

**Завдання 10.**  $D: y^2 = 2x, x^2 = 2y, x \leq 1$ .



**Завдання 11.**  $\iiint_V 5xyz^2 dx dy dz, V: -1 \leq x \leq 0, 2 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2.$

**Завдання 12.**  $z \geq 0, z = 4 - x, x = 2\sqrt{y}, y = 2\sqrt{y}.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x dy,$  де  $L_{AB}$  – відрізок прямої  $AB, A(2\pi, -2\pi); B(-2\pi, 2\pi).$

**Завдання 14.**  $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl,$  де  $L$  – дуга кривої

$x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3t}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

#### Модуль 4

1. $x \cos^2 x dx + \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 2y + 10}} = 0$	2. $e^x dx + e^y (1 - e^x) dy = 0$
3. $x dy - y dx = x \sin \frac{2y}{x} dx$	4. $y' = \left( \frac{3x - y}{y - 2x + 1} \right)^2$
5. $y' + \frac{y}{(x-1)(x-3)} = \sqrt{x-3}$	6. $y' + \frac{y}{x} = y^4 x^2 \sqrt{4-x^2}$
7. $(x^2 y - 1)y' + xy^2 - 1 = 0$	8. $y''' = \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}$
9. $y'' + \frac{xy'}{x^2 + 4} = x^3$	10. $(1+y)y'' = (y')^2$
11. $y'' - 2y' + 2y = 0$	12. $y'' + y' - 2y = e^x(x^2 + 1)$
13. $y'' + 4y' - 5y = xe^x; y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' - 8y' + 15y = \frac{e^{6x}}{1 + e^{2x}}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - x + 5e^t \sin t \end{cases}$

## ВАРІАНТ 10

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{x^2} dx$	2. $\int \sqrt{1+3x} dx$	3. $\int \frac{dx}{4-3x}$	4. $\int \sin(3+4x) dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$	6. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{7-2x^2}}$	7. $\int \frac{dx}{6x^2+1}$	8. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$
9. $\int x \sqrt[3]{1-3x} dx$	10. $\int x \cdot 2^{-\frac{x}{3}} dx$	11. $\int \frac{4-x}{x^2-2x} dx$	12. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+5\cos x}} dx$
13. $\int \sqrt{1-2x^3} x^2 dx$	14. $\int \frac{(\arcsin x + 5)^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$	15. $\int (x-2)e^{3x} dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3+6x^2+10x}$
17. $\int \frac{\sqrt{x-6}}{x} dx$	18. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$	19. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$	20. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cos^3 x dx$	2. $\int_{-1}^0 x \ln(1-x) dx$	3. $\int_7^9 \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4} \sqrt{x^2-3}}$	5. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$	6. $\int_7^{10} \frac{x^3 dx}{x^2 - 3x + 2}$

#### Завдання 3.

1. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$	2. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$	3. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$	4. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$
--	--	----------------------------------	---------------------------------------

**Завдання 4.**  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ .

**Завдання 5.**  $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^4 t$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: y = \sin x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi), Ox$ .

**Завдання 7.**  $L: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, (0 \leq t \leq 2\pi), Ox$ .

**Завдання 8.**  $\int_7^9 dx \int_{9/x}^{10-x} f(x, y) dy$ .

**Завдання 9.**  $y = \frac{3}{2} \sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 9$ .

**Завдання 10.**  $D: x \geq 0, y \geq x, y = \sqrt{9 - x^2}$ .

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x^2 + 2y^2 - z) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 2$ .

**Завдання 12.**  $y \geq 0, z \geq 0, 2x - y = 0, x + y = 9, z = x^2$ .

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ , де  $L_{AB}$  – відрізок прямої  $AB: A(1, 2); B(3, 6)$ .

**Завдання 14.**  $\int_L \arctg \frac{y}{x} dl$ , де  $L$  – дуга кардіоїди  $\rho = (1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

#### Модуль 4

1. $\frac{\ln x dx}{x^5} + \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} dy = 0$	2. $(xy^2 - y^2)dx + (x^2y + x^2)dy = 0$
3. $x^2y' + y^2 = 0$	4. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x + 2}{y - 7x + 1}$
5. $x(x - 1)y' - (x - 1)y + 4 = 0$	6. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$
7. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$	8. $y''' = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$
9. $y'' + y'tgx = \cos^4 x$	10. $y''tgy = (y')^2$
11. $y'' - 7y' + 12y = 0$	12. $y'' - 5y' = e^{3x}(\sin x - \cos x)$
13. $y'' - y = 2\sin x + 2\cos x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = +1$	14. $y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x)$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$	16. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} = 6x + 5y \end{cases}$

## ВАРІАНТ 11

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5 - 5x^2 + 3}}{x} dx$	2. $\int \sqrt{5 - 4x} dx$	3. $\int \frac{dx}{3x + 4}$	4. $\int \sin(3 - 4x) dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 3}}$	6. $\int \frac{xdx}{2x^2 - 7}$	7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$	8. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - 9}}$	10. $\int \operatorname{arctg} x dx$	11. $\int \frac{3x + 2}{x^2 + 3x - 1} dx$	12. $\int (x + 1) \cos 2x dx$
13. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$	14. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - 1}}{\cos^2 2x} dx$	15. $\int x^2 \ln 6x dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3 - 7x^2}$
17. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx$	18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$	19. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$	20. $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x^2 + 1}$	2. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$	3. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)}$
4. $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$	5. $\int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx$	6. $\int_1^{\sqrt{5}} \frac{x^2 dx}{13 - 6x^3 + x^6}$

#### Завдання 3.

1. $\int_2^4 \frac{dx}{x^2 - 4}$	2. $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$	3. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{2x}(3 + e^{-2x})}$	4. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$
----------------------------------	---	---	--

**Завдання 4.**  $\rho = 2 \sin 3\varphi$ .

**Завдання 5.**  $y^2 = (x - 1)^3$  від точки  $A(1, 0)$  до точки  $B(6, \sqrt{125})$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y, \quad Ox$ .

**Завдання 7.**  $L: \rho = 6 \sin \varphi$ , полярна вісь.

**Завдання 8.**  $\int_0^1 dy \int_{y^2/9}^y f(x, y) dx$ .

**Завдання 9.**  $y = 20 - x^2, \quad y = -8x$ .

**Завдання 10.**  $D: y^2 = 2 - x, \quad y = x$ .

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x + 2yz) dx dy dz, V : -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$

**Завдання 12.**  $y \geq 0, z \geq 0, x = 4, y = 2x, z = x^2.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} xy dx + (u - x) dy,$  де  $L_{AB}$  – дуга кубічної параболи  $y = x^3$  від точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(1, 1)$ .

**Завдання 14.**  $\int_L \sqrt{2y} dl,$  де  $L$  – перша арка циклоїди  $x = 2(t - \sin t),$   
 $y = 2(1 - \cos t).$

### Модуль 4

1. $\arccos x dx + \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = 0$	2. $x(y^2 + 1) dx - ye^{x^2} dy = 0$
3. $4x^3 dy + (9y^3 - 3x^2 y) dx = 0$	4. $y' = \frac{2x + y + 5}{y - x}$
5. $y' + \frac{y}{(x-3)(x-5)} = \sqrt{x-5}$	6. $y^5 y' + \frac{y^6}{3x} = \arctg x$
7. $(y^2 - x)y' - y + x^2 = 0$	8. $y'' = \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$
9. $y'' - \frac{2y'}{x} = x^2 \arctg x$	10. $(1 - y)y'' + 2y'^2 = e(1 - y)$
11. $y'' + 2y' + 5y = 0$	12. $y'' + 2y' - 3y = (x - 1)\cos x$
13. $y'' - 3y' - 4y = x + 1 + e^{-x};$ $y _{x=0} = 1; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}(x^2 + 3x - 1)}{x}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y + e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 5y \end{cases}$

## ВАРІАНТ 12

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}$	3. $\int \frac{dx}{4x-2}$	4. $\int \cos(4x+3) dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$	6. $\int \frac{xdx}{3x^2+8}$	7. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$	8. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$
9. $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x} dx$	10. $\int (x+1)e^x dx$	11. $\int \frac{1-x}{x^2+2x-3} dx$	12. $\int \sin 3x \cos 5x dx$
13. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx$	14. $\int \frac{\ln^3 x - 3 \ln x}{x} dx$	15. $\int (x+4) \cos 7x dx$	16. $\int \frac{xdx}{x^3-27}$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+5}}$	18. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - \sin x \cos x}$	19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$	20. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_{\pi/18}^{\pi/6} 12 \operatorname{ctg} 3x dx$	2. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$	3. $\int_2^3 \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2-1)^2} dx$
4. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}}$	5. $\int_0^{\pi/4} 2 \cos x \sin 3x dx$	6. $\int_4^7 \frac{dx}{x^2+3x-10}$

#### Завдання 3.

1. $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$	2. $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx$	3. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5}$	4. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3} \ln 2}$
---	--	--	--

**Завдання 4.**  $\rho = 2 + \cos \varphi$ .

**Завдання 5.**  $y^2 = x^5$ , що відсікається прямою  $x = 5$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: x = 2 \cos t, y = 5 \sin t, Oy$ .

**Завдання 7.**  $L: \rho^2 = 4 \cos 2\varphi$ , полярна вісь.

**Завдання 8.**  $\int_1^2 dx \int_x^{x+3} f(x, y) dy$ .

**Завдання 9.**  $x^2 + y^2 = 36, \quad y = \frac{x^2}{3\sqrt{2}}, \quad y \geq 0.$

**Завдання 10.**  $D: x = \sqrt{2-y^2}, \quad x = y^2, \quad y \geq 0.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x + yz^2) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2,$   
 $-1 \leq z \leq 3.$

**Завдання 12.**  $x \geq 0, z \geq 0, y = 2x, y = 3, z = \sqrt{y}.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{ABC}} (x^2 + y^2) dx + (x + y^2) dy,$  де  $L_{ABC}$  – ламана  $ABC$ ;  
 $A(1, 2); B(3, 2); C(3, 5).$

**Завдання 14.**  $\int_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}},$  де  $L_{OA}$  – відрізок прямої, що з'єднує точки  
 $O(0, 0)$  та  $A(1, 2).$

#### Модуль 4

1. $\sin^2 x \cos^2 x dx - y 10^y dy = 0$	2. $3^{x-y} dx - 4^{x+y} dy = 0$
3. $y = x(y' + \sqrt[3]{e^y})$	4. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-7y}{5x+2}$
5. $y' + \frac{y}{x^2} = ae^{\frac{1}{x}}$	6. $y^2 \cdot y' + y \sqrt[3]{y^2} = x$
7. $(y^2 + x^2 + 9)y' + 2xy + y^2 + 7 = 0$	8. $y''' = x \sin x$
9. $2y'' - y' \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sin^3 \frac{x}{2}$	10. $y'' \sqrt{1+y^2} + y'^2 = 0$
11. $y'' + 4y' + 4y = 0$	12. $y'' + y' - 6y = (2x^2 + 2x - 7)e^x$
13. $y'' + 4y = 2 \sin 2x - \cos 2x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4x+1}}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 9y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$

## ВАРІАНТ 13

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( x^2 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x} - 3 \right) dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}$	3. $\int \frac{dx}{5-3x}$	4. $\int \cos(3-4x) dx$
5. $\int \frac{\sqrt{5} dx}{\sqrt{3-4x^2}}$	6. $\int \frac{2dx}{3x^2-7}$	7. $\int \frac{dx}{3x^2+4}$	8. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$
9. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	10. $\int x \sin(x+2) dx$	11. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29} dx$	12. $\int e^{7x+1} dx$
13. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$	14. $\int \sqrt[5]{4-x^2} x dx$	15. $\int \frac{x}{\sin^2 5x} dx$	16. $\int \frac{x dx}{x^2+3x-18}$
17. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{36-x^2}}$	18. $\int \frac{dx}{7-2 \sin x}$	19. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$	20. $\int \frac{dx}{5-3 \cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$	2. $\int_{-1}^0 (x+1) e^{-2x} dx$	3. $\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$
4. $\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx$	5. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$	6. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2+5t+4}$

#### Завдання 3.

1. $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$	2. $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$	3. $\int_0^{\infty} x \sin x dx$	4. $\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$
---	---	----------------------------------	---

**Завдання 4.**  $y = 1/(1+x^2), \quad y = x^2/2.$

**Завдання 5.**  $\rho = 3 \cos \varphi.$

**Завдання 6.**  $\Phi : y^2 = x^2, \quad 8x = y^2, \quad Oy.$

**Завдання 7.**  $L : 3y = x^3, \quad (0 \leq x \leq 1), \quad Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_0^{0,6} dy \int_{2y^2}^{y+3} f(x, y) dx.$



- Завдання 9.**  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 16$ .
- Завдання 10.**  $D: y \geq 0$ ,  $x + 2y - 12 = 0$ ,  $y = \lg x$ .
- Завдання 11.**  $\iiint_V (xy + 3z) dx dy dz$ ,  $V: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2$ .
- Завдання 12.**  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 2x$ ,  $z = y^2$ .
- Завдання 13.**  $\int_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$ , де  $L_{OB}$  – відрізок прямої  $OB$ ;  $O(0, 0, 0)$ ;  $B(-2, 4, 5)$ .
- Завдання 14.**  $\int_L \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)^2} dl$ , де  $L$  – дуга кривої  $\rho = 9 \sin 2\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ .

#### Модуль 4

1. $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \sin^3 y dy = 0$	2. $(xy + x)dx - (y + x^2 y)dy = 0$
3. $xy' - y = y(\ln y - \ln x)$	4. $y'(x - y) = 2x + 3$
5. $(x + 1)y' - 3y = e^2(x + 1)^4$	6. $yy' + 3y^2 = x - 1$
7. $(6y^2 - 3x^2 y + 1)y' - 3xy^2 + x^2 = 0$	8. $y'' = \operatorname{tg}^2 3x$
9. $y'' - \frac{y'}{x} = x \arcsin x$	10. $y'' = y'^2 \operatorname{tgy}$
11. $4y'' - 8y' + 5y = 0$	12. $y'' + y = (x - 1)\sin 2x$
13. $y'' - y = 1 + x + e^x$ ; $y _{x=0} = 1; y' _{x=0} = 1$	14. $y'' + 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = 3(x + y) \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z, \\ \frac{dz}{dx} = y + z + x \end{cases}$

## ВАРІАНТ 14

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x^5 + 3}}{x} dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$	3. $\int \frac{dx}{4-7x}$	4. $\int \cos(2+5x) dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$	6. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{2x^2+5}}$	7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$	8. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$
9. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$	10. $\int x \sin(x+2) dx$	11. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29} dx$	12. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$
13. $\int \frac{3 dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$	14. $\int \frac{(e^{6x}-2)}{e^{-x}} dx$	15. $\int \ln(4-5x) dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3+8}$
17. $\int \frac{\sqrt{x-5} dx}{x+\sqrt{x-5}}$	18. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} dx$	19. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$	20. $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$	2. $\int_0^4 x^3 \sqrt{x^2+9} dx$	3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4} dx$
4. $\int_{4\sqrt{2/3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4} dx$	5. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$	6. $\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+4x^2} dx$	2. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$	3. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$	4. $\int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx$
---	--	----------------------------------	---

**Завдання 4.**  $y^2 = x+1, \quad y^2 = 9-x.$

**Завдання 5.**  $\rho = 3(1 - \cos \varphi).$

**Завдання 6.**  $\Phi : y = e^x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad Ox.$

**Завдання 7.**  $L : y^2 = 2x, \text{ що відсікається прямою } 2x = 3, \quad Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$

**Завдання 9.**  $x = 27 - y^2, \quad x = -6y.$

**Завдання 10.**  $D : x \leq 0, \quad y \geq 1, \quad y \leq 3, \quad y = -x^2.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (xy - z^2) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 3.$

**Завдання 12.**  $z \geq 0, y^2 = 2 - x, z = 3x.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{OA}} y dx + x dy,$  де  $L_{OA}$  – дуга кола  $x = R \cos t, y = R \sin t;$   
 $O(R, 0); A(0, R).$

**Завдання 14.**  $\int_{L_{OABC}} xy dl,$  де  $L_{OABC}$  – контур прямокутника з вершинами  
 $O(0, 0), A(4, 0), B(4, 2), C(0, 2).$

### Модуль 4

1. $\frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}} + y \arcsin y dy = 0$	2. $xy' = \operatorname{tg} y$
3. $-xy' - x \cos^2 \frac{y}{x} = y$	4. $(2x - 3)dy = (3x + 5y)dx$
5. $y' + \frac{y}{(x+1)(x+3)} = \sqrt{x+1}$	6. $y^6 y' + y^7 = x - 4$
7. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 11 = 0$	8. $y'' = (x+1)e^{3x}$
9. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos^3 x$	10. $y''^2 = y'$
11. $4y'' - 8y' + 5y = 0$	12. $5y'' - 6y' + 5y = x^2$
13. $y'' + y = x^3 + 1; y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + 9y = \frac{2}{\cos^2 3x}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 8y \end{cases}$	16. $\begin{cases} 5 \frac{dz}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} + 4z - y = e^{-x}, \\ \frac{dz}{dx} + 8z - 3y = 5e^{-x} \end{cases}$

## ВАРІАНТ 15

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( \frac{\sqrt[3]{x}}{x} + 2x^3 - 4 \right) dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$	3. $\int \frac{dx}{5x-3}$	4. $\int \cos(3x+5) dx$
5. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$	6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{7-3x^2}}$	7. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$	8. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$
9. $\int (2x-1)\cos(2x+1) dx$	10. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx$	11. $\int \sin^5 2x dx$	12. $\int \frac{x^2 dx}{3x^3-5}$
13. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 3x}}{1+9x^2} dx$	14. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{5} dx$	15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$	16. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$
17. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$	18. $\int \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$	19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$	20. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$	2. $\int_{-1/2}^0 x e^{-2x} dx$	3. $\int_{1/3}^{1/2} \frac{xdx}{(x-1)^3}$
4. $\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx$	5. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx$	6. $\int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$	2. $\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+4x^2} dx$	3. $\int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$	4. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$
---	---	---	---

**Завдання 4.**  $y^2 = x^3, \quad x=0, \quad y=4.$

**Завдання 5.**  $\rho = 2 \sin^3(\varphi/3).$

**Завдання 6.**  $\Phi: y^2 = 4x/3, \quad x=3, \quad Ox.$

**Завдання 7.**  $L: y^2 = 4+x$ , що відсікається прямою  $x=2$ ,  $Ox$ .

**Завдання 8.**  $\int_1^2 dx \int_x^{2-x} f(x,y) dy.$

**Завдання 9.**  $y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad x=1.$

**Завдання 10.**  $D: y=0, \quad y \geq x, \quad y = -\sqrt{2-x^2}.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x^3 + yz) dx dy dz, V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1.$

**Завдання 12.**  $z \geq 0, y = \sqrt{9 - x^2}, z = -2y.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{OA}} xy dx + (y - x) dy,$  де  $L_{OA}$  – дуга параболи  $y^2 = x$  від точки  $O(0, 0)$  до точки  $A(1, 1).$

**Завдання 14.**  $\int_{L_{ABO}} (x + y) dl,$  де  $L_{ABO}$  – контур трикутника з вершинами  $A(1, 0), B(0, 1), O(0, 0).$

#### Модуль 4

1. $x \sin x \cos x dx + \frac{dy}{y^2 - 7y + 10} = 0$	2. $2xyy' = y^2 + 1$
3. $(y^2 - 3xy) dx + (x^2 + xy) dy = 0$	4. $y' = \frac{7x - 2}{5y + x - 3}$
5. $y' + \frac{y}{(x - 3)(x - 5)} = \sqrt{(x - 3)(x - 5)}$	6. $y' = \frac{xy}{2(1 - x^2)} + xy^2$
7. $xy' \cos y + \sin y = 0$	8. $y'' = \sin^3 x$
9. $y'' - \frac{y'}{x} = \frac{\ln x}{x^3}$	10. $y'' = 2y + 1$
11. $y'' - 6y' + 8y = 0$	12. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(x - 3)$
13. $y'' - y' = x^2 + e^{-x}; y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 2x}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + \sin t - y + \cos t \end{cases}$

## ВАРІАНТ 16

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{\sqrt{x^3 - 3x^4 + 2}}{x} dx$	2. $\int \sqrt[5]{3 - 2x} dx$	3. $\int \frac{dx}{3 - 2x}$	4. $\int \sin(5x - 3) dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$	6. $\int \frac{x dx}{2x^2 + 9}$	7. $\int \frac{\ln^3 x - 3 \ln x}{x} dx$	8. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$	10. $\int (3-x)e^{-x} dx$	11. $\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2 - 4x + 17}$	12. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$
13. $\int \frac{\sqrt{2 + \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$	14. $\int \frac{(\operatorname{ctg}^2 x - 1)^2}{\sin^2 x} dx$	15. $\int x^7 \ln \frac{x}{2} dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$
17. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+6}}$	18. $\int \frac{dx}{5 \cos x - 2}$	19. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} dx$	20. $\int \frac{dx}{\sin x + 5 \cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$	2. $\int_1^2 \ln(3x+2) dx$	3. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+1}$
4. $\int_0^{\sqrt{7/3}} x^3 \sqrt{7+x^2} dx$	5. $\int_{\pi/4}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$	6. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x+2)^3}$	2. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$	3. $\int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx$	4. $\int_0^1 \frac{2e^{-\frac{2}{\pi} \arcsin x}}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx$
---	--	---	---

**Завдання 4.**  $c = 4 \sin^2 3\varphi$ .

**Завдання 5.**  $x = 5 \cos^2 t, \quad y = 5 \sin^2 t, \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: y = 2x - x^2, \quad y = 0, \quad Ox$ .

**Завдання 7.**  $L: \rho = \sqrt{2} \cos \varphi$  полярна вісь.

**Завдання 8.**  $\int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$ .

**Завдання 9.**  $y = 2^x, \quad y = 2^{-2x}, \quad y = 4$ .

**Завдання 10.**  $D: y \geq 0, \quad x = \sqrt{y}, \quad y = \sqrt{8-x^2}$ .

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x^3 + y^2 - z) dx dy dz, V : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 1.$

**Завдання 12.**  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y = 2, z = x^2 + y^2.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} x dx + y dy + (x - y + 1) dz,$  де  $L_{AB}$  – відрізок прямої  $AB$ ;  $A(1, 1, 1); B(2, 3, 4).$

**Завдання 14.**  $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2},$  де  $L$  – перший виток гвинтової лінії  
 $x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 2t.$

#### Модуль 4

1. $\ln^2 x dx - \sqrt{1 - e^y} e^y dy = 0$	2. $y' = e^{2x-4y}$
3. $xy' = y(\ln \frac{y}{x} + 3)$	4. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3}{5y-7}$
5. $y' + \frac{y}{(x-4)(x-6)} = \sqrt{(x-4)(x-6)}$	6. $y' - \frac{y}{x} = y^2 \sin 2x$
7. $(x^2 y - 1)y' + xy^2 - 1 = 0$	8. $y'' = x e^{2x}$
9. $y'' - \frac{y'}{x} = x^2 e^{2x}$	10. $2yy'' = y'^2 + y^2$
11. $y'' + 16y = 0$	12. $y'' + 2y' - 3y = e^{-x} \sin x$
13. $y'' - y = x \sin x; y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + 4y = \frac{\sin 6x}{\cos 2x}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + 4z = 1 + 4x, \\ \frac{dz}{dx} + y - z = \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$

## ВАРІАНТ 17

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left(2x^3 - 3\sqrt{x^5} + \frac{4}{x}\right) dx$	2. $\int \sqrt[4]{1+3x} dx$	3. $\int \frac{dx}{5+3x}$	4. $\int \sin(5-3x) dx$
5. $\int \frac{dx}{3x^2+2}$	6. $\int \frac{5x dx}{\sqrt{3-5x^2}}$	7. $\int \frac{(\operatorname{arctg} 2x-1)^2}{1+4x^2} dx$	8. $\int (1-\operatorname{tg} 3x)^2 dx$
9. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$	10. $\int (2x+3) \ln x dx$	11. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx$	12. $\int (2-x) \cos 3x dx$
13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{36-x^2}}$	14. $\int (16^x-1)^2 4^x dx$	15. $\int x \sin 7x dx$	16. $\int \frac{x dx}{x^2+x-12}$
17. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$	18. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$	19. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$	20. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$	2. $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$	3. $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$
4. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$	5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x+1}$	6. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\infty} \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx$	2. $\int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$	3. $\int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$	4. $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos 2x} dx$
--	---	---	--

**Завдання 4.**  $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t.$

**Завдання 5.**  $9y^2 = 4(3-x)^3$  між точками перетину з віссю  $Oy$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: \rho = 2(1 + \cos \varphi)$ , полярна вісь.

**Завдання 7.**  $L: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy.$

**Завдання 9.**  $xy = 4, x + y = 5.$

**Завдання 10.**  $D: y = -x, y^2 = x + 3.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (2x^2 + y - z) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1.$



**Завдання 12.**  $z \geq 0, x^2 + y^2 = 9, z = 5 - x - y.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2 y dy,$  де  $L_{AB}$  – дуга параболи  $y^2 = 4 - 4x$

від точки  $A(1, 0)$  до точки  $B(0, 2).$

**Завдання 14.**  $\int_{L_{OAB}} (x + y)dl,$  де  $L_{OAB}$  – контур трикутника з вершинами

$O(0, 0), A(-1, 0), B(0, 1).$

### Модуль 4

1. $\frac{xdx}{4+x^2} - y^3 \ln y dy = 0$	2. $y' \sin \ln x + y = 0$
3. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$	4. $(3x + 2y - 2)dy = (5x - 7)dx$
5. $y' + \frac{y}{(x+2)(x+3)} = \sqrt{\frac{x+2}{x+3}}$	6. $yy' + \frac{y^2}{7x} = \arcsin x$
7. $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$	8. $y'' = \frac{x}{\sqrt{2+4x}}$
9. $y'' - y' \operatorname{tg} x = \sin^2 x$	10. $yy'' - y'^2 = y^3$
11. $y'' + 8y' + 25y = 0$	12. $y'' + 5y' - 6y = (x^2 + 5x + 2)e^{-x}$
13. $y'' - y' - 2y = e^{-x}(x+2);$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 2x - y + 2e^t = 0 \end{cases}$

## ВАРІАНТ 18

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 5}{x^2} dx$	2. $\int \sqrt[3]{1+3x} dx$	3. $\int \frac{dx}{3-5x}$	4. $\int \sin(3x+6) dx$
5. $\int \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{7-2x^2}}$	6. $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2+8}}$	7. $\int \frac{\sqrt[5]{e^{-2x}-1}}{e^{2x}} dx$	8. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$
9. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx$	10. $\int 2x \sin(5x-2) dx$	11. $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$	12. $\int \frac{dx}{9x^2-8}$
13. $\int \frac{dx}{(9+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$	14. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x - 3}}{\sqrt{1-x^2}} dx$	15. $\int (x+7)e^{5x} dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x}$
17. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{x} dx$	18. $\int \operatorname{ctg}^3 4x dx$	19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{10x^2-6x+1}}$	20. $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$	2. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$	3. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{x^4-1}$
4. $\int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}}$	5. $\int_0^{\pi/32} (32\cos^2 4x - 16) dx$	6. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$	2. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$	3. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{4x^2+4x+5}$	4. $\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$
--------------------------------------	---	---	---

**Завдання 4.**  $y^2 = 9x, y = 3x.$

**Завдання 5.**  $\rho = 3 \sin \varphi.$

**Завдання 6.**  $\Phi : x = 7 \cos t, y = 7 \sin^3 t, Oy.$

**Завдання 7.**  $L : x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi), Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_{-1}^3 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx.$

**Завдання 9.**  $3x^2 = 25y, 5y^2 = 9x.$

**Завдання 10.**  $D : y = \sqrt{4-x^2}, x \geq 0, x = 1, y = 0.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V x^2 y z^2 dx dy dz, V : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 0.$

**Завдання 12.**  $z \geq 0, z = x, x = \sqrt{4 - y^2}.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{OB}} xy dx + (y - x) dy,$  де  $L_{OB}$  - дуга параболи  $y = x^2$  від точки  $O(0, 0)$  до точки  $B(1, 1)$ .

**Завдання 14.**  $\int_L (x + y) dl,$  де  $L$  - дуга лемніскати Бернуллі

$\rho^2 = \cos 2\varphi, \quad -\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4.$

### Модуль 4

1. $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx + \frac{\cos y dy}{\sqrt[3]{\sin^2 y}} = 0$	2. $2\sqrt{y} dx - dy = 0$
3. $2x^2 dy = (x^2 + y^2) dx$	4. $(6x - 3y) dy = (7x + 5) dx$
5. $y' + \frac{y}{x^2 + x} = \frac{x}{x + 1}$	6. $y' + \frac{4y}{4x + 1} = \frac{y^3 \sqrt{4x + 1}}{2}$
7. $(\ln y - 2x) dx + (\frac{x}{y} - 2y) dy = 0$	8. $y'' = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}$
9. $xy'' + 2y' = 0$	10. $y'' + \sqrt{1 - y'^2} = 0$
11. $y'' - 5y' + 6y = 0$	12. $y'' + 4y' + 5y = x + \sin 2x$
13. $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x};$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + y = \operatorname{tg} x$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - y = e^t, \\ \frac{dy}{dt} - x + y = e^t \end{cases}$

## ВАРІАНТ 19

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{3x^2 - \sqrt{x^3} + 7}{x^3} dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}$	3. $\int \frac{dx}{5+4x}$	4. $\int \cos(5x-8) dx$
5. $\int \frac{\sqrt{14} dx}{2x^2 - 7}$	6. $\int \frac{5x dx}{\sqrt{5x^2 + 3}}$	7. $\int \frac{\sqrt{3^x + 9}}{3^{-x}} dx$	8. $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$ ,
9. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$	10. $\int (5-x)5^x dx$	11. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$	12. $\int \frac{dx}{4+2\sin x}$
13. $\int \frac{dx}{\sin^2(3-2x)}$	14. $\int \frac{(\sqrt{\tan x} + 2)^2}{\cos^2 x} dx$	15. $\int x^9 \ln 2x dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$
17. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx$	18. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$	19. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x^2} dx$	20. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 1}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^1 \frac{z^3}{z^8 + 1} dz$	2. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$	3. $\int_0^1 \frac{(2x+3)dx}{(x-2)^3}$
4. $\int_0^3 x^4 \sqrt{9-x^2} dx$	5. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$	6. $\int_1^2 \frac{x-5}{x^2 - 2x + 2}$

#### Завдання 3.

1. $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3}$	2. $\int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}$	3. $\int_{1/2}^\infty \frac{16dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)}$	4. $\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$
--	---	--	--

**Завдання 4.**  $x = 3(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = 3(\sin t - \cos t)$ ,

$y = 0$ ,  $(0 \leq t \leq \pi)$ .

**Завдання 5.**  $y = \ln \sin x$ ,  $(\pi/3 \leq x \leq \pi/2)$ .

**Завдання 6.**  $\Phi : x^2/16 + y^2/1 = 1$ ,  $Ox$ .

**Завдання 7.**  $L : x^2 = 4 + y$ , що відсікається прямою  $y = 2$ ,  $Oy$ .

**Завдання 8.**  $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy$ .

**Завдання 9.**  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .

**Завдання 10.**  $D: x = -1, x = -2, y \geq 0, y = x^2$ .

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x + y - z) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 5$ .

**Завдання 12.**  $y \geq 0, z \geq 0, x + y = 2, z = x^2$ .

**Завдання 13.**  $\int_{L_{OB}} (xy - y^2) dx + x dy$ , де  $L_{OB}$  – дуга параболи  $y = x^2$  від точки  $O(0, 0)$  до точки  $B(1, 1)$ .

**Завдання 14.**  $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , де  $L$  – коло  $x^2 + y^2 = 2y$ .

### Модуль 4

1. $\sin^3 x \cos x dx + y \arctg y dy = 0$	2. $(1 + x^3) y' = 3x^2 y$
3. $x(\ln x - \ln y) dy - y dx = 0$	4. $(18x - 3y + 2) dx = (3x - 5y) dy$
5. $y' + 2y = x^2 + 2x$	6. $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^5 x^2}{x - 1}$
7. $(x + y) - (y - x) y' = 0$	8. $y'' = x \sin 2x$
9. $xy'' - y' = y'^2$	10. $y'' = y'(1 + y)$
11. $y'' + 7y' = 0$	12. $y'' + 4y = \sin 2x - 2 \cos 2x$
13. $y'' - y' = 4x^3 + x + 3e^x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 0, \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

## ВАРІАНТ 20

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2} dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}$	3. $\int \frac{dx}{6-3x}$	4. $\int \cos(3x-7) dx$
5. $\int \frac{dx}{8x^2+9}$	6. $\int \frac{x dx}{3x^2-6}$	7. $\int \frac{(\sqrt{\operatorname{tg} x} + 2)^2}{\cos^2 x} dx$	8. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$
9. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1} dx$	10. $\int (x+10) \cos x dx$	11. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$	12. $\int x \ln(x-1) dx$
13. $\int \frac{5 dx}{\sqrt{3-x^2}-2x}$	14. $\int \frac{(5-\sqrt{\ln x})^2}{x} dx$	15. $\int (x-2) \cos \frac{x}{3} dx$	16. $\int \frac{x dx}{x^3-1}$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+7}}$	18. $\int \frac{dx}{3 \sin x \cos x - 7 \sin^2 x}$	19. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}}$	20. $\int \frac{dx}{2 \sin x + 13 \cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$	2. $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx$	3. $\int_3^5 \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx$
4. $\int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}$	5. $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x dx$	6. $\int_{1/3}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

#### Завдання 3.

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$	2. $\int_0^{\infty} x \sin x dx$	3. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx$	4. $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}$
---	----------------------------------	---	--

**Завдання 4.**  $y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y.$

**Завдання 5.**  $x = 9(t - \sin t), \quad y = 9(1 - \cos t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$

**Завдання 6.**  $\Phi : x^3 = (y-1)^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad Ox.$

**Завдання 7.**  $L : x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_{-2}^2 dx \int_0^{x+2} f(x; y) dy.$

**Завдання 9.**  $y = \frac{2}{x}, \quad y = 7 \cdot e^x, \quad y = 2, \quad y = 7.$

**Завдання 10.**  $D : y \leq 0, \quad x^2 = -y, \quad x = \sqrt{1-y^2}.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x + 2y + 3z^2) dx dy dz, V : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2.$

**Завдання 12.**  $y \geq 0, z \geq 0, y = 4, z = x, x = \sqrt{25 - y^2}.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} x dy - y dx,$  де  $L_{AB}$  – дуга астроїди  $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$   
від точки  $A(2, 0)$  до точки  $B(0, 2)$ .

**Завдання 14.**  $\int_{L_{OABC}} xy dl,$  де  $L_{OABC}$  – контур прямокутника з вершинами  $O(0, 0), A(5, 0), B(5, 3), C(0, 3)$ .

### Модуль 4

1. $x 5^{-x} dx - \frac{y^3 dy}{\sqrt{1-y^8}} = 0$	2. $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$
3. $x^2 dy = (4x^2 + y^2 + xy) dx$	4. $y' = \operatorname{tg}\left(\frac{2x+3}{y-7}\right)$
5. $y' + \frac{y}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{\sqrt{(x+2)(x+4)}}$	6. $y' \sqrt{y} + y \sqrt{y} = x + 5$
7. $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0$	8. $y'' = \frac{2x-1}{x-2}$
9. $(1+x^2)y'' + xy' = 0$	10. $(y-1)y'' = y'^2$
11. $y'' + 4y' + 29y = 0$	12. $y'' - 2y' + 2y = 5 \sin x - 3xe^x$
13. $y'' + 5y' - 6y = e^{-6x} + 10 \sin 2x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + y' = \sin x$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = t^2 + 6t + 1, \\ \frac{dy}{dt} - x = 3t^2 + 3t + 1 \end{cases}$

## ВАРІАНТ 21

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4 \right) dx$	2. $\int \frac{dx}{(2+x)^3}$	3. $\int \frac{dx}{6+5x}$	4. $\int \cos(5x-6) dx$
5. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$	6. $\int \frac{xdx}{5x^2+1}$	7. $\int \frac{(\operatorname{ctg}^2 x - 1)^2}{\sin^2 x} dx$	8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$
9. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$	10. $\int 5xe^{x+3} dx$	11. $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx$	12. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$
13. $\int x\sqrt{2-x} dx$	14. $\int \sqrt[3]{7+x^2} x dx$	15. $\int \frac{x}{\sin^2 8x} dx$	16. $\int \frac{xdx}{x^2+4x-5}$
17. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$	18. $\int \frac{dx}{6+5\cos x}$	19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-5x+3}}$	20. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$	2. $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}} dx$	3. $\int_3^4 \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$
4. $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$	5. $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$	6. $\int_0^2 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

#### Завдання 3.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$	2. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$	3. $\int_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5}$	4. $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx$
--	---	--	--

**Завдання 4.**  $y^2 = x^3, x = 2.$

**Завдання 5.**  $\rho = 2(1 - \cos \varphi).$

**Завдання 6.**  $\Phi: xy = 4, 2x + y - 6 = 0, Ox.$

**Завдання 7.**  $L: y = x^3/3, (-1 \leq x \leq 1), Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_0^1 dy \int_{y^{1/2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx.$

**Завдання 9.**  $y = x, y^2 = 2 - x.$

**Завдання 10.**  $D: y \geq 0, y \leq 1, y = x, x = -\sqrt{4 - y^2}.$



**Завдання 11.**  $\iiint_V (3x^2 + 2y + z) dx dy dz, V : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 3.$

**Завдання 12.**  $z \geq 0, x^2 + y^2 = 9, z = y^2.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} (xy - x) dx + \frac{1}{2} x^2 dy,$  де  $L_{AB}$  – дуга параболи  $y^2 = 4x$  від точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(1, 2).$

**Завдання 14.**  $\oint_L (x^2 + y^2) dl,$  де  $L$  – коло  $x^2 + y^2 = 4x.$

### Модуль 4

1. $\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} - \frac{tg^3 y dy}{\cos^2 y} = 0$	2. $2yy'\sqrt{1-x^2} - e^{y^2} = 0$
3. $xy' = y + xtg \frac{y}{x}$	4. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x-7}{2y+3x}$
5. $y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1$	6. $y' + \frac{y}{x} = y^5 \ln x$
7. $(x - \frac{y}{x^2 + y^2}) dx + (y + \frac{x}{x^2 + y^2}) dy = 0$	8. $y'' = \frac{\ln x}{x}$
9. $y'' + \frac{x}{x^2 + 4} y' = x^3$	10. $(1 + y^2) y'' = 2yy'^2$
11. $y'' - 8y' + 16y = 0$	12. $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$
13. $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + 4y' + 4y = \frac{xe^{-2x}}{x^2 + 4}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{2t} \end{cases}$

## ВАРІАНТ 22

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{\sqrt{x-2x^3+6}}{x} dx$	2. $\int \sqrt[3]{5-2x} dx$	3. $\int \frac{dx}{1-7x}$	4. $\int \sin(7x+1) dx$
5. $\int \frac{dx}{4x^2+3}$	6. $\int \frac{5x dx}{5x^2-3}$	7. $\int (16^x-1)^2 4^x dx$	8. $\int (\sin 3x + \cos 3x)^2 dx$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+5+9}}$	10. $\int \arccos x dx$	11. $\int \frac{(4-3x) dx}{5x^2+6x+18}$	12. $\int x \cos(x^2+1) dx$
13. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln^2 x}}$	14. $\int \frac{\sqrt[5]{e^{-2x}-1}}{e^{2x}} dx$	15. $\int \ln(x^2+5) dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3+27}$
17. $\int \frac{\sqrt{x+2} dx}{x+\sqrt{x+2}}$	18. $\int \operatorname{tg}^2 5x dx$	19. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx$	20. $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x dx$	2. $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$	3. $\int_8^{10} \frac{(x^2+3) dx}{x^3-x^2-6x}$
4. $\int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}}$	5. $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$	6. $\int_{3/4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$	2. $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos 2x} dx$	3. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$	4. $\int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}$
--	--	--	----------------------------------

**Завдання 4.**  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$ .

**Завдання 5.**  $y^2 = (x-1)^3$  від точки  $A(2, -1)$  до точки  $B(5, -8)$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: x = \sqrt{3} \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $Oy$ .

**Завдання 7.**  $L: 3x = y^3$ ,  $(0 \leq x \leq 2)$ ,  $Oy$ .

**Завдання 8.**  $\int_3^7 dx \int_{9/x}^3 f(x, y) dy$ .

**Завдання 9.**  $y = x^2$ ,  $x + y = 2$ .

**Завдання 10.**  $D: x \leq 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 4$ ,  $y = -x$ .

**Завдання 11.**  $\iiint_V (xy - z^3) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3.$

**Завдання 12.**  $x \geq 0, z \geq 0, y \geq x, z = 1 - x^2 - y^2.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} (xy - 1) dx + x^2 y dy,$  де  $L_{AB}$  – відрізок прямої  $AB; A(1, 0); B(0, 2).$

**Завдання 14.**  $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}) dl,$  де  $L_{AB}$  – дуга астроїди  $x = \cos^3 t,$   
 $y = \sin^3 t$  між точками  $A(1, 0)$  та  $B(0, 1).$

### Модуль 4

1. $\sin^2 2x dx + \frac{\ln y dy}{y^3} = 0$	2. $y'e^x = x$
3. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$	4. $y' = \cos \frac{7x - 3y + 2}{x + 3}$
5. $y' - \frac{3x^2 y}{x^3 + 8} = 1$	6. $y' + \frac{4y}{x} = \sqrt[4]{y^3} \sin^2 x$
7. $(1 + \frac{y^2}{x^2}) dx - \frac{2y}{x} dy = 0$	8. $y'' = \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$
9. $xy'' - y' \ln \frac{y'}{x} = 0$	10. $y^2 y'' = y'^3$
11. $y'' + 6y' - 7y = 0$	12. $y'' + 4y = e^{-x} (3x - 1)$
13. $y'' + y' = x^2 - x + 3;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x(x+3)}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 7x + 3y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$

## ВАРІАНТ 23

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{\sqrt[5]{x-2x^3+4}}{x^2} dx$	2. $\int \sqrt{5-4x} dx$	3. $\int \frac{dx}{1+6x}$	4. $\int \cos(7x+3) dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$	6. $\int \frac{xdx}{2x^2-7}$	7. $\int \frac{\sqrt[5]{\arcsin x-3}}{\sqrt{1-x^2}} dx$	8. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{4x-1}}$
9. $\int \frac{(\arctg 2x-1)^2}{1+4x^2} dx$	10. $\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$	11. $\int (2x+1) \arctg x dx$	12. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$
13. $\int \arctg 2x dx$	14. $\int x e^{2x} dx$	15. $\int \frac{xdx}{(x-2)(x^2-2x+4)}$	16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+49}}$
17. $\int \frac{dx}{\sin 2x \cos^2 2x}$	18. $\int \operatorname{tg}^2(9x+2) dx$	19. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$	20. $\int \frac{dx}{3\sin x-5\cos x+4}$

#### Завдання 2.

1. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$	2. $\int_1^2 y^2 \ln y dy$	3. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$
4. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$	5. $\int_0^{\pi/4} \sin 3x \cos 5x dx$	6. $\int_{-1/2}^0 \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$	2. $\int_{1/2}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)}$	3. $\int_4^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$	4. $\int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx$
----------------------------------	--	--	---

**Завдання 4.**  $y^2 = (4-x^3), \quad x=0.$

**Завдання 5.**  $x = 7(t - \sin t), \quad y = 7(1 - \cos t), \quad (2\pi \leq t \leq 4\pi).$

**Завдання 6.**  $\Phi: y = 2x - x^2, \quad y = x^2, \quad Ox.$

**Завдання 7.**  $L: x = \cos t, \quad y = 3 + \sin t, \quad Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_0^2 dx \int_{x^2-1}^{2-x} f(x, y) dy.$

**Завдання 9.**  $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad x=4.$

**Завдання 10.**  $D: y = 3 - x^2, \quad y = -x.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V x^3 yz dx dy dz, V: -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1.$

**Завдання 12.**  $z \geq 0, x^2 + y^2 = 4, z = x^2 + y^2.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} 2xy dx + y^2 dy + z^2 dz,$  де  $L_{AB}$  – дуга одного витка гвинтової лінії  $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t, A(1, 0, 0)$  до точки  $B(1, 0, 4\pi).$

**Завдання 14.**  $\int_L xy dl,$  де  $L$  – контур квадрата зі сторонами  $x = \pm 1, y = \pm 1.$

### Модуль 4

1. $\sin 5x dx + ytg^2 y dy = 0$	2. $y' + y \sin 2x = 0$
3. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$	4. $dy(3x - 7y) = dx(5x + 2)$
5. $y' + \frac{xy}{x^2 + a^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	6. $y^3 y' + \frac{y^4}{2x} = \sin x$
7. $(6xy + x^2 + 3)y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$	8. $y'' = \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}$
9. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$	10. $y(y+2)y'' = 2y'^2$
11. $y'' + 4y' - 5y = 0$	12. $y'' + y' = x^2 + 1$
13. $y'' - 3y' - 4y = xe^{2x};$ $y _{x=0} = 1; y' _{x=0} = 1$	14. $y'' + 3y' = \frac{e^{-2x}}{e^{2x} + 1}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x + 18t \end{cases}$

## ВАРІАНТ 24

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( \sqrt{x} - \frac{3x^2}{\sqrt{x^3}} + 2 \right) dx$	2. $\int \sqrt[5]{(6-5x)^2} dx$	3. $\int \frac{dx}{2+7x}$	4. $\int \sin(7-4x) dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$	6. $\int \frac{9x dx}{\sqrt{1-9x^2}}$	7. $\int \frac{(5-\sqrt{\ln x})^2}{x} dx$	8. $\int \frac{\sin x dx}{1+3 \cos x}$
9. $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$	10. $\int (x+3) \sin 2x dx$	11. $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6} dx$	12. $\int \frac{dx}{3-2 \cos x}$
13. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1} dx$	14. $\int \frac{(4+2\sqrt{\operatorname{ctg} x})^2}{\sin^2 x} dx$	15. $\int x^5 \ln \frac{x}{4} dx$	16. $\int \frac{dx}{x^3-3x^2+x-3}$
17. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}$	18. $\int \frac{dx}{2 \sin x + 1}$	19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2+2x+5}}$	20. $\int \frac{dx}{\sin x + 3 \cos x + 5}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^{\sqrt{\pi}/4} \frac{x dx}{\cos^2(x^2)}$ ,	2. $\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx$ ,	3. $\int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)^2} dx$ ,
4. $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$ ,	5. $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx$ ,	6. $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ .

#### Завдання 3.

1. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$	2. $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}$	3. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$	4. $\int_{1/2}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1-x) \ln^2(1-x)}$
---	--	--	---

**Завдання 4.**  $c = 3 \sin 4\varphi$ .

**Завдання 5.**  $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ ,  $(0 \leq x \leq 2)$ .

**Завдання 6.**  $\Phi: y = -x^2 + 8$ ,  $y = x^2$ ,  $Ox$ .

**Завдання 7.**  $L: x = 2(t - \sin t)$ ,  $y = 2(1 - \cos t)$ ,  $(0 \leq t \leq 2\pi)$ ,  $Ox$ .

**Завдання 8.**  $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ .

**Завдання 9.**  $y = 1 - x^2$ ,  $y = x^2 - 1$ .

**Завдання 10.**  $D: x = 0$ ,  $x = -2$ ,  $y \geq 0$ ,  $y = x^2 + 4$ .

**Завдання 11.**  $\iiint_V xy^2 z dx dy dz, V : -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3.$

**Завдання 12.**  $z \geq 0, y = 2, y = x, z = x^2.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} \frac{y}{x} dx + x dy,$  де  $L_{AB}$  – дуга лінії  $y = \ln x$  від точки

$A(1, 0)$  до точки  $B(e, 1).$

**Завдання 14.**  $\int_L y^2 dl,$  де  $L$  – перша арка циклоїди  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t.$

### Модуль 4

1. $\frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}} - \frac{\frac{1}{e^y} dy}{y^2} = 0$	2. $(\sqrt{xy} - \sqrt{y}) dx - 2x dy = 0$
3. $xy' = y(4 + \ln x - \ln y)$	4. $\frac{dy}{dx} = \frac{7x - 5y + 2}{3x + x - 1}$
5. $y' - \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = 1$	6. $y' \sqrt{y} + \frac{2y \sqrt{y}}{x} = \ln x$
7. $\sin(x+y) dx + x \cos(x+4)(dy+dx) = 0$	8. $y'' = x \sin x \cos x$
9. $xy'' + y' = x^3$	10. $yy'' = y'(y^3 - y')$
11. $y'' + 3y' - 10y = 0$	12. $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$
13. $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 1$	14. $y'' - y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y \end{cases}$

## ВАРІАНТ 25

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( \sqrt[5]{x} - \frac{4}{x^5} + 2 \right) dx$	2. $\int \sqrt[4]{2-5x} dx$	3. $\int \frac{dx}{7-3x}$	4. $\int \cos(3x-7) dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$	6. $\int \frac{3x dx}{9x^2+2}$	7. $\int \sqrt[3]{7+x^2} x dx$	8. $\int \frac{\cos x dx}{1+2 \sin x}$
9. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$	10. $\int (x+9) \sin x dx$	11. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}} dx$	12. $\int e^{-3x^2} x dx$
13. $\int \frac{\cos x}{3-5 \sin^2 x} dx$	14. $\int \frac{\sqrt{3^x+9}}{3^{-x}} dx$	15. $\int (x-1) \sin 8x dx$	16. $\int \frac{x dx}{x^2-4x-12}$
17. $\int \frac{dx}{x \sqrt{49-x^2}}$	18. $\int \frac{dx}{5+\cos x}$	19. $\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx$	20. $\int \frac{dx}{2 \cos x - 3 \sin x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$	2. $\int_0^\pi (x+2) \cos \frac{x}{2} dx$	3. $\int_{-1}^0 \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{(x-2)^2} dx$
4. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+3)^{3/2}}$	5. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 \varphi d\varphi$	6. $\int_6^8 \frac{dx}{x^2+2x}$

#### Завдання 3.

1. $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$	2. $\int_{-1}^\infty \frac{x dx}{x^2+4x+5}$	3. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$	4. $\int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2-9x+1}$
-------------------------------------	---	---	---

**Завдання 4.**  $y = x^3, \quad y = 1, \quad x = 0.$

**Завдання 5.**  $x = 4 \cos^3 t, \quad y = 4 \sin^3 t.$

**Завдання 6.**  $\Phi : y^2 = (x+4)^3, \quad x = 0, \quad O_x.$

**Завдання 7.**  $L : y = \sqrt{x}$ , що відсікається прямою  $y = x$ ,  $O_x$ .

**Завдання 8.**  $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx.$

**Завдання 9.**  $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x.$

**Завдання 10.**  $D : x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad (x-3)^2 + y^2 = 1.$



**Завдання 11.**  $\iiint_V xyz^2 dx dy dz, V : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 4$  ю

**Завдання 12.**  $z \geq 0, y + z = 2, x^2 + y^2 = 4.$

**Завдання 13.**  $\oint_L y dx - x dy,$  де  $L$  – дуга еліпса  $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t,$  що проходить в додатному напрямку обходу.

**Завдання 14.**  $\int_{L_{ABCD}} xy dl,$  де  $L_{ABCD}$  – контур трикутника з вершинами  $A(2, 0), B(4, 0), C(4, 3), D(2, 3).$

### Модуль 4

1. $\frac{dx}{x^2 + 3x - 10} - ye^{-y} dy = 0$	2. $x\sqrt{1 + y^2} dx + y\sqrt{1 + x^2} dy = 0$
3. $xyy' = y^2 + x\sqrt{9x^2 + 4y^2}$	4. $y' = \frac{3x - 2y + 2}{3y - 2x + 1}$
5. $y dx + x dy = y dy$	6. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \sqrt{1 + x^2}$
7. $(xe^y + e^x)y' + e^y + ye^x = 0$	8. $y''' = x + \cos x$
9. $y'' + y' \operatorname{tg} x = 0$	10. $y'' \operatorname{tg} y - 2y = 2y'^2$
11. $y'' - 10y' = 0$	12. $y'' + y' = x + e^x - 2$
13. $y'' + y = 3 - 5 \sin 3x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^x}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases}$

## ВАРІАНТ 26

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \frac{\sqrt[7]{x^6 - 2x^2 + 3}}{x} dx$	2. $\int \sqrt[3]{4 - 2x} dx$	3. $\int \frac{dx}{5 - 2x}$	4. $\int \sin(8x - 5) dx$
5. $\int \frac{dx}{4x^2 - 3}$	6. $\int \frac{5x dx}{\sqrt{7x^2 - 1}}$	7. $\int x^3 \sqrt{4 - 3x^4} dx$	8. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2 \cos x}}$
9. $\int \frac{x+9}{\sqrt{9+x+3}} dx$	10. $\int x \cos(1-x) dx$	11. $\int \frac{x dx}{x^2 - 7x + 13}$	12. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx$
13. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$	14. $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)} dx$	15. $\int \sqrt[3]{1+3\sin x} \cos x dx$	16. $\int x \cos 3x dx$
17. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$	18. $\int \frac{dx}{6 + 5 \cos x}$	19. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} dx$	20. $\int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$	2. $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$	3. $\int_3^5 \frac{(x^2+2) dx}{(x+1)^2(x-1)}$
4. $\int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2} dx$	5. $\int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx$	6. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$

#### Завдання 3.

1. $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$	2. $\int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$	3. $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$	4. $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$
----------------------------------	---	---	---

**Завдання 4.**  $xy = 6, \quad x + y - 7 = 0.$

**Завдання 5.**  $x = \sqrt{3t^2}, \quad y = t - t^3$  (петля).

**Завдання 6.**  $\Phi: y = x^3, \quad x = 0, \quad y = 8, \quad Oy.$

**Завдання 7.**  $L: 3y = x^2, \quad (0 \leq x \leq 2), \quad Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_1^3 dy \int_{y^2/9}^1 f(x, y) dx.$

**Завдання 9.**  $y = x^2 + 4x, \quad x - y + 4 = 0.$

**Завдання 10.**  $D: x = \sqrt{9 - y^2}, \quad y = x, \quad y \geq 0.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x + yz) dx dy dz, V : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2.$

**Завдання 12.**  $y \geq 0, z \geq 0, x - y = 0, 2x + y = 2, 4z = y^2.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy,$  де  $L_{OA}$  – дуга параболи  $y = x^2 / 4$  від точки  $O(0, 0)$  до точки  $A(2, 1).$

**Завдання 14.**  $\int_L y dl,$  де  $L$  – дуга параболи  $y^2 = 2x,$  відокремлена параболою  $x^2 = 2y.$

### Модуль 4

1. $(\arcsin x)^2 dx + (e^y - 1)^4 e^y dy = 0$	2. $\sqrt{\ln x(1 - y^2)} dx = x \arcsin y dy$
3. $2(x^2 - y^2) dx + (5x + 2y) x dy = 0$	4. $dy(3x - 7) = dx(5x + y - 1)$
5. $y dx + x dy = ye^{2y+3} dy$	6. $y' + \frac{y}{x} = y^2(1 + x^2)$
7. $(1 + e^{\frac{x}{y}}) dx + e^{\frac{x}{y}} (1 - \frac{x}{y}) dy = 0$	8. $y''' = xe^x$
9. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$	10. $4y'' \sqrt{y} = 1$
11. $y'' - 3y' - 4y = 0$	12. $y'' - y' = x^2 + x - 1$
13. $y'' - 4y = e^{-2x+1}; y _{x=0} = 1; y' _{x=0} = 1$	14. $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 1 \end{cases}$

## ВАРІАНТ 27

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{2}{x^3} + 1 \right) dx$	2. $\int \sqrt{3-4x} dx$	3. $\int \frac{dx}{2x+7}$	4. $\int \cos(8x-4) dx$
5. $\int \frac{dx}{8x^2-9}$	6. $\int \frac{3x dx}{\sqrt{9x^2+5}}$	7. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$	8. $\int \sqrt{1+4\sin x} \cos x dx$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$	10. $\int (1-x) \ln x dx$	11. $\int \frac{(3x-6) dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$	12. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$
13. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x}$	14. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}}$	15. $\int \arccos x dx$	16. $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$
17. $\int \frac{dx}{x^3+8}$	18. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$	19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{16+x^2}}$	20. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$	2. $\int_{-3}^0 (x-2) e^{-x/3} dx$	3. $\int_{-1}^0 \frac{x dx}{x^3-1}$
4. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$	5. $\int_0^\pi \cos^4 x \sin^2 x dx$	6. $\int_2^3 \frac{3x-2}{x^2-4x+5}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$	2. $\int_0^\infty \frac{x dx}{4x^2+4x+5}$	3. $\int_1^\infty \frac{x dx}{\sqrt{16x^4-1}}$	4. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$
---	---	--	--

**Завдання 4.**  $y = 2^x$ ,  $y = 2x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

**Завдання 5.**  $\rho = 5 \sin \varphi$ .

**Завдання 6.**  $\Phi : x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ ,  $Ox$ .

**Завдання 7.**  $L : y = x^3/2$ , що відсікається прямою  $y = 3/2$ ,  $Oy$ .

**Завдання 8.**  $\int_{-1}^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy$ .

**Завдання 9.**  $y = x$ ,  $y = 5x$ ,  $x = 1$ .

**Завдання 10.**  $D : x + 2y - 6 = 0$ ,  $y = x$ ,  $y \geq 0$ .

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x + y^2 - z) dx dy dz, V : -2 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 5.$

**Завдання 12.**  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + y = 2, z = y^2.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{AB}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy,$  де  $L_{AB}$  – ламана лінія  $y = |x|$  від точки  $A(-1, 1)$  до точки  $B(2, 2)$ .

**Завдання 14.**  $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{x - y},$  де  $L_{AB}$  – відрізок прямої, замкнений між точками  $A(4, 0)$  та  $B(6, 1)$ .

### Модуль 4

1. $\cos^4 x dx + \arctg \sqrt{y} dy = 0$	2. $x^2 dx + y^3 e^{x+y} dy = 0$
3. $(5x^2 - 3y^2) dx + (2x + 4y) x dy = 0$	4. $y' = \frac{5x - y + 1}{3x - 2y}$
5. $y' + \frac{6x^2 y}{x^2 + 1} = \frac{1}{x}$	6. $y' + \frac{y \sin 2x}{\cos 2x - 5} = y^5$
7. $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2 y + 4y^2) dy = 0$	8. $y''' = x \ln x$
9. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$	10. $(y - 3)(y - 4)y'' = y'^2$
11. $y'' + 25y = 0$	12. $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x$
13. $y'' - 2y' + y = xe^x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 6y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = x + \cos t \end{cases}$

## ВАРІАНТ 28

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( \frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + 6 \right) dx$	2. $\int \sqrt[5]{3+2x} dx$	3. $\int \frac{dx}{2x+9}$	4. $\int \sin(9x-1) dx$
5. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$	6. $\int \frac{2x dx}{5x^2-3}$	7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{9-2x^3}}$	8. $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x} dx$
9. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$	10. $\int e^{x+2} x dx$	11. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$	12. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$
13. $\int x^2 \sin 4x dx$	14. $\int \frac{\sqrt[3]{\arctg x}}{1+x^2} dx$	15. $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$	16. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$
17. $\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x} dx$	18. $\int \operatorname{ctg}^3 4x dx$	19. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx$	20. $\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	2. $\int_1^e x \ln^2 x dx$	3. $\int_2^3 \frac{dx}{x^4-1}$
4. $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$	5. $\int_0^{\pi/2} \cos x \cos 3x \cos 5x dx$	6. $\int_{3,5}^5 \frac{x dx}{x^2-7x+13}$

#### Завдання 3.

1. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$	2. $\int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx$	3. $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$	4. $\int_0^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
--	---	--	--

**Завдання 4.**  $x^2 = 4y, \quad y = 8/(x^2 + 4).$

**Завдання 5.**  $\rho = 5 \cos \varphi.$

**Завдання 6.**  $\Phi : 2y = x^2, \quad 2x + 2y - 3 = 0, \quad Ox.$

**Завдання 7.**  $L : x = 10(t - \sin t), \quad y = 10(1 - \cos t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y^2} f(x, y) dx.$

**Завдання 9.**  $xy = 3, \quad y = 4e^x, \quad y = 3, \quad y = 4.$

**Завдання 10.**  $D : y = -x, \quad 3x + y = 3, \quad y = 3.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x + y + z^2) dx dy dz, V : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 3.$

**Завдання 12.**  $z \geq 0, x = y^2, x = 2y^2 + 1, z = 1 - y^2.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy + z dz,$  де  $L_{OA}$  – відрізок прямої, що з'єднує точки  $O(0, 0, 0)$  та точки  $A(2, 1, -1)$ .

**Завдання 14.**  $\int_L (x^2 + y^2)^2 dl,$  де  $L$  – перша чверть кола  $\rho = 2.$

### Модуль 4

1. $\cos^3 2x dx - y^2 \ln(1+y) dy = 0$	2. $2\sqrt{x} y' = y$
3. $(2x^2 + 3y^2) dx + (2x - 3y) x dy = 0$	4. $(3x + 6 - 1) dy = (7x - 5y) dx$
5. $y' + \frac{2xy}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^4 - 1}$	6. $y' + \frac{y}{x} = y^2 x \sin x$
7. $(2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2 y) dy = 0$	8. $y''' = \frac{x}{(x+2)^5}$
9. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$	10. $(y + 5)y'' = y'^2$
11. $y'' - 4y' + 13y = 0$	12. $y'' - 3y - 4y = \sin x + e^{2x}$
13. $y'' - 2y' + y = (4x^2 + 1)e^{-x};$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^3 2x}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = t^2, \\ \frac{dy}{dt} = t + x \end{cases}$

## ВАРІАНТ 29

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} - \frac{7}{x^3} + 5 \right) dx$	2. $\int \sqrt[4]{(3+5x)^3} dx$	3. $\int \frac{dx}{7x-3}$	4. $\int \cos(10x-3) dx$
5. $\int \frac{2dx}{4+3x^2}$	6. $\int \frac{xdx}{3x^2-2}$	7. $\int \sqrt[7]{1+\cos^2 x} \sin 2x dx$	8. $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx$
9. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$	10. $\int x \sin(4-5x) dx$	11. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$	12. $\int e^{3-5x} dx$
13. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx$	14. $\int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx$	15. $\int x^2 \ln x dx$	16. $\int \frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2} dx$
17. $\int \frac{dx}{5+4 \cos x}$	18. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$	19. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-1}}$	20. $\int \frac{6 \sin x + \cos x}{1 + \cos x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_0^1 3(x^2 + x^2 e^{x^3}) dx$	2. $\int_0^{\pi/2} (x+3) \sin x dx$	3. $\int_2^3 \frac{x^7 dx}{1-x^4}$
4. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx$	5. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3 x dx$	6. $\int_3^4 \frac{x^2 dx}{x^2-6x+10}$

#### Завдання 3.

1. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$	2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x) \ln 5}$	3. $\int_1^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$	4. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$
--	---	--	--

**Завдання 4.**  $y = x+1, \quad y = \cos x, \quad y = 0.$

**Завдання 5.**  $\rho = 5(1 + \cos \varphi).$

**Завдання 6.**  $\Phi : y = x - x^2, \quad y = 0, \quad Ox.$

**Завдання 7.**  $L : \rho = 2 \cos \varphi$ , полярна вісь.

**Завдання 8.**  $\int_1^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx.$

**Завдання 9.**  $y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{1}{2}x.$

**Завдання 10.**  $D : x \geq 0, \quad y = 1, \quad y = -1, \quad y = \log_{1/2} x.$



**Завдання 11.**  $\iiint_V (x + y^2 - 2z) dx dy dz$ ,  $V : 1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1$ .

**Завдання 12.**  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y = 3 - x, z = 9 - x^2$ .

**Завдання 13.**  $\oint_L x dy - y dx$ , де  $L$  – контур трикутника з вершинам  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 1)$  при додатному напрямку обходу.

**Завдання 14.**  $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , де  $L_{AB}$  – відрізок прямої, що з'єднує точки  $A(1, 1, 1)$  та  $B(2, 2, 2)$ .

#### Модуль 4

1. $\ln(x^2 + 1)dx - \frac{\cos 3y dy}{4 + \sin 3y} = 0$	2. $(1 + e^x)yy' = e^x$
3. $(4xy - y^2)dx + 2(y - x)xdy = 0$	4. $(3x + 2 - y)dy - (5x - 7y + 1)dx = 0$
5. $y' + \frac{y}{(x-1)(x-3)} = x\sqrt{x-1}$	6. $y^4 y' = (\ln x - 3)^6 + \frac{y^5}{5x}$
7. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$	8. $y''' = x \cos 2x$
9. $(4 - x^2)y'' + 2xy' = 0$	10. $(y + 2)(y + 3)y'' = y'^2$
11. $y'' + 2y' = 0$	12. $y'' + 3y' - 4y = (x + 2)e^x$
13. $y'' - 2y' = e^{3x} \sin x;$ $y _{x=0} = 0; y' _{x=0} = 0$	14. $y'' + 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 4x}}$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0 \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + (-e^t) \end{cases}$

## ВАРІАНТ 30

### Модуль 3

#### Завдання 1.

1. $\int \left( \frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 2 \right) dx$	2. $\int \sqrt[3]{(2-x)^2} dx$	3. $\int \frac{dx}{6x+1}$	4. $\int \sin(9x+7) dx$
5. $\int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2-3}}$	6. $\int \frac{7xdx}{7x^2+1}$	7. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$	8. $\int \sin^3 x \sqrt[3]{\cos x} dx$
9. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{5-3x}}$	10. $\int x \ln(x+15) dx$	11. $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2-4x+5}$	12. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$
13. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} dx$	14. $\int x \operatorname{arctg} x dx$	15. $\int (2 \sin \frac{x}{2} + 3)^2 \cos \frac{x}{2} dx$	16. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$
17. $\int \frac{dx}{3+5 \cos x}$	18. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} dx$	19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+4}}$	20. $\int \frac{dx}{\cos x - 3 \sin x}$

#### Завдання 2.

1. $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	2. $\int_{3/2}^2 \operatorname{arctg} (2x-3) dx$	3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}$
4. $\int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$	5. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}$	6. $\int_{1/6}^2 \frac{dx}{3x^2-x+1}$

#### Завдання 3.

1. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$	2. $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$	3. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$	4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$
------------------------------------	---------------------------------	--	---

**Завдання 4.**  $x^3 = 2 \cos^3 t, \quad y = 2 \sin^3 t.$

**Завдання 5.**  $y^2 = x^3$  від точки  $A(0,0)$  до точки  $B(4,8).$

**Завдання 6.**  $\Phi: y = 2 - x^2/2, \quad x + y = 2, \quad Oy.$

**Завдання 7.**  $L: y = x^3/3, \quad (-1/2 \leq x \leq 1/2), \quad Ox.$

**Завдання 8.**  $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$

**Завдання 9.**  $y = \sqrt{x}/2, \quad y = 1/2x, \quad x = 16.$

**Завдання 10.**  $D : x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y = 1, \quad x = \sqrt{4 - y^2}.$

**Завдання 11.**  $\iiint_V (x - y - z) dx dy dz, \quad V : 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad -2 \leq z \leq 1.$

**Завдання 12.**  $x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y = 4, \quad z = 4\sqrt{y}.$

**Завдання 13.**  $\int_{L_{ACB}} (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy,$  де  $L_{ACB}$  – ламана  $ACB$ ;  $A(2, 0),$   
 $C(5, 0), B(5, 3).$

**Завдання 14.**  $\oint_L (x - y) dl,$  де  $L$  – коло  $x^2 + y^2 = 2x.$

#### Модуль 4

1. $x \sin 3x dx + \frac{y dy}{(y^2 + 4)^6} = 0$	2. $1 + y^2 = y' \sqrt{x}$
3. $x^3 dy + (4y^3 + 3x^2 y) dx = 0$	4. $y' = \frac{3x + 2y - 20}{5x + 7y - 11}$
5. $y' + \frac{xy}{x^2 + 1} = 1$	6. $y' - \frac{y}{x} = y^2 \sqrt{x^2 + 4}$
7. $yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy = 0$	8. $y'' = \arctg x$
9. $2y'y'' = (y')^2 + 1$	10. $yy'' = 1 + y'^2$
11. $y'' - 8y' + 15y = 0$	12. $y'' - 2y' + y = 3 \sin 2x + 4e^x$
13. $y'' + 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6;$ $y _{x=0} = 1; y' _{x=0} = 3$	14. $y'' + y = -\text{ctg}^2 x$
15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 7y \end{cases}$	16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + 16 + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = 2(x - y) \end{cases}$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Т. 1,2. – М., Наука, 1985.
2. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика.– К., Вища школа, 1993.
3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление.– М., Наука, 1980.
4. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.– М., Наука, 1980.
5. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. – Харьков, Изд-во Харьковского ун-та, 1971.
6. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу.– М., Высшая школа, 1964.
7. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 1,2. – М., Высшая школа, 1980.

Навчально-методичне видання

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Практичний посібник  
з вищої математики для студентів першого курсу  
інженерних спеціальностей

Укладачі: **ФЕДОРЕНКО** Наталія Дмитрівна  
**БЛОЩИЦЬКА** Світлана Василівна  
**ЗАБАРИЛО** Олексій Віталійович та ін.

Комп'ютерне верстання *Т.І. Кукарєвої*

Підписано до друку 2018. Формат 60 × 84<sup>1/16</sup>  
Ум. друк. арк. 5,81. Обл.-вид. арк. 6,25.  
Електронний документ. Вид. № 2/ПІ-18.

Видавець і виготовлювач  
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.

