Розділ 2
Комбінаторний аналіз

- Основні правила комбінаторного аналізу. Розміщення та сполучення
- Перестановки
- Біном Ньютона
- Поліноміальна теорема
- Задача про цілочислові розв'язки
- Числа Стірлінга другого роду та числа Белла
- Генерування перестановок, сполучень, розбиттів множини
- Рекурентні рівняння
- Принцип коробок Діріхле
- Принцип включення-виключення
- Твірні функції

У комбінаторному аналізі (комбінаториці) вивчають об'єкти зі скінченної множини $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ та їх властивості, а також визначають кількість об'єктів із певними властивостями. Розглядають також твердження (принципи), використовувані в різних задачах [19, 45]. На них ґрунтуються важливі методи математичного доведення, широко застосовувані в теорії скінченних автоматів [6] та інших розділах.

2.1. Основні правила комбінаторного аналізу. Розміщення та сполучення

Почнемо з формулювання двох основних правил комбінаторики: *правила суми* та *правила добутку*.

Правило суми. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об'єкт y – n_2 способами, то можна вибрати або x, або y $n_1 + n_2$ способами.

Приклад 2.1. Студент має вибрати тему курсової роботи зі списку, розміщеного на трьох аркушах. Аркуші містять відповідно 20, 15 і 17 тем. З якої кількості можливих тем студент робить свій вибір?

За правилом суми кількість тем для вибору становить $20 + 15 + 17 = 52$.

Правило добутку. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами та після кожного такого вибору об'єкт y можна вибрати n_2 способами, то пару об'єктів (x, y) у зазначеному порядку можна вибрати $n_1 n_2$ способами. Це правило можна пояснити інакше. Нехай якусь процедуру можна виконати розв'язавши два завдання. Якщо є n_1 способів розв'язати перше завдання та n_2 способів розв'язати після цього друге завдання, то всю процедуру можна виконати $n_1 n_2$ способами.

Приклад 2.2. В одній із версій мови БЕЙСІК ім'я змінної — це рядок з одного чи двох символів, якими можуть бути 26 букв латинського алфавіту та 10 цифр. Першим символом має бути буква. Крім того, не можна використовувати п'ять двосимвольних рядків, які зарезервовані для спеціального використання. Знайдемо, скільки різних імен змінних є в цій версії мови БЕЙСІК.

Нехай V — величина, яку потрібно обчислити, V_1 — кількість односимвольних імен, V_2 — двосимвольних. За правилом суми всього імен $V = V_1 + V_2$. Очевидно, що $V_1 = 26$; за правилом добутку $V_2 = 26 \cdot 36 - 5 = 931$. Отже, $V = 26 + 931 = 957$.

Розглянемо основні комбінаторні об'єкти — розміщення та сполучення [19], — попередньо означивши важливе поняття вибірки [17].

Нехай задано скінченну непорожню множину $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ і виконано r таких кроків.

Крок 1. Із множини A вибирають якийсь елемент a_{i_1}.

Крок 2. Із множини A чи з $A \setminus \{a_{i_1}\}$ вибирають якийсь елемент a_{i_2}.

... ...

Крок r. Якщо $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{r-1}}$ — елементи, які вибрані на перших $r - 1$ кроках ($r \geqslant 3$), то на цьому кроці вибирають якийсь елемент a_{i_r} із множини A чи $A \setminus \bigcup_{k=1}^{r-1} \{a_{i_k}\}$. Тоді елементи $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_r}$ утворюють *вибірку обсягом r*, або *r-вибірку*, із множини A.

Вибірку називають *упорядкованою*, якщо задано порядок її елементів, а ні — то *невпорядкованою*. Зрозуміло, що впорядкована r-вибірка — це кортеж (вектор) з r компонентами, і тому її позначають $(b_1, b_2, ..., b_r)$, $b_i \in A$, $i = 1, ..., r$. Невпорядковану r-вибірку позначатимемо як $[b_1, b_2, ..., b_r]$, $b_i \in A$, $i = 1, ..., r$.

Упорядковані r-вибірки з n-елементної множини називають *розміщеннями з n елементів по r*, а невпорядковані — *сполученнями з n елементів по r*. Використовують також поняття r-розміщення й r-сполучення. Розглянемо два способи вибору елементів.

Згідно з першим способом вибору на кожному кроці вибирають елемент з усієї множини A. Отже, один і той самий елемент із множини A може зустрітись у вибірці декілька разів. Такі вибірки називаються *вибірками з повтореннями*.

У разі застосування другого способу вибраний елемент вилучають із множини A. Це означає, що на кожному j-му кроці ($1 < j \leqslant k$) вибирають елемент із множини $A \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} \{a_{i_k}\}$, і вибірка не містить однакових елементів. Такі вибірки називають *вибірками без повторень*.

Приклад 2.3. Задано множину $A = \{a, b, c\}$, тобто $n = 3$.
Наведемо розміщення без повторень із трьох елементів по два, тобто $r = 2$:

$$(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b);$$

розміщення з повтореннями з трьох елементів по два:

$$(a, b), (a, c), (b, c), (b, a)\ (c, a), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c);$$

сполучення без повторень із трьох елементів по два:

$$[a, b], [a, c], [b, c];$$

сполучення з повтореннями із трьох елементів по два:

$$[a, b], [a, c], [b, c], [a, a], [b, b], [c, c].$$

Зазначимо, що сполучення без повторень з n елементів по r — це просто r-елементні підмножини множини з n елементів; отже, їх можна записати так: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Сполучення з повтореннями — це, узагалі кажучи, не множина у звичайному розумінні: її елементи можуть повторюватись, тобто зустрічатися більше одного разу.

2.2. Обчислення кількості розміщень і сполучень

Кількість усіх розміщень без повторень з n елементів по r позначають як A_n^r або $A(n, r)$, де r і n — невід'ємні цілі числа, причому $r \leqslant n$. Кількість різних розміщень із повтореннями з n елементів по r позначають як $\tilde{A}_n^r$ або $\tilde{A}(n,r)$. Тут r і n — будь-які невід'ємні цілі числа. Кількість усіх сполучень без повторень з n елементів по r позначають як C_n^r, $C(n, r)$ або $\binom{n}{r}$, де r і n — невід'ємні цілі числа, причому $r \leqslant n$. Кількість усіх сполучень із повтореннями з n елементів по r позначимо як H_n^r або $H(n, r)$, де r і n — будь-які невід'ємні цілі числа. Числа C_n^r називають *біноміальними коефіцієнтами.*

Доведемо, що

$$A_n^r = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \tag{2.1}$$

$$\tilde{A}_n^r = n^r, \tag{2.2}$$

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \tag{2.3}$$

$$H_n^r = C_{n+r-1}^r. \tag{2.4}$$

Доведемо рівність (2.1). Розглянемо якесь розміщення $(b_1, b_2, \dots, b_r)$ без повторень з n елементів по r. Ми можемо взяти як b_1 будь-який з n елементів, як b_2 — будь-який з $(n-1)$ елементів, що залишились, і продовжити цей процес. Отже, для b_r залишається $(n+r-1)$ можливостей вибору. Використавши правило добутку, переконуємось у тому, що рівність (2.1) правильна.

Рівність (2.2) також справджується, бо в розміщенні з повтореннями $(b_1, b_2, ..., b_r)$ для кожного елемента b_i, $i = 1, 2, ..., r$, є n незалежних можливостей вибору.

Доведемо рівність (2.3). Розглянемо якесь сполучення $[b_1, b_2, ..., b_r]$ без повторень з n елементів по r. Виявимо, скільки можна отримати різних розміщень без повторень з r елементів по r із цього сполучення як з r-елементної множини. За формулою (2.1) дістанемо $A_r^r = r(r-1)...2 \cdot 1 = r!$. Очевидно, що в разі $[b_1, ..., b_r] \neq [c_1, ..., c_r]$ із двох сполучень без повторень $[b_1, ..., b_r]$ і $[c_1, ..., c_r]$ не можна одержати однакових розміщень без повторень з r елементів по r. Отже, $A_n^r = r! \cdot C_n^r$, і рівність (2.3) доведено.

Нарешті, доведемо рівність (2.4). Замість n-елементної множини $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ розглянемо множину $A' = \{1, 2, ..., n\}$ також з n елементів. Кожну невпорядковану r-вибірку з множини A' можна записати у вигляді $[m_1, m_2, ..., m_r]$, де $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \leqslant ... \leqslant m_r$, оскільки порядок елементів не суттєвий. Тоді $[m_1 + 0, m_2 + 1, ..., m_r + r - - 1]$ – сполучення без повторень з $n + r - 1$ елементів по r.

Розглянемо відображення Γ множини всіх сполучень із повтореннями з n елементів по r на множину всіх сполучень без повторень з $n + r - 1$ елементів по r: $\Gamma([m_1, m_2, ..., m_r]) = [m_1 + 0, m_2 + 1, ..., m_r + r - 1]$. Два сполучення з повтореннями *рівні*, якщо вони складаються з однакових елементів і кратності цих елементів збігаються. Якщо $[m_1, m_2, ..., m_r] \neq [m_1', m_2', ..., m_r']$, то й $[m_1 + 0, m_2 + 1, ..., m_r + r - 1] \neq \neq [m_1' + 0, m_2' + 1, ..., m_r' + r - 1]$. Більше того, якщо $[n_1, n_2, ..., n_r]$ – сполучення без повторень з $n + r - 1$ елементів по r, де $n_1 < n_2 < ... < n_r$, то $[n_1, n_2 - 1, ..., n_r - r + 1]$ – елемент множини сполучень із повтореннями з n елементів по r. Отже, Γ – бієктивне відображення множини всіх сполучень із повтореннями з n елементів по r на множину всіх сполучень без повторень з $n + r - 1$ елементів по r. Рівність (2.4) доведено.

2.3. Перестановки

Перестановка з n елементів – це особливий випадок розміщення без повторень з n елементів, коли в розміщення входять усі елементи. Перестановки з n елементів називають також *n-перестановками*. Окремі n-перестановки різняться лише порядком елементів. Кількість таких перестановок позначають як P_n. Формулу для P_n одержують із формули (2.1) для кількості розміщень без повторень: $P_n = A_n^n = n!$.

Розглянемо тепер задачу про перестановки n елементів за умови, що не всі елементи різні (перестановки з повтореннями). Точніше, нехай є n елементів k різних типів, а число n_j $(j = \overline{1, ..., k})$ – кількість елементів j-го типу. Очевидно, що $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Перестановки з n елементів за такої умови називають *перестановками з повтореннями*. Кількість таких перестановок позначають як $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$. Щоб знайти явний вираз для $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$, візьмемо окрему перестановку та замінимо в ній усі однакові елементи різними. Тоді кількість різних перестановок, котрі можна отримати з узятої однієї перестановки, дорівнює $n_1!n_2! \dots n_k!$. Якщо зробити це для кожної перестановки, то одержимо $n!$ перестановок. Отже, $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)n_1!n_2! \dots n_k! = n!$, звідки

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Приклад 2.4. Знайдемо кількість слів (рядків), які можна утворити, переставляючи букви слова PRODUCT. Оскільки жодна буква тут не повторюється, то можна утворити $P_7 = 7! = 5040$ слів.

Приклад 2.5. Знайдемо, скільки слів можна утворити, переставляючи букви слова SUCCESS. У цьому слові є повторні входження букв, тому скористаємося формулою для перестановок із повтореннями:

$$P_7(3, 2, 1, 1) = \frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!} = 420 \text{ слів.}$$

Розглянемо задачу розкладання в ящики. Загальне формулювання цієї задачі таке. Дано n різних предметів і k ящиків. Потрібно покласти в перший ящик n_1 предметів, у другий — n_2 предметів, ..., k-й — n_k предметів, де $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Тут n_1, n_2, ..., n_k — фіксовані числа. Скількома способами можна зробити це?

Можна розкласти предмети так. Серед n предметів візьмемо довільну n_1-підмножину й покладемо її в перший ящик (це можна зробити $C_n^{n_1}$ способами). Серед $n - n_1$ предметів, що залишились, візьмемо n_2-підмножину й покладемо її в другий ящик (це можна зробити $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами) і продовжимо цей процес. За правилом добутку загальна кількість розкладань дорівнює

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \dots \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\dots-n_k)!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}.$$

Отже, розкладань у ящики стільки, скільки перестановок із повтореннями. Розглянемо зв'язок між цими двома задачами. Для цього занумеруємо всі n місць, які можуть займати предмети. Кожній перестановці відповідає розподіл номерів місць на k класів: в i-й клас потрапляють номери тих місць, на які покладено предмети i-го типу. Отже, знайдено відповідність між перестановками з повторенням та розкладанням номерів місць у ящики. Тому формули розв'язання обох задач збігаються.

2.4. Біном Ньютона

Нагадаємо, що біноміальними коефіцієнтами називають числа $C_n^r = n!/[r!(n-r)!]$ – кількість сполучень з n елементів по r. Розглянемо деякі властивості біноміальних коефіцієнтів.

1. Нехай n і r – невід'ємні цілі числа, $n \leqslant r$. Тоді $C_n^r = C_n^{n-r}$. Справді,

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r.$$

2. Рівність Паскаля: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

   Позначимо як $S_{n,k}$ множину всіх сполучень з елементів $\{a_1, ..., a_{n-1}, a_n\}$ по k елементів; як $S_{n-1,k}$ – відповідно з елементів $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$ по k; $S_{n-1,k-1}$ – з елементів $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$ по $k-1$. Кожному сполученню з $S_{n,k}$, яке містить елемент a_n, відповідає сполучення з $S_{n-1,k-1}$. Якщо ж сполучення з $S_{n,k}$ не містить a_n, то йому відповідає сполучення з $S_{n-1,k}$. Отже, існує бієкція між множинами $S_{n,k}$ й $S_{n-1,k} \cup S_{n-1,k-1}$. Оскільки очевидно, що $S_{n-1,k} \cap S_{n-1,k-1} = \varnothing$, то $|S_{n,k}| = |S_{n-1,k}| + |S_{n-1,k-1}|$, тобто $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

   Отримане рекурентне співвідношення дає змогу побудувати таблицю для чисел C_n^k, яку називають *трикутником Паскаля* (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	1										...
1	1	1									...
2	1	2	1								...
3	1	3	3	1							...
4	1	4	6	4	1						...
5	1	5	10	10	5	1					...
6	1	6	15	20	15	6	1				...
7	1	7	21	35	35	21	7	1			...
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		...
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

3. Послідовність (p_n) дійсних чисел називають *унімодальною*, якщо існує такий натуральний номер m, що $p_0 < p_1 < ... < p_m; p_m \geqslant p_{m+1} > p_{m-2} > ... > p_n$, тобто:
   - послідовність строго зростає на відрізку $[0, m]$, $m > 0$;
   - послідовність строго спадає на відрізку $[m+1, n]$, $m+1 < n$;
   - максимальне значення досягається не більше ніж у двох точках: m і, можливо, $m+1$.

Нагадаємо, що як $\lfloor x \rfloor$ позначають найбільше ціле число, яке менше чи дорівнює x (*цілу частину числа* x); наприклад, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.14 \rfloor = -4$.

ТЕОРЕМА 2.1. За фіксованого n послідовність біноміальних коефіцієнтів (C_n^k), $k = 0, 1, 2, ..., n$, унімодальна, $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. У разі парного n максимум досягається в точці $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$, а в разі непарного — у двох точках: $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ й $m+1 = \frac{n+1}{2}$.

Вказівка для доведення: оцінити відношення двох сусідніх членів послідовності $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}$.

4. Рівність Вандермонда. Нехай m, n, r — невід'ємні цілі числа, причому $r \leqslant \min\{m, n\}$. Тоді $C_{n+m}^r = \sum\limits_{k=0}^{r} C_m^{r-k} C_n^k$.

   Вказівка для доведення: скористатися правилом добутку.

ТЕОРЕМА 2.2 (біноміальна). Нехай x та y — змінні, n — додатне ціле число. Тоді

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j.$$

Доведення. Дамо комбінаторне доведення цієї теореми [1]. Оскільки $x^j y^{n-j}$ отримано внаслідок j-кратного вибору x і $(n-j)$-кратного вибору y з n співмножників у виразі $(x+y)^n$, то коефіцієнт при $x^j y^{n-j}$ дорівнює кількості способів j-кратного вибору x з n співмножників, тобто C_n^j. Друга рівність випливає з того, що $C_n^j = C_n^{n-j}$.

Легко переконатись, що $(x-y)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j x^{n-j} y^j$.

Приклад 2.6. Знайдемо розклад виразу $(x+y)^4$. Скориставшись біноміальною теоремою, можемо записати:

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4 = \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

Біноміальні коефіцієнти можна брати з трикутника Паскаля чи обчислювати за формулою (2.3).

Приклад 2.7. Визначимо коефіцієнт при $x^{12} y^{13}$ в розкладі $(x+y)^{25}$.

Очевидно, що цей коефіцієнт дорівнює

$$C_{25}^{13} = \frac{25!}{13! \cdot 12!} = 5200300.$$

За допомогою біноміальної теореми можна довести ще дві властивості біноміальних коефіцієнтів.

5. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.
   Справді, $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$.
6. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.
   Аналогічно до попереднього, $0 = [1+(-1)]^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} (-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

2.5. Поліноміальна теорема

Як узагальнення бінома розглянемо вираз у вигляді $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$. Основний результат сформульовано в наведеній нижче теоремі.

ТЕОРЕМА 2.3 (поліноміальна). Вираз $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$ дорівнює сумі всіх можливих доданків $P_n(n_1, n_2, ..., n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}$, де $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, тобто

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n =$$
$$= \sum_{\substack{n_1 \geqslant 0, ..., n_k \geqslant 0 \\ n_1 + ... + n_k = n}} P_n(n_1, ..., n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}.$$

Доведення. Запишемо $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$ у вигляді добутку n співмножників і розкриємо дужки. Коефіцієнт при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}$ дорівнює кількості перестановок із повтореннями таких, що елемент x_1 міститься в кожній з них n_1 разів, x_2 — n_2 разів, ..., x_k входить n_k разів, а всього елементів $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Очевидно, що цей коефіцієнт дорівнює $P_n(n_1, ..., n_k)$.

Отриману формулу називають *поліноміальною*. Вона, зокрема, дає змогу доводити деякі властивості чисел $P_n(n_1, ..., n_k)$. Зазначимо дві з них.

1. Нехай $x_1 = x_2 = ... = x_k = 1$; тоді

$$\sum_{\substack{n_1 \geqslant 0, ..., n_k \geqslant 0 \\ n_1 + ... + n_k = n}} P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = k^n.$$

2. Помножимо обидві частини поліноміальної формули для $n-1$ на $(x_1 + x_2 + ...$ $... + x_k)$ та порівняємо коефіцієнти при однакових доданках. Одержимо таке співвідношення:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = P_{n-1}(n_1 - 1, n_2, ..., n_k) + P_{n-1}(n_1, n_2 - 1, ..., n_k) + ...$$
$$... + P_{n-1}(n_1, n_2, ..., n_k - 1).$$

2.6. Задача про цілочислові розв'язки

Цю задачу формулюють так: знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$ у цілих невід'ємних числах, де n – ціле невід'ємне число.

Узявши такі невід'ємні цілі числа $x_1, x_2, ..., x_r$, що $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$, можна одержати сполучення з повтореннями з r елементів по n, а саме: елементів першого типу – x_1 одиниць, другого – x_2, ..., r-го – x_r. Навпаки, якщо є сполучення з повтореннями з r елементів по n, то кількості елементів кожного типу задовольняють рівнянню $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$ у цілих невід'ємних числах. Отже, кількість цілих невід'ємних розв'язків цього рівняння дорівнює

$$H_r^n = C_{r+n-1}^n = \frac{(r+n-1)!}{n!\,(r-1)!}.$$

Приклад 2.8. Знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 11$. Безпосереднє використання попередньої формули дає

$$H_3^{11} = C_{3+11-1}^{11} = C_{13}^{11} = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78.$$

Кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$ у цілих невід'ємних числах можна визначити й тоді, коли на змінні накладено певні обмеження.

Приклад 2.9. Знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ за умов $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 2$, $x_3 \geqslant 3$. Очевидно, що ця задача еквівалентна рівнянню $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ без обмежень. Справді, потрібно взяти щонайменше один елемент першого типу, два елементи другого типу, три елементи третього – разом $1 + 2 + 3 = 6$ елементів; отже, $11 - 5 = 6$ елементів залишаться для довільного вибору,

$$H_3^5 = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21.$$

Приклад 2.10. Визначимо кількість розв'язків нерівності $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 11$ в невід'ємних цілих числах. Уведемо допоміжну змінну x_4, яка може набувати цілих невід'ємних значень, і перейдемо до еквівалентної задачі: визначити кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ в невід'ємних цілих числах. Отже,

$$H_4^{11} = C_{4+11-1}^{11} = C_{14}^{11} = \frac{14!}{11! \cdot 3!} = 364.$$

2.7. Числа Стірлінга другого роду та числа Белла

Розглянемо задачу визначення кількості розбиттів множини A на непорожні частини (розбиття означено в підрозділі 1.13).

Приклад 2.11. Якщо $A = \{a, b, c\}$, то є такі розбиття цієї множини на k непорожніх частин:

$k = 1$: $\{\{a, b, c\}\}$ (одне розбиття);

$k = 2$: $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$ (три розбиття);

$k = 3$: $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ (одне розбиття).

Позначимо як $\Phi(n, k)$ кількість розбиттів n-елементної множини A на k непорожніх частин, $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, як $\Phi(n)$ — кількість усіх розбиттів множини A на непорожні частини. Числа $\Phi(n, k)$ називають *числами Стірлінга другого роду*, а $\Phi(n)$ — *числами Белла*. Очевидно, що

$$\Phi(n) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(n, k).$$

Для розглянутого прикладу $\Phi(3, 1) = 1$; $\Phi(3, 2) = 3$; $\Phi(3, 3) = 1$; $\Phi(3) = 1 + 3 + 1 = 5$.

Довільне розбиття множини A на k непорожніх частин можна одержати так:

- із розбиття множини $A \setminus \{a_n\}$ на $(k-1)$ непорожню частину додаванням підмножини $\{a_n\}$;
- із розбиття множини $A \setminus \{a_n\}$ на k непорожніх частин додаванням до однієї з цих частин елемента a_n (це можна зробити k способами).

Звідси випливає тотожність $\Phi(n, k) = \Phi(n-1, k-1) + k\Phi(n-1, k)$. За її допомогою можна побудувати таблицю для чисел $\Phi(n, k)$, а, отже, і $\Phi(n)$ (табл. 2.2).

Для чисел Белла існує проста рекурентна залежність $\Phi(n+1) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \Phi(i)$ (уважаємо, що $\Phi(0) = 1$).

Таблиця 2.2

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	...	
1	1						...	1
2	1	1					...	2
3	1	3	1				...	5
4	1	7	6	1			...	15
5	1	15	25	10	1		...	52
6	1	31	90	65	15	1	...	203
...	...	...	...	...	...	...	...	...

ТЕОРЕМА 2.4. За фіксованого n послідовність $(\Phi(n, k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$, унімодальна [49].

2.8. Генерування перестановок

Проблемі систематичної побудови всіх $n!$ перестановок n-елементної множини присвячено багато публікацій. Ця проблема має давню історію. Її появу можна віднести до початку XVII ст., коли в Англії виникло особливе мистецтво дзвонарства. Воно полягало у вибиванні на n різних дзвонах усіх $n!$ перестановок. Це слід було робити по пам'яті. Тому шанувальники цього мистецтва розробили перші прості методи систематичної побудови всіх перестановок без повторень.

Деякі з цих незаслужено забутих методів було знову відкрито в наш час у зв'язку з появою комп'ютерів. Зазначене мистецтво проіснувало довго. Знаменита „Книга рекордів Гіннеса" містить інформацію про вибивання всіх $8! = 40320$ перестановок на восьми дзвонах у 1963 р. Для цього було потрібно 17 год 58 хв 30 с. Звичайно, використання комп'ютерів дає змогу генерувати перестановки значно швидше.

Кожній n-елементній множині A можна поставити у взаємно-однозначну відповідність множину $A' = \{1, 2, ..., n\}$. Зручно спочатку генерувати перестановки n перших натуральних чисел, а потім замінити кожне число відповідним елементом множини A. Унаслідок цього отримаємо всі перестановки елементів даної множини A.

Існують різні алгоритми побудови всіх перестановок множини $A' = \{1, 2, ..., n\}$. Розглянемо один із них. Цей алгоритм ґрунтується на послідовній побудові перестановок множини A' у лексикографічному порядку [23, 52]. Далі перестановку $(a_1, a_2, ..., a_n)$ для спрощення записів позначатимемо як $a_1a_2 ... a_n$.

На множині всіх перестановок (загальніше — на множині всіх кортежів довжиною n з елементами з множини $A' = \{1, 2, ..., n\}$) означимо *лексикографічний порядок*: $a_1a_2 ... a_n < b_1b_2 ... b_n$, якщо для якогось k, $1 \leqslant k \leqslant n$, виконуються співвідношення $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$, але $a_k < b_k$. У такому разі говорять, що перестановка $a_1a_2 ... a_n$ менша від перестановки $b_1b_2 ... b_n$, або перестановка $b_1b_2 ... b_n$ більша від перестановки $a_1a_2 ... a_n$. Якщо замість чисел 1, 2, ..., n узяти букви a, b, ..., z із природним порядком $a < b < ... < z$, то лексикографічний порядок — це стандартна послідовність, у якій слова довжиною n наведено в словнику.

Перестановку $b_1b_2 ... b_n$ називають *лексикографічно наступною* за $a_1a_2 ... a_n$, якщо не існує такої перестановки $c_1c_2 ... c_n$, що $a_1a_2 ... a_n < c_1c_2 ... c_n$ і $c_1c_2 ... c_n < b_1b_2 ... b_n$.

Приклад 2.12. Перестановка $23\underline{4}15$ множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ менша від перестановки $23\underline{5}14$.

Алгоритм генерування перестановок множини $A' = \{1, 2, ..., n\}$ ґрунтується на процедурі, що будує перестановку, лексикографічно наступну за даною перестановкою $a_1a_2 ... a_n$. Покажемо, як це можна зробити. Спочатку припустимо, що $a_{n-1} < a_n$. Поміняємо місцями a_{n-1} й a_n і одержимо більшу перестановку. Вона лексикографічно наступна, бо ніяка інша перестановка не більша за дану перестановку й не менша за отриману.

Приклад 2.13. Нехай $2341\underline{56}$ — задана перестановка; тоді перестановка $2341\underline{65}$ лексикографічно наступна.

Тепер розглянемо випадок $a_{n-1} > a_n$. Проглянемо останні три члени перестановки. Якщо $a_{n-2} < a_{n-1}$, то останні три члени можна переставити для отримання наступної перестановки. Поставимо менше з двох чисел a_{n-1} і a_n, яке, однак, більше, ніж a_{n-2}, на позицію $n-2$. Потім розмістимо число, яке залишилося, й a_{n-2} на останніх двох позиціях у висхідному порядку.

Приклад 2.14. Нехай $234\underline{165}$ — задана перестановка; тоді перестановка $234\underline{516}$ лексикографічно наступна.

Узагальнивши ці міркування, одержимо такий алгоритм.

Алгоритм побудови лексикографічно наступної перестановки за перестановкою $a_1a_2\ldots a_n$

Наведемо кроки алгоритму.

Крок 1. Знайти такі числа a_j і a_{j+1}, що $(a_j < a_{j+1}) \wedge (a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots > a_n)$. Для цього треба знайти в перестановці першу справа пару сусідніх чисел, у якій число, що ліворуч, менше від числа, що праворуч.

Крок 2. Записати в j-ту позицію таке найменше з чисел $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$, яке водночас більше, ніж a_j.

Крок 3. Записати у висхідному порядку число a_j і решту чисел $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$ у позиції $j+1, \ldots, n$.

Обґрунтування алгоритму

Доведемо, що не існує перестановки, яка водночас більша від $a_1a_2\ldots a_n$, але менша від побудованої за цим алгоритмом. Це означає, що побудована перестановка дійсно лексикографічно наступна за даною перестановкою $a_1a_2\ldots a_n$. Справді, за наведеним алгоритмом нова перестановка збігається зі старою в позиціях $1, \ldots, j-1$. У j-й позиції нова перестановка містить a_k, а стара — a_j, причому $a_k > a_j$. Отже, нова перестановка лексикографічно більша від старої. Окрім того, вона перша в лексикографічному порядку з $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_k$ у позиціях з 1 до j. Стара перестановка остання з $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_j$ у цих самих позиціях. Згідно з алгоритмом a_k вибирають найменшим з $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$, але більшим, ніж a_j. Отже, не існує жодної перестановки між старою та новою.

Приклад 2.15. Побудуємо перестановку, наступну в лексикографічному порядку за 362541. Остання пара чисел, у якій перше число менше за друге, — 25. Отже, розглянемо послідовність чисел 541. Серед них найменше число, більше від 2, це — 4. Тепер 4 запишемо на місце 2, а решту чисел 251 розмістимо на останніх трьох позиціях у вихідному порядку: 364125.

Щоб побудувати всі $n!$ перестановок множини $A' = \{1, 2, \ldots, n\}$, починаємо з лексикографічно найменшої перестановки $123\ldots n$ і послідовно $n!-1$ разів виконуємо алгоритм побудови лексикографічно наступної перестановки.

2.9. Генерування сполучень

Як і в підрозділі 2.8, розглянемо множину $A' = \{1, 2, \ldots, n\}$. Сполучення без повторень з n елементів по r — це r-елементна підмножина множини A'. Позаяк порядок запису елементів множини неістотний, то домовимося записувати елементи в кожному сполученні у висхідному порядку: наприклад, {3, 5, 1} будемо записуватимемо як {1, 3, 5}. Отже, сполучення $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ розглядатимемо як рядок чисел $a_1a_2\ldots a_r$, причому $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$.

Як і для перестановок, покажемо, як за даним сполученням знайти наступне відповідно до лексикографічного порядку [23, 52]. Припустимо, що $n=5$ та $r=3$. Якщо можна збільшити останню цифру, то так і будемо робити. Тому, маючи рядок 123, його можна замінити на 124. Якщо ж маємо 125, останнє число збільшити не можна. Тому переходимо до наступного (справа) числа й дивимось, чи можна його збільшити. У даному разі це можна зробити: потрібно замінити 2 на 3. Проте ми прагнемо побудувати найменший рядок із тих, котрі більші 125. Тому збільшуємо останнє число (тобто 3) на 1 і записуємо результат у наступну позицію. Отже, перші два числа — 1 і 3, тому наступний рядок — 134. Припустимо, що є рядок 145. Останнє й передостаннє числа збільшити не можна. Проте перше число можна збільшити, тому замість 1 пишемо 2. Щоб зробити рядок мінімальним, як останні числа візьмемо 3 та 4, унаслідок чого отримаємо рядок 234.

Узагальнимо ці міркування. Значення останнього числа в рядку — найбільше можливе, якщо воно дорівнює $n = n - r + r$. Якщо останнє число — найбільше можливе, то передостаннє — найбільше можливе, якщо воно дорівнює $n - r + (r - 1)$ або $n - r + i$, де $i = r - 1$ — позиція цього числа. Загалом, значення кожного i-го числа найбільше можливе, якщо числа праворуч від нього — найбільші можливі, і це значення дорівнює $n - r + i$. Отже, проглядаємо рядок справа наліво й визначаємо, чи дорівнює значення i-го елемента $n - r + i$ (це максимальне значення, яке може бути в i-й позиції). Перше значення, яке не задовольняє цю умову, можна збільшити. Нехай, наприклад, це значення дорівнює m і займає j-ту позицію. Збільшуємо m на 1, а значення кожного елемента, що стоїть після j-го, дорівнює значенню попереднього елемента плюс 1. Тепер можемо сформулювати потрібний алгоритм.

Алгоритм побудови лексикографічно наступного сполучення

Наведемо кроки алгоритму.

Крок 1. Знайти в рядку перший справа елемент a_i такий, що $a_i \neq n - r + i$.

Крок 2. Для знайденого елемента виконати присвоювання $a_i := a_i + 1$.

Крок 3. Для $j = i + 1, i + 2, ..., r$ виконати $a_j := a_i + j - i$ (або, що те саме, $a_j := a_{j-1} + 1$).

Приклад 2.16. Нехай $A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Знайдемо сполучення, наступне за $\{1, 2, 5, 6\}$ у лексикографічному порядку.

Це сполучення подамо рядком 1256. Маємо $n = 6$, $r = 4$. Перший справа з таких елементів, що $a_i \neq 6 - 4 + i$, — це $a_2 = 2$. Для обчислення наступного більшого сполучення збільшуємо a_2 на 1 й одержуємо $a_2 = 3$. Тепер нехай $a_3 = 3 + 1 = 4$ і $a_4 = 3 + 2 = 5$. Отже, наступне в лексикографічному порядку сполучення — те, що зображене рядком 1345, тобто $\{1, 3, 4, 5\}$.

Обґрунтування алгоритму

Доведемо, що наведений алгоритм дійсно будує наступне в лексикографічному порядку сполучення. Рядок чисел, яким подано лексикографічно наступне сполучення, відрізняється від рядка, що зображає дане сполучення, з позиції i, бо в даному сполученні в позиціях $i + 1, i + 2, ..., r$ є максимально можливі числа. Отже, $a_i + 1$ — найменше можливе число, яке можна записати в позицію i, якщо хочемо отримати сполучення, більше від даного. Тоді $a_i + 2, ..., a_i + r - i + 1$ — найменші можливі числа, які можна записати в позиціях від $i + 1$ до r.

Коротко зупинімося на питанні генерування всіх розміщень з n елементів по r. Знову розглядатимемо цю задачу лише для множини $A' = \{1, 2, ..., n\}$. Один із можливих способів її розв'язання такий. Використаємо алгоритм генерування лексикографічно наступного сполучення для побудови r-елементних сполучень n-елементної множини A'. Після кожної стадії, коли побудовано чергове r-сполучення, застосуємо $r! - 1$ разів алгоритм побудови перестановки за умови $n = r$ для побудови всіх перестановок елементів цього сполучення як r-елементної множини.

2.10. Генерування розбиттів множини

Опишемо алгоритм генерування всіх розбиттів множини. Ідею цього алгоритму найпростіше пояснити, сформулювавши його в рекурентній формі. Зазначимо спочатку, що кожне розбиття π множини $\{1, 2, ..., n\}$ однозначно задає розбиття π_{n-1} множини $\{1, 2, ..., n-1\}$, одержане з π після вилучення елемента n із відповідного блока (і вилучення порожнього блока, якщо елемент n утворював одноелементний блок). Навпаки, якщо дано розбиття $\sigma = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ множини $\{1, 2, ..., n-1\}$, то легко знайти всі такі розбиття π_n множини $\{1, 2, ..., n-1, n\}$, що $\pi_{n-1} = \sigma$. Це такі розбиття:

$$\begin{array}{lllll} \{A_1, & A_2, & ..., & A_k, & \{n\}\} \\ \{A_1 \cup \{n\}, & A_2, & ..., & A_k\} & \\ \{A_1, & A_2 \cup \{n\}, & ..., & A_k\} & \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \{A_1, & A_2, & ..., & A_k \cup \{n\}\}. & \end{array} \quad (2.5)$$

Наведені міркування підказують простий рекурентний спосіб генерування всіх розбиттів [23]. Якщо дано список L_{n-1} усіх розбиттів множини $\{1, 2, ..., n-1\}$, то список L_n усіх розбиттів множини $\{1, 2, ..., n-1, n\}$ утворюють заміною кожного розбиття σ в списку L_{n-1} на відповідну йому послідовність (2.5).

Приклад 2.17. На рис. 2.1 показано формування списку всіх розбиттів множини $\{1, 2, 3\}$. Усього розбиттів $\Phi(3) = 5$, де $\Phi(n)$ — число Белла.

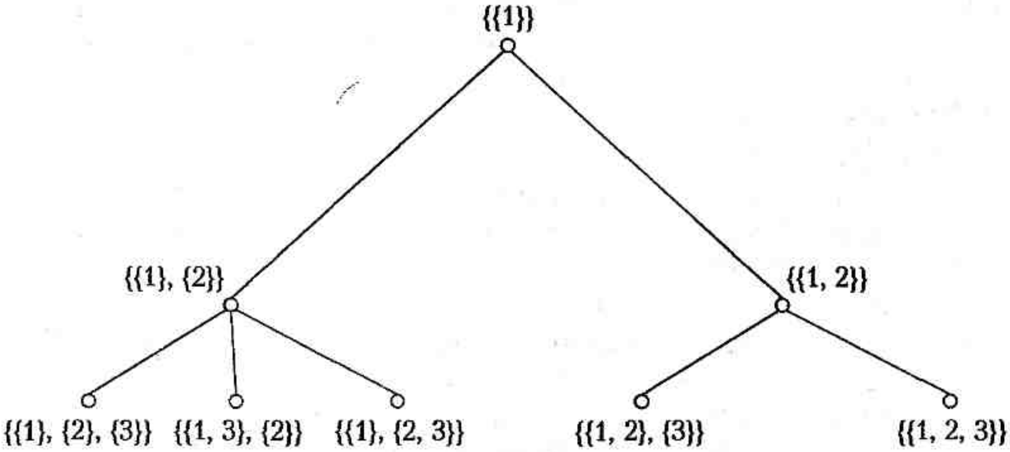

Рис. 2.1

2.11. Рекурентні рівняння

Числову послідовність (a_n) можна задати *рекурентним рівнянням* (використовують також термін *рекурентне співвідношення*). Таке рівняння описує правило для знаходження елементів послідовності через один або декілька попередніх, причому задано відповідну кількість початкових елементів.

Розв'язком рекурентного рівняння називають послідовність, яка задовольняє це рівняння. Інакше кажучи, послідовність задано рекурентною формулою, а потрібно знайти явний вираз для a_n через n.

Метод рекурентних рівнянь у комбінаториці полягає у зведенні комбінаторної задачі до аналогічної задачі для меншої кількості об'єктів.

Приклад 2.18. Розглянемо рекурентне рівняння

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},\ \ n = 2, 3, ...,\ \ a_0 = 2, a_1 = 7.$$

Його розв'язок — послідовність $a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$. Справді,

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 - 1 = 2, \\ a_1 &= 6 + 1 = 7, \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} &= 3 \cdot 2^{n-1} - (-1)^{n-1} + 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-2} - 2 \cdot (-1)^{n-2} = \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - (-1)^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1} = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-1} = \\ &= 3 \cdot 2^n - (-1)^n = a_n. \end{aligned}$$

Розглянемо дві задачі, що приводять до рекурентних рівнянь.

Числа Фібоначчі. Цю задачу дослідив у XIII ст. Леонардо Пізанський, відомий як Фібоначчі. Молоду різностатеву пару кролів завезли на острів. Після досягнення двомісячного віку кожна пара щомісяця дає приплід — нову пару. Потрібно визначити кількість пар кролів на острові через n місяців.

У кінці першого місяця кількість пар кролів на острові $f_1 = 1$. Оскільки ця пара не дає приплоду впродовж двох місяців, то й $f_2 = 1$. Щоб визначити кількість пар після n місяців, додамо їх кількість у попередньому місяці f_{n-1} і кількість новонароджених пар f_{n-2}: кожна новонароджена пара походить від пари щонайменше двомісячного віку.

Отже, послідовність f_n задовольняє рівняння $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ з початковими умовами $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Члени послідовності (f_n) називають *числами Фібоначчі*. Дослідимо зв'язок між числами Фібоначчі й такою комбінаторною задачею: знайти кількість рядків довжиною n з 0 і 1, у яких жодні дві одиниці не записано поспіль. Позначимо кількість таких рядків як g_n. Розглянемо будь-який рядок. Він може закінчуватись або на 0, або на 1. Якщо рядок закінчується на 1, то перед ним записано 0, тобто він закінчується на 01. Отже, кількість рядків довжиною n, що закінчуються на 0, дорівнює g_{n-1}, а таких, що закінчуються на 1 (тобто фактично на 01) $- g_{n-2}$. Тому $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$.

Легко перевірити, що $g_1 = 2$, $g_2 = 3$. Отже, $g_i = f_{i+1}$, тобто кількість рядків довжиною n з 0 і 1, у яких жодні дві одиниці не записано поруч, дорівнює $(n + 1)$-му числу Фібоначчі.

Задача про багатокутник. У коло вписано правильний $2n$-кутник. Скількома способами можна попарно з'єднати його вершини так, щоб отримані відрізки не перетинались?

Нехай t_n — кількість способів такого з'єднання. Позначимо точки в порядку, у якому їх розміщено на колі: $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Точку A_1 можна з'єднати лише з однією з точок $A_2, A_4, ..., A_{2n}$, а ні, то з кожного боку від хорди буде розміщено непарну кількість точок, і в разі попарного з'єднання принаймні одна хорда перетне ту, що виходить з A_1. Припустимо, що точку A_1 з'єднано з A_{2k}. По один бік від хорди A_1A_{2k} міститься $2k - 2$ точок; їх можна з'єднати попарно t_{k-1} способами. З іншого боку від A_1A_{2k} міститься $2(n - k)$ точок, їх можна з'єднати попарно t_{n-k} способами. За правилом добутку кількість таких способів попарного з'єднання, коли A_1 з'єднано з A_{2k}, дорівнює $t_{n-k}t_{k-1}$. Параметр k може набувати значень 1, 2, ..., n. Отже,

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}t_1 + ... + t_{n-k}t_{k-1} + ... + t_1t_{n-2} + t_{n-1}.$$

2.12. Розв'язування рекурентних рівнянь

Загального методу розв'язування рекурентних рівнянь немає. Проте певний клас рівнянь можна розв'язувати однаковим методом [52].

Рекурентне рівняння називають *лінійним однорідним порядку k зі сталими коефіцієнтами*, якщо воно має вигляд

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}, \tag{2.6}$$

де $c_1, c_2, ..., c_k$ — дійсні числа та $c_k \neq 0$.

Приклад 2.19. Розглянемо рекурентні рівняння:

- $a_n = 1{,}11a_{n-1}$ — лінійне однорідне першого порядку;
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ — лінійне однорідне другого порядку;
- $a_n = a_{n-5}$ — лінійне однорідне п'ятого порядку;
- $a_n = a_{n-1} + a^2_{n-1}$ — нелінійне;
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}a_{n-3}$ — нелінійне;
- $a_n = 2a_{n-1} + 1$ — лінійне неоднорідне;
- $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n2^n$ — лінійне неоднорідне;
- $a_n = na_{n-1}$ — лінійне однорідне, але не зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок рекурентного рівняння k-го порядку називають *загальним*, якщо він залежить від k довільних сталих $B_1, ..., B_k$ і будь-який його розв'язок можна одержати підбором цих сталих.

Щоб рекурентне рівняння визначало конкретну послідовність, достатньо задати k початкових умов: $a_0 = A_0$, $a_1 = A_1$, ..., $a_{k-1} = A_{k-1}$. Із цих умов і визначають сталі $B_1, ..., B_k$.

ТЕОРЕМА 2.5. Якщо послідовності $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, ..., a_n^{(p)}$ – це розв'язки рекурентного рівняння (2.6), то для довільних чисел $B_1, B_2, ..., B_p$ послідовність

$$a_n = B_1a_n^{(1)} + B_2a_n^{(2)} + ... + B_pa_n^{(p)}$$

також являє собою розв'язок цього рівняння.

Доведення. Кожну з тотожностей

$$a_n^{(i)} = c_1a_{n-1}^{(i)} + c_2a_{n-2}^{(i)} + ... + c_ka_{n-k}^{(i)}, \quad i = 1, 2, ..., p,$$

помножимо на B_i та додамо результати.

ТЕОРЕМА 2.6. Якщо число r_1 – корінь рівняння

$$r^k = c_1r^{k-1} + c_2r^{k-2} + ... + c_k, \tag{2.7}$$

то послідовність r_1^n $(n = 1, 2, ...)$ – розв'язок рекурентного рівняння (2.6).

Доведення. Нехай $a_n = r_1^n$. Підставимо a_n у рівняння (2.6) і одержимо рівність $r_1^n = c_1r_1^{n-1} + c_2r_1^{n-2} + ... + c_kr_1^{n-k}$. Вона правильна, оскільки за умовою теореми виконується рівність $r_1^k = c_1r_1^{k-1} + c_2r_1^{k-2} + ... + c_k$, і залишається помножити обидві її частини на r_1^{n-k}.

Рівняння (2.7) називають *характеристичним* для рекурентного рівняння (2.6). Це алгебраїчне рівняння степеня k. Його корені можуть бути як простими, так і кратними.

Нехай усі корені характеристичного рівняння прості. Тоді за теоремою 2.6 можна навести k різних розв'язків рекурентного рівняння (2.6): $r_1^n, r_2^n, ..., r_k^n$, де r_i $(i = 1, 2, ..., k)$ – корені характеристичного рівняння (2.7). Зазначимо, що всі r_i відмінні від нуля. Якщо б це було не так, то $c_k = 0$.

Доведемо, що коли всі корені характеристичного рівняння прості, то загальний розв'язок рекурентного рівняння має вигляд

$$a_n = B_1r_1^n + B_2r_2^n + ... + B_kr_k^n. \tag{2.8}$$

Безпосередньо з теорем 2.5 і 2.6 випливає, що послідовність (2.8) задовольняє рівняння (2.6). Отже, залишилося довести, що будь-який розв'язок рекурентного рівняння (2.6) можна подати у вигляді (2.8). Позаяк будь-який розв'язок повністю залежить від значень $a_0 = A_0$, $a_1 = A_1$, ..., $a_{k-1} = A_{k-1}$, то достатньо довести, що система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + ... + B_k = A_0, \\ B_1r_1 + B_2r_2 + ... + B_kr_k = A_1, \\ B_1r_1^2 + B_2r_2^2 + ... + B_kr_k^2 = A_2, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ B_1r_1^{k-1} + B_2r_2^{k-1} + ... + B_kr_k^{k-1} = A_{k-1} \end{cases} \tag{2.9}$$

має розв'язок за будь-яких $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$.

Визначник системи (2.9)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & r_k^{k-1} \end{vmatrix} -$$

це визначник Вандермонда; він дорівнює добутку $\prod\limits_{i>j}(r_i - r_j)$. Оскільки всі r_i різні, то визначник відмінний від 0, і система (2.9) має єдиний розв'язок за будь-яких $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$.

Розглянемо тепер випадок кратних коренів. Вираз (2.8) у цьому разі – уже не загальний розв'язок. Справді, нехай, наприклад, $r_1 = r_2$. Тоді

$$a_n = (B_1 + B_2)r_1^n + B_3r_3^n + \dots + B_kr_k^n = Br_1^n + B_3r_3^n + \dots + B_kr_k^n.$$

Залишилося $(k-1)$ довільних сталих. Їх потрібно визначити так, щоб задовольнити k початкових умов $a_0 = A_0$, $a_1 = A_1$, ..., $a_{k-1} = A_{k-1}$. Узагалі кажучи, зробити це неможливо.

Нехай характеристичне рівняння (2.7) має s різних коренів $r_1, r_2, \dots, r_s$, кратність яких дорівнює відповідно $k_1, k_2, \dots, k_s$ $(k_1 + k_2 + \dots + k_s = k)$. Щоб побудувати загальний розв'язок рекурентного рівняння (2.6) у цьому разі, потрібно доповнити кількість розв'язків, яких не вистачає через кратність коренів $r_1, r_2, \dots, r_s$. Можна довести, що окрім r_j^n розв'язки рівняння (2.6) – це також $nr_j^n, n^2r_j^n, \dots, n^{k_j-1}r_j^n$ $(j = 1, 2, \dots, s)$. Загальний розв'язок у разі кратних коренів має такий вигляд:

$$a_n = \sum_{j=1}^{s}(B_{j_1} + B_{j_2}n + \dots + B_{jk_j}n^{k_j-1})\,r_j^n.$$

Приклад 2.20. Послідовність чисел Фібоначчі задає рекурентне рівняння другого порядку $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ з початковими умовами $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Характеристичне рівняння – $r^2 = r + 1$, тобто $r^2 - r - 1 = 0$, звідки випливає, що

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Отже,

$$f_n = B_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Для визначення констант B_1 і B_2 скористаємося початковими умовами

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = 0, \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)B_1 + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)B_2 = 1. \end{cases}$$

Отримаємо $B_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $B_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Отже, $f_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Приклад 2.21. Розглянемо рекурентне рівняння четвертого порядку $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$ з початковими умовами $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 8$. Характеристичне рівняння $-r^4 - -5r^2 + 4 = 0$. Розклавши ліву частину на множники, послідовно одержимо

$$r^4 - 5r^2 + 4 = (r^2 - 1)(r^2 - 4) = (r-1)(r+1)(r-2)(r+2);$$
$$(r-1)(r+1)(r-2)(r+2) = 0;$$
$$r_1 = 1,\ r_2 = -1,\ r_3 = 2,\ r_4 = -2.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд $a_n = B_1 + B_2(-1)^n + B_3 2^n + B_4(-2)^n$.
Скориставшись початковими умовами, запишемо систему рівнянь для визначення констант:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 3, \\ B_1 - B_2 + 2B_3 - 2B_4 = 2, \\ B_1 + B_2 + 4B_3 + 4B_4 = 6, \\ B_1 - B_2 + 8B_3 - 8B_4 = 8. \end{cases}$$

Розв'язавши її, одержимо $B_1 = B_2 = B_3 = 1$, $B_4 = 0$. Отже, $a_n = 1 + (-1)^n + 2^n$.

Приклад 2.22. Нехай задано рекурентне рівняння $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 3$. Його характеристичне рівняння $-r^2 + 6r + 9 = 0$; воно має розв'язки $r_1 = r_2 = -3$. Загальний розв'язок має вигляд

$$a_n = B_1(-3)^n + B_2 n(-3)^n.$$

Для визначення констант, виходячи з початкових умов, складемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} B_1 = 3, \\ -3B_1 - 3B_2 = -3, \end{cases}$$

з якої знаходимо $B_1 = 3$, $B_2 = -2$. Отже, $a_n = 3(-3)^n + 2n(-3)^n = (3 - 2n)(-3)^n$.

Коротко розглянемо лінійні неоднорідні рекурентні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + q_n, \tag{2.10}$$

де q_n — відома послідовність.

ТЕОРЕМА 2.7. Загальний розв'язок a_n лінійного неоднорідного рівняння (2.10) дорівнює сумі його часткового розв'язку $\tilde{a}_n$ і загального розв'язку α_n відповідного лінійного однорідного рівняння.

Доведення. Нехай $\tilde{a}_n$ — будь-який частковий розв'язок неоднорідного рівняння (2.10). Тоді замінимо a_n на $\tilde{a}_n + \alpha_n$ і отримаємо

$$\tilde{a}_n + \alpha_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \left(\tilde{a}_{n-i} + \alpha_{n-i}\right) + q_n.$$

Оскільки $\tilde{a}_n$ — частковий розв'язок неоднорідного рівняння, то

$$\tilde{a}_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \tilde{a}_{n-i} + q_n.$$

Отже, α_n задовольняє однорідному рекурентному рівнянню $\alpha_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_{n-i}$.

Теорема 2.7 зводить задачу знаходження загального розв'язку неоднорідного рекурентного рівняння (2.10) до відшукання будь-якого його часткового розв'язку. У застосуваннях часто

$$q_n = (b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \ldots + b_p n^p) z^n, \tag{2.11}$$

де $b_0, b_1, \ldots, b_p, z$ — задані дійсні числа.

Опишемо метод знаходження часткового розв'язку неоднорідного рекурентного рівняння (2.10) із q_n у вигляді (2.11). Припустимо, що відомі корені $r_1, r_2, \ldots, r_s$ характеристичного рівняння (2.7), кратності яких дорівнюють відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_s$, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = k$. Можна довести, що тоді існує частковий розв'язок рівняння (2.10)

$$\tilde{a}_n = n^t (D_0 + D_1 n + D_2 n^2 + \ldots + D_p n^p) z^n,$$

де $t = 0$, якщо $z \neq r_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, і $t = k_j$, якщо $z = r_j$ для якогось j (тобто t дорівнює кратності кореня r_j, якщо $z = r_j$).

Приклад 2.23. Розв'яжемо неоднорідне рекурентне рівняння $a_n = a_{n-2} + n + 1$ із початковими умовами $a_0 = 5$, $a_1 = -1$.

Відповідне однорідне рівняння — $a_n = a_{n-2}$. Характеристичне рівняння — $r^2 - 1 = 0$, його корені — $r_1 = -1$, $r_2 = 1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\alpha_n = B_1(-1)^n + B_2 \cdot 1^n = B_1(-1)^n + B_2.$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\tilde{a}_n = n(D_0 + D_1 n)$. Підставивши його в неоднорідне рівняння, одержимо

$$D_0 n + D_1 n^2 = D_0(n-2) + D_1(n-2)^2 + n + 1,$$
$$(4D_1 - 2D_0 + 1) + (1 - 2D_1)n = 0,$$

звідки

$$\begin{cases} 1 - 2D_1 = 0, \\ 4D_1 - 2D_0 + 1 = 0. \end{cases}$$

З останньої системи отримаємо $D_1 = 1/2$, $D_0 = 3/2$. Отже, частковий розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $\tilde{a}_n = (3/2)n + (1/2)n^2$. На підставі теореми 2.7 запишемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$a_n = \tilde{a}_n + \alpha_n = \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2 + B_1(-1)^n + B_2.$$

Підставивши початкові умови, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення констант B_1 і B_2:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = 5, \\ -B_1 + B_2 = -3, \end{cases}$$

її корені — $B_1 = 4$, $B_2 = 1$. Отже, $a_n = 4(-1)^n + 1 + (3/2)n + (1/2)n^2$.

Приклад 2.24. Знайдемо загальний розв'язок рекурентного рівняння

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n \cdot 2^n.$$

Характеристичне рівняння має двократний корінь $r = 2$. Отже, частковий розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $\tilde{a}_n = n^2(D_0 + D_1 n)2^n$. Підставивши його у вихідне рівняння та зробивши скорочення на 2^n, одержимо

$$n^2(D_0 + D_1 n) = (6D_1 - 2D_0) + (1 - 6D_1)n + (D_0 + D_1 n)n^2,$$

звідки можна записати систему

$$\begin{cases} 6D_1 - 2D_0 = 0, \\ 1 - 6D_1 \quad\quad = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримаємо $D_0 = 1/2$, $D_1 = 1/6$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $a_n = (B_0 + B_1 n)2^n$, а неоднорідного —

$$a_n = (B_0 + B_1 n)2^n + n^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}n\right)2^n.$$

2.13. Принцип коробок Діріхле

Принцип коробок Діріхле широко застосовують у теорії скінченних автоматів, теорії чисел та інших розділах [6, 52].

ТЕОРЕМА 2.8 (принцип коробок Діріхле). Якщо $k + 1$ або більше предметів розкладено в k коробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить два чи більше предметів.

Доведення. Припустимо, що жодна коробка не містить більше одного предмета. Тоді загальна кількість предметів становить щонайбільше k. Це суперечить тому, що є щонайменше $k + 1$ предмет.

Приклад 2.25. У будь-якій групі з 367 чоловік принаймні двоє народилися в один день (можливо, у різні роки).

Нагадаємо, що найменше ціле число, яке більше за x або дорівнює йому, позначають $\lceil x \rceil$. Наприклад, $\lceil 3{,}14 \rceil = 4$.

ТЕОРЕМА 2.9 (узагальнений принцип коробок Діріхле). Якщо N предметів розкладено в k коробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше $\lceil N/k \rceil$ предметів.

Доведення. Зазначимо, що справджується нерівність $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$. Припустимо, що жодна коробка не містить більше ніж $\lceil N/k \rceil - 1$ предметів. Тоді загальна кількість предметів становить щонайбільше

$$k(\lceil N/k \rceil - 1) < k(((N/k) + 1) - 1) = N.$$

Це суперечить умові теореми, що загальна кількість предметів дорівнює N.

Приклад 2.26. Серед 100 чоловік принаймні $\lceil 100/12 \rceil = 9$ народилися в одному місяці.

2.14. Принцип включення-виключення

Цей принцип дає відповідь на запитання, як визначити кількість елементів у об'єднанні множин. Для двох множин правдива формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Приклад 2.27. Знайдемо кількість додатних цілих чисел, що не перевищують 1000 та діляться на 7 або на 11. Позначимо як A множину чисел, що діляться на 7, B — множину чисел, що діляться на 11. Тоді

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 142 + 90 - 12 = 220.$$

Для трьох множин формула для кількості елементів у їх об'єднанні ускладнюється:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Приклад 2.28. Одну з мов (англійську, німецьку, іспанську) вивчає 231 студент, причому $|E| = 180, |D| = 110, |S| = 70, |E \cap D| = 82, |E \cap S| = 40, |D \cap S| = 15$, де як E, D, S позначено множини студентів, які відповідно вивчають англійську, німецьку й іспанську мови. Скільки студентів вивчають усі три мови? Маємо

$$231 = 180 + 110 + 70 - 82 - 40 - 15 + |E \cap D \cap S|,$$

звідки випливає, що $|E \cap D \cap S| = 8$ студентів.

ТЕОРЕМА 2.10 (принцип включення-виключення). Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ — скінченні множини. Тоді

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.$$

Доведення. Достатньо довести, що кожний елемент в об'єднанні множин враховано в правій частині рівності точно один раз. Припустимо, що елемент a належить рівно r множинам з $A_1, A_2, ..., A_n$, де $1 \leqslant r \leqslant n$. Тоді цей елемент ураховано C_r^1 разів у $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i|$, C_r^2 разів у $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j|$; загалом його враховано C_r^m разів під час сумування членів, які містять перетин m множин A_i. Отже, елемент a враховано точно $C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - ... + (-1)^r C_r^r$ разів у виразі в правій частині рівності.

За властивістю біноміальних коефіцієнтів $C_r^0 - C_r^1 + C_r^2 - ... + (-1)^r C_r^r = 0$. Отже, $C_r^0 = C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - ... + (-1)^{r+1} C_r^r$, але $C_r^0 = 1$, і тому $C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - ... + (-1)^{r+1} C_r^r = 1$. Це й означає, що кожний елемент об'єднання множин ураховано в правій частині рівності точно один раз.

Зазначимо, що формула включення-виключення містить $2^n - 1$ доданків, по одному для кожної непорожньої підмножини з $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$.

2.15. Принцип включення-виключення в альтернативній формі

Ця форма принципу включення-виключення може бути корисною для розв'язування задач, у яких потрібно знайти кількість елементів заданої множини A, які не мають жодної з n властивостей $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Уведемо такі позначення:

- $A_i \subset A$ — підмножина елементів, що мають властивість α_i;
- $N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k})$ — кількість елементів множини A, які водночас мають властивості $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$;
- $N(\overline{\alpha}_{i_1}, \overline{\alpha}_{i_2}, ..., \overline{\alpha}_{i_k})$ — кількість елементів множини A, які не мають жодної з властивостей $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$;
- N — кількість елементів у заданій множині A.

Тоді, очевидно,

$$N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n) = N - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|.$$

За принципом включення-виключення можна записати

$$\begin{aligned} N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n) = N - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} N(\alpha_i) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} N(\alpha_i, \alpha_j) - \\ - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + ... + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Формула (2.12) подає принцип включення-виключення *в альтернативній формі.*

Приклад 2.29. Знайдемо кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ у невід'ємних цілих числах у разі обмежень $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 4$, $x_3 \leqslant 6$.

Розглянемо альтернативні властивості: α_1: $x_1 \geqslant 4$; α_2: $x_2 \geqslant 5$; α_3: $x_3 \geqslant 7$. За формулою (2.12) кількість розв'язків, що водночас задовольняють нерівності $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 4$ та $x_3 \leqslant 6$, дорівнює

$$\begin{aligned} N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n) = N - N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + N(\alpha_3) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \\ + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \end{aligned}$$

Далі маємо:

$N = H_3^{11} = C_{13}^{11} = 78$ (загальна кількість розв'язків);

$N(\alpha_1) = H_3^7 = C_9^7 = 36$ (кількість розв'язків, що задовольняють умову $x_2 \geqslant 4$);

$N(\alpha_2) = H_3^6 = C_8^6 = 28$ $(x_2 \geqslant 5)$;

$N(\alpha_3) = H_3^4 = C_6^4 = 15$ $(x_3 \geqslant 7)$;

$N(\alpha_1, \alpha_2) = H_3^2 = C_4^2 = 6$ $(x_1 \geqslant 4) \wedge (x_2 \geqslant 5)$;

$N(\alpha_1, \alpha_3) = H_3^0 = 1$ $(x_1 \geqslant 4) \wedge (x_3 \geqslant 7)$;

$N(\alpha_2, \alpha_3) = 0$ $(x_2 \geqslant 5) \wedge (x_3 \geqslant 7)$;

$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ $(x_1 \geqslant 4) \wedge (x_2 \geqslant 5) \wedge (x_3 \geqslant 7)$.

Отже, кількість розв'язків із зазначеними обмеженнями дорівнює

$$N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n) = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6.$$

Розглянемо частковий випадок формули (2.12). Припустимо, що величини $N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k})$ не залежать від самих властивостей $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$, а залежать лише від їх кількості. Уважатимемо за означенням $N^{(k)} = N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k})$ для будь-якого набору k властивостей. Тоді формула (2.12) набуває вигляду

$$N^{(0)} = N - C_n^1 N^{(1)} + C_n^2 N^{(2)} - ... + (-1)^n N^{(n)}. \tag{2.13}$$

Приклад 2.30 (*задача про зміщення*). *Знайдемо кількість перестановок з n елементів, у яких жодний елемент не залишається в початковому положенні.*

Кількість таких перестановок позначають як D_n. Кількість розміщень, у яких не зміщений один елемент, дорівнює $n(n-1)! = C_n^1 P_{n-1}$. Аналогічно, кількість розміщень, у яких не зміщені k елементів, дорівнює $C_n^k P_{n-k}$. Отже, за формулою (2.13) можна записати:

$$D_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - ... + (-1)^n C_n^n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

2.16. Твірні функції

Метод твірних функцій – один із найуніверсальніших методів комбінаторики. Строге його обґрунтування спирається на поняття й результати математичного аналізу. Наведемо спочатку потрібні для нас відомості.

2.16.1. Степеневі ряди та їхні властивості

Степеневим називають ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...,$$

де $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – дійсні числа. Суму ряду позначатимемо як $f(x)$. Степеневі ряди мають такі важливі властивості.

1. *Область збіжності* ряду – множина $\{x \mid |x| < r\}$, до якої іноді можуть долучатися точки $x = r$ та $x = -r$ або одна з цих точок. Число r називають *радіусом збіжності* ряду.
2. Нехай $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ та $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ – степеневі ряди; r_1, r_2 – радіуси їх збіжності, а $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$. Тоді для $|x| < r_0$ ці ряди можна почленно додавати й множити:

$$\left.\begin{aligned} f(x) + \varphi(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i)\, x^i; \\ f(x)\varphi(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + ... + a_i b_0)\, x^i. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

3. Якщо два степеневі ряди збігаються в області $\{x \mid |x| < r\}$ і мають однакову суму для всіх x із цієї області, то коефіцієнти при відповідних степенях x цих рядів однакові.

4. Сума ряду $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ в області $\{x \mid |x| < r\}$, де r — радіус збіжності, має похідні всіх порядків, причому

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, a_n x^{n-k};$$

зокрема,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ця властивість дає змогу визначати окремі члени ряду, якщо є аналітичний вираз для його суми $f(x)$. Властивості 1–4 доводять у курсі математичного аналізу.

Ньютон узагальнив формулу $(1+x)^n$ для ненатуральних показників. Якщо $|x| < 1$, то для будь-якого дійсного значення v справджується рівність

$$(1+x)^v = 1 + vx + \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{v(v-1)\ldots(v-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot r} x^r + \ldots. \tag{2.15}$$

Рівність (2.15) називають *біноміальним рядом Ньютона*. Нам потрібні два випадки формули (2.15) — для $v = -n$ (де n — натуральне) та $v = 1/2$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{-n} &= 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots \\ &\ldots + \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot r} x^r + \ldots = \\ &= 1 - nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + (-1)^r \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot r} x^r + \ldots = \\ &= 1 - \frac{n!}{1!(n-1)!} x + \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} x^2 + \ldots + (-1)^r \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} x^r + \ldots = \\ &= 1 - C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + (-1)^r C_{n+r-1}^r x^r + \ldots;\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot r} x^r + \ldots = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 2^3} C_2^1 x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{r-1}}{r \cdot 2^{2r-1}} C_{2r-2}^{r-1} x^r + \ldots.\end{aligned} \tag{2.17}$$

2.16.2. Поняття твірної функції

Нехай задано послідовність чисел $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Утворимо степеневий ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...$. Якщо він збігається в якійсь області до функції $f(x)$, то її називають *твірною* для послідовності чисел $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Якщо послідовність $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ скінченна, то твірна функція для цієї послідовності — поліном $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$.

2.16.3. Твірні функції для сполучень

Розглянемо множину об'єктів $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$. Поставимо їй у відповідність послідовність (s_i) $(i = 1, 2, ..., n)$ так, що елемент s_i цієї послідовності відповідає об'єкту S_i. Розглянемо добуток

$$(1 + s_1x)(1 + s_2x)...(1 + s_nx). \tag{2.18}$$

Формально перемножимо дужки, тобто дістанемо розклад

$$\begin{aligned} &1 + (s_1 + s_2 + ... + s_n)x + (s_1s_2 + s_1s_3 + ... + s_{n-1}s_n)x^2 + \\ &+(s_1s_2s_3 + s_1s_2s_4 + ... + s_{n-2}s_{n-1}s_n)x^3 + ... + s_1s_2...s_n\, x^n. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Уведемо такі позначення:

$$\begin{aligned} E_0 &= 1, \\ E_1 &= s_1 + s_2 + ... + s_n, \\ E_2 &= s_1s_2 + s_1s_3 + ... + s_{n-1}s_n, \\ E_3 &= s_1s_2s_3 + s_1s_2s_4 + ... + s_{n-2}s_{n-1}s_n, \\ &... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ E_n &= s_1s_2\ ...\ s_n. \end{aligned}$$

Доданки в E_r відповідають усім сполученням без повторень з n об'єктів по r. Отже, кількість доданків у кожному коефіцієнті E_r дорівнює кількості сполучень без повторень з n елементів по r.

Узявши у виразі (2.18) $s_1 = s_2 = ... = s_n = 1$, одержимо $(1 + x)^n$, а коефіцієнти розкладу (2.19) дорівнюють кількості сполучень без повторень з n об'єктів по r:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^rx^r + ... + C_n^nx^n.$$

Отже, $(1 + x)^n$ — твірна функція для послідовності $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$ [19]. Використовуючи твірну функцію $(1 + x)^n$, можна довести різні властивості чисел C_n^r.

- *Рівність Паскаля*: $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$. Помноживши обидві частини рівності

  $$(1 + x)^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1x + ... + C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}$$

  на $(1 + x)$, отримаємо

  $$(1 + x)^n = (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1x + ... + C_{n-1}^{r-1}x^{n-1})(1 + x).$$

  Порівняємо коефіцієнти при x^r у лівій і правій частинах і одержимо потрібну тотожність.

- *Рівність Вандермонда:* $C_{m+n}^{r} = \sum_{k=0}^{r} C_m^{r-k} C_n^k$, де $r \leqslant \min\{m, n\}$. Запишемо $(1+x)^{n+r}$ у вигляді

$$(1+x)^{n+m} = (C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n)(C_m^0 + C_m^1 x + \ldots + C_m^m x^m).$$

Обчислимо коефіцієнти при x^r у правій частині за формулою (2.14) і порівняємо з коефіцієнтом при x^r у лівій частині. Одержимо рівність Вандермонда.

Розглянемо тепер, як можна побудувати твірну функцію для сполучень із повтореннями. У попередніх міркуваннях кожний об'єкт S_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) міг з'явитись у будь-якому сполученні не більше одного разу, оскільки множники в добутку (2.18) складаються лише з двох доданків. Твірну функцію для сполучень із повтореннями, у яких об'єкти S_k можуть міститися 0, 1, 2, 3, ... разів, можна одержати аналогічно до попереднього. Потрібно лише замінити множники $(1 + s_k x)$ у виразі (2.18) множниками $(1 + s_k x + s_k^2 x^2 + s_k^3 x^3 + \ldots)$.

Звідси випливає, що твірна функція для сполучень із повтореннями –

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}.$$

Використовуючи розклад (2.16), отримаємо

$$(1-x)^{-n} = 1 + C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+r-1}^r x^r + \ldots.$$

Отже, ми іншим способом одержали кількість $H_n^r = C_{n+r-1}^r$ сполучень із повтореннями з n елементів по r. Аналогічно можна вивчати сполучення, на які накладено інші, загальніші умови.

Визначимо кількість сполучень із повтореннями з n об'єктів по r, у яких кожний об'єкт зустрічається не менше одного разу. Аналогічно до попереднього дістанемо твірну функцію для таких сполучень:

$$(x + x^2 + x^3 + \ldots)^n = x^n (1-x)^{-n} = x^n \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r x^r =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r x^{n+r} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^{n+r-n} x^{n+r} = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{r-n} x^r.$$

Тут використано формулу (2.16). Отже, кількість сполучень із повтореннями з n об'єктів по r, у яких кожний об'єкт зустрічається не менше одного разу, дорівнює C_{r-1}^{r-n}, де $r = n, n+1, \ldots$.

Приклад 2.31. Нехай є два об'єкти A та B. Кількість чотириелементних сполучень із цих об'єктів, у яких кожний із них зустрічається не менше одного разу, дорівнює $C_{r-1}^{r-n} = C_{4-1}^{4-2} = C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$. Випишемо ці сполучення:

$$[A, A, A, B],\ [A, A, B, B],\ [A, B, B, B].$$

Узагальнимо попередню задачу: обчислимо кількість сполучень з n об'єктів по r із повтореннями, у яких кожний об'єкт зустрічається не менше k разів. Із цією метою розглянемо таку твірну функцію:

$$(x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \dots)^n = x^{kn}(1-x)^{-n} = x^{kn}\sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^{r}\, x^r = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^{r} x^{kn+r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} C_{(k-1)n+n+r-1-(k-1)n}^{kn+r-kn}\, x^{kn+r} = \sum_{r=kn}^{\infty} C_{r-1-(k-1)n}^{r-kn}\, x^r.$$

Кількість сполучень із зазначеною властивістю дорівнює коефіцієнту при x^r, тобто

$$C_{r-1-(k-1)n}^{r-kn}, \quad 0 \leqslant k \leqslant r, \quad r = kn, kn+1, \dots.$$

Приклад 2.32. Нехай є три об'єкти A, B, C. Кількість сполучень із повтореннями із цих об'єктів по 8, у яких кожний із них зустрічається не менше двох разів, дорівнює $C_{r-1-(k-1)n}^{r-kn} = C_{8-1-3}^{8-6} = C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6.$

Випишемо ці сполучення:

$$[A, A, A, A, B, B, C, C], [A, A, B, B, B, B, C, C], [A, A, B, B, C, C, C, C],$$

$$[A, A, A, B, B, C, C, C], [A, A, B, B, B, C, C, C], [A, A, A, B, B, B, C, C].$$

Кількість сполучень із певними обмеженнями надалі позначатимемо як $\tilde{C}(n, r)$. Визначимо кількість сполучень із повтореннями з n об'єктів по r, у яких кожний об'єкт зустрічається парну кількість разів. Для цього розглянемо твірну функцію

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^n = (1 - x^2)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^{r} x^{2r}.$$

Отже, $\tilde{C}(n, 2r) = C_{n+r-1}^{r}$; $\tilde{C}(n, 2r+1) = 0$.

Якщо кожний об'єкт зустрічається в сполученні кількість разів, кратну k, потрібно використовувати таку твірну функцію:

$$(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots)^n = (1 - x^k)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^{r} x^{kr}.$$

Отже, $\tilde{C}(n, kr) = C_{n+r-1}^{r}$; $\tilde{C}(n, q) = 0$, якщо $q \neq kr$.

Розглянемо тепер умови загальнішого вигляду. Припустимо, що об'єкт S_1 зустрічається не менше k_1 разів, S_2 — не менше k_2 разів, ..., S_n — не менше k_n разів. Тоді, за аналогією із попереднім, з кожним об'єктом S_i пов'яжемо множник

$$(s_i^{k_i} x^{k_i} + s_i^{k_i+1} x^{k_i+1} + \dots).$$

Тут коефіцієнт s_i відповідає об'єкту S_i. Для знаходження всіх сполучень із зазначеними обмеженнями розглянемо добуток

$$\prod_{i=1}^{n} (s_i^{k_i} x^{k_i} + s_i^{k_i+1} x^{k_i+1} + \dots).$$

Щоб отримати твірну функцію для кількості сполучень із зазначеними обмеженнями, тепер достатньо в останньому виразі взяти $s_1 = s_2 = ... = s_n = 1$, що дасть

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x^{k_i} + x^{k_i+1} + ...).$$

Припустимо тепер, що об'єкт S_1 зустрічається не більше k_1 разів, S_2 – не більше k_2 разів, ..., S_n – не більше k_n разів. Тоді для знаходження всіх сполучень достатньо обчислити коефіцієнти розкладу

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + s_i x + s_i^2 x^2 + ... + s_i^{k_i} x^{k_i}).$$

Щоб записати твірну функцію для сполучень із зазначеними обмеженнями, залишилось, як завжди, узяти $s_1 = s_2 = ... = s_n = 1$. Отже, твірна функція для сполучень із повтореннями, у яких об'єкт S_1 зустрічається не більше k_1 разів, S_2 – не більше k_2 разів, ..., S_n – не більше k_n разів, має вигляд

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 + x + x^2 + ... + x^{k_i}).$$

Нехай тепер кількість появ об'єкта S_1 – одне з чисел $\alpha_1, \beta_1, ..., \lambda_1$, де $\alpha_1 < \beta_1 < ... < \lambda_1$; S_2 – $\alpha_2, \beta_2, ..., \lambda_2$, де $\alpha_2 < \beta_2 < ... < \lambda_2$; ...; S_n – одне з чисел $\alpha_n, \beta_n, ..., \lambda_n$, де $\alpha_n < \beta_n < ...$ $... < \lambda_n$. Тоді всі сполучення із зазначеними обмеженнями дають коефіцієнти розкладу

$$\prod_{i=1}^{n} (s_i^{\alpha_i} x^{\alpha_i} + s_i^{\beta_i} x^{\beta_i} + ... + s_i^{\lambda_i} x^{\lambda_i}),$$

а для запису твірної функції візьмемо $s_1 = s_2 = ... = s_n = 1$, що дасть

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x^{\alpha_i} + x^{\beta_i} + ... + x^{\lambda_i}).$$

Отже, для будь-якої „розумної" комбінації умов стосовно наявності об'єктів у сполученнях із повтореннями можна записати відповідний добуток і після цього, узявши $s_1 = s_2 = ... = s_n = 1$, одержати твірну функцію.

Приклад 2.33. Записати сполучення з повтореннями з трьох об'єктів S_1, S_2, S_3 по r за умови, що S_1 зустрічається не більше одного разу, S_2 – не більше двох, а S_3 – один або два рази. Записати твірну функцію для таких сполучень.

Запишемо добуток

$$(1 + s_1 x)(1 + s_2 x + s_2^2 x^2)(s_3 x + s_3^2 x^2) =$$
$$= s_3 x + (s_1 s_3 + s_2 s_3 + s_3 s_3) x^2 + (s_1 s_2 s_3 + s_2 s_2 s_3 + s_1 s_3 s_3 + s_2 s_3 s_3) x^3 +$$
$$+ (s_1 s_2 s_3 s_3 + s_2 s_2 s_3 s_3 + s_1 s_2 s_2 s_3) x^4 + (s_1 s_2 s_2 s_3 s_3) x^5.$$

Для можливих значень r маємо:

$r = 1: \quad [S_3];$
$r = 2: \quad [S_1, S_3], [S_2, S_3], [S_3, S_3];$
$r = 3: \quad [S_1, S_2, S_3], [S_2, S_2, S_3], [S_1, S_3, S_3], [S_2, S_3, S_3];$
$r = 4: \quad [S_1, S_2, S_3, S_3], [S_2, S_2, S_3, S_3], [S_1, S_2, S_2, S_3];$
$r = 5: \quad [S_1, S_2, S_2, S_3, S_3].$

Твірна функція —

$$f(x) = (1+x)(1+x+x^2)(x+x^2) = x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + x^5.$$

Отже, позначивши як $\tilde{C}(n, r)$ кількість сполучень із зазначеними обмеженнями, отримаємо $\tilde{C}(3, 1) = 1$, $\tilde{C}(3, 2) = 3$, $\tilde{C}(3, 3) = 4$, $\tilde{C}(3, 4) = 3$, $\tilde{C}(3, 5) = 1$.

Приклад 2.34. Розглянемо твірну функцію з прикладу 2.33:

$$f(x) = x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + x^5.$$

Коефіцієнт при x^r дорівнює кількості способів вибору r об'єктів із трьох, причому перший зустрічається не більше одного разу, другий — не більше двох, а третій — один або два рази, $1 \leqslant r \leqslant 5$. Цей коефіцієнт дорівнює кількості цілочислових розв'язків рівняння

$$e_1 + e_2 + e_3 = r$$

за умов $0 \leqslant e_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant e_2 \leqslant 2$, $1 \leqslant e_3 \leqslant 2$.

Приклад 2.35. Розглянемо дві задачі. В урні чотири червоні, п'ять синіх і дві зелені кулі.

1. Скількома способами можна витягнути сім куль з урни?
2. Скількома способами можна витягнути з урни сім куль, якщо принаймні одна куля червона та принаймні дві сині?

Для задачі 1 твірна функція має вигляд

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2),$$

і кількість способів вибору з урни семи куль дорівнює коефіцієнту при x^7 у її розкладі. Для задачі 2 потрібно врахувати, що принаймні одна вийнята куля червона. Відповідний поліном має вигляд $(x + x^2 + x^3 + x^4)$, що відповідає витяганню однієї, двох, трьох або чотирьох червоних куль. Аналогічно, оскільки принаймні дві витягнуті кулі сині, то відповідний поліном має вигляд $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$, що відповідає витяганню двох, трьох, чотирьох або п'яти синіх куль. Отже, твірний поліном має вигляд

$$(x+x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2),$$

і кількість способів витягти сім куль дорівнює коефіцієнту при x^7 у розкладі цієї твірної функції.

2.16.4. Твірні функції для розміщень

Розглянемо спочатку розміщення без повторень з n об'єктів по r. Маємо

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^n x^n = \\ &= 1 + A_n^1 \frac{x}{1!} + A_n^2 \frac{x^2}{2!} + A_n^3 \frac{x^3}{3!} + \ldots + A_n^n \frac{x^n}{n!}.\end{aligned} \qquad (2.20)$$

Отже, у розкладі $(1+x)^n$ число A_n^r – коефіцієнт при $x^r/r!$. Це показує способи узагальнення формули (2.20). Якщо елемент S_i може з'явитись у розміщенні 0, 1, 2, ..., k_i разів, то множник $(1+x)$ у лівій частині (2.20) потрібно замінити множником [19]

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{k_i}}{k_i!}.$$

Приклад 2.36. Для кількості розміщень із повтореннями з n об'єктів по r одержимо

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)^n=(e^x)^n=e^{nx}=1+nx+\frac{n^2x^2}{2!}+\ldots=\sum_{r=0}^{\infty}n^r\frac{x^r}{r!}.$$

Отже, кількість розміщень із повтореннями з n по r дорівнює n^r.

Уведені твірні функції називають експоненціальними: для послідовності чисел $a_0, a_1, \ldots, a_r, \ldots$ *експоненціальною твірною функцією* називають суму ряду

$$a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+a_r\frac{x^r}{r!}+\ldots$$

за умови, що цей ряд збігається.

У прикладі 2.36 використано розклад

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^r}{r!}+\ldots,$$

який справджується для всіх x.

Щоб показати можливості експоненціальних твірних функцій, обчислимо кількість таких перестановок із повтореннями, що елемент S_1 зустрічається n_1 разів, елемент S_2 – n_2 разів, ..., елемент S_k – n_k разів, причому $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. На підставі наведених вище міркувань запишемо твірну функцію

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)\ldots\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right).$$

Коефіцієнт при $x^{n_1+n_2+\ldots+n_k}=x^n$ дорівнює $\dfrac{1}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$, а коефіцієнт при $\dfrac{x^n}{n!}$ – $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$. Отже, ми іншим способом отримали відомий результат – формулу для перестановок із повтореннями.

Визначимо тепер кількість розміщень із повтореннями з n елементів по r таких, що кожний елемент зустрічається не менше одного разу. Твірна функція має вигляд

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^n=(e^x-1)^n=$$
$$=e^{nx}-n\,e^{(n-1)x}+\frac{n(n-1)}{2}e^{(n-2)x}+\ldots+(-1)^n. \qquad (2.21)$$

Приклад 2.37. Скористаємося формулою (2.21) і обчислимо кількість розміщень із повтореннями з трьох елементів по r, у яких кожний елемент зустрічається не менше одного разу:

$$(e^x-1)^3 = e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1=\left(1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^4}{4!}+\ldots\right)-$$

$$-3\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\ldots\right)+3\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)-1=$$

$$=(3^3-3\cdot 2^3+3)\frac{x^3}{3!}+(3^4-3\cdot 2^4+3)\frac{x^4}{4!}+(3^5-3\cdot 2^5+3)\frac{x^5}{5!}+\ldots+(3^r-3\cdot 2^r+3)\frac{x^r}{r!}+\ldots.$$

Отже, кількість розміщень із повтореннями із трьох елементів по r, у яких кожний елемент зустрічається не менше одного разу, дорівнює $3^r-3\cdot 2^r+3$, де $r=3, 4, 5, 6, \ldots$

Приклад 2.38. Знайдемо кількість розміщень з n елементів по r, у яких кожний елемент зустрічається не більше двох разів. Очевидно, що твірна функція тут —

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)^n.$$

У разі $n=3$ маємо

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)^3=1+3x+\frac{9}{2}x^2+4x^3+\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{4}x^5+\frac{1}{8}x^6=$$

$$=1+3\frac{x}{1!}+\frac{9}{2}\cdot 2!\frac{x^2}{2!}+4\cdot 3!\frac{x^3}{3!}+\frac{9}{4}\cdot 4!\frac{x^4}{4!}+\frac{3}{4}\cdot 5!\frac{x^5}{5!}+\frac{1}{8}\cdot 6!\frac{x^6}{6!}.$$

У таблиці 2.3 для можливих значень r наведено кількості розміщень із повтореннями з трьох елементів по r, у яких кожний елемент зустрічається не більше двох разів.

Таблиця 2.3

Значення r	Кількість розміщень із зазначеними обмеженнями
1	3
2	$(9/2)\cdot 2!=9$
3	$4\cdot 3!=24$
4	$(9/4)\cdot 4!=54$
5	$(3/4)\cdot 5!=90$
6	$(1/8)\cdot 6!=90$

Узагальнюючи розглянуті приклади, можна дійти такого висновку. Нехай розміщення з повтореннями з n об'єктів $S_1, S_2, \ldots, S_n$ по r такі, що об'єкт S_1 зустрічається $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ разів, де $\alpha_1<\beta_1<\ldots<\lambda_1$; об'єкт S_2 — $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$ разів, де $\alpha_2<\beta_2<\ldots<\lambda_2$; ...; S_n — $\alpha_n, \beta_n, \ldots, \lambda_n$ разів, де $\alpha_n<\beta_n<\ldots<\lambda_n$. Тоді твірна функція для таких розміщень має вигляд

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x^{\alpha_i}}{\alpha_i!}+\frac{x^{\beta_i}}{\beta_i!}+\ldots+\frac{x^{\lambda_i}}{\lambda_i!}\right). \tag{2.22}$$

Кількість розміщень, що задовольняють зазначеним обмеженням, дорівнює коефіцієнту при $x^r/r!$ у розкладі добутку (2.22).

2.16.5. Застосування твірних функцій до розв'язування рекурентних рівнянь

Нагадаємо, що

$$1 + ax + a^2x^2 + \ldots = \frac{1}{1-ax}, \qquad (2.23)$$

якщо $|ax| < 1$.

На прикладах, поданих нижче, показано техніку застосування апарату твірних функцій до розв'язування рекурентних рівнянь [52].

Приклад 2.39. Розв'яжемо рекурентне рівняння $a_k = 3a_{k-1}$, $a_0 = 2$.

Нехай $G(x)$ — твірна функція для послідовності (a_k):

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Помножимо обидві частини рівності на x:

$$xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k.$$

Використавши рекурентне рівняння, одержимо

$$G(x) - 3xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - 3a_{k-1}) x^k = 2,$$

бо $a_0 = 2$ та $a_k = 3a_{k-1}$.

Отже, $G(x) - 3xG(x) = 2$, звідки випливає, що $G(x) = 2/(1-3x)$. Використавши рівність (2.23), можемо записати

$$G(x) = \frac{2}{1-3x} = 2(1 + 3x + 3^2x^2 + \ldots + 3^k x^k + \ldots) =$$

$$= 2 + 2\cdot 3x + 2\cdot 3^2 x^2 + \ldots + 2\cdot 3^k x^k + \ldots.$$

Тому $a_k = 2 \cdot 3^k$.

Приклад 2.40. Розв'яжемо неоднорідне рекурентне рівняння $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$, $a_0 = 1$.

Запишемо твірну функцію для послідовності (a_n):

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (8a_{n-1}x^n + 10^{n-1}x^n) =$$

$$= 1 + 8x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1}x^{n-1} = 1 + 8x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n =$$

$$= 1 + 8xG(x) + \frac{x}{1-10x}.$$

В останній рівності використано розклад (2.23). Отже,

$$G(x) = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}. \tag{2.24}$$

Праву частину рівності (2.24) розкладемо на прості дроби:

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{1-10x}\right).$$

Знову використаємо розклад (2.23):

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(8^n + 10^n\right) x^n.$$

Отже,

$$a_n = \frac{1}{2}(8^n + 10^n).$$

Для розв'язання наступного прикладу потрібно розглянути композицію двох послідовностей (a_n) і (b_n). *Композицією* двох послідовностей (a_n) і (b_n) називають послідовність (c_n), загальний член якої має вигляд $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$.

ТЕОРЕМА 2.11. Твірна функція композиції двох послідовностей дорівнює добутку їх твірних функцій.

Доведення випливає з властивості 2 степеневих рядів (2.14).

Приклад 2.41. Розв'язати нелінійне рекурентне рівняння з п. 2.11 (задачу про багатокутник). Візьмемо $t_0 = 1$; тоді зазначене рекурентне рівняння набере вигляду

$$t_n = t_{n-1}t_0 + t_{n-2}t_1 + \ldots + t_0 t_{n-1}, \tag{2.25}$$

де $n \geqslant 1$. Запишемо твірну функцію для послідовності (t_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n.$$

Помножимо обидві частини співвідношення (2.25) на x^n і просумуємо за n від 1 до ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n-1}t_0 + t_{n-2}t_1 + \ldots + t_0 t_{n-1})\, x^{n-1},$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n x^n - 1 = x \sum_{n=0}^{\infty} (t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \ldots + t_n t_0)\, x^n.$$

Згідно з теоремою 2.11 $G(x) - 1 = xG^2(x)$. Розв'яжемо квадратне рівняння щодо $G(x)$: $G(x) = (1 \pm \sqrt{1-4x})/(2x)$. Оскільки $G(0) = 1$, то потрібно взяти знак мінус (щоб знайти значення $G(x)$ у точці $x = 0$, потрібно у виразі для $G(x)$ перейти до границі для $x \to 0$). Отже, твірна функція послідовності (t_n) це $G(x) = (1 - \sqrt{1-4x})/(2x)$. За формулою (2.17) можемо записати:

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2x - \frac{2}{2}C_2^1 x^2 - \frac{2}{3}C_4^2 x^3 - \ldots - \frac{2}{n+1}C_{2n}^n x^{n+1} - \ldots .$$

Отже,

$$G(x) = 1 + \frac{1}{2}C_2^1 x + \frac{1}{3}C_4^2 x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_{2n}^n x^n + \ldots .$$

Звідси випливає, що

$$t_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n .$$

Контрольні запитання та завдання

1. Нехай $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Навести всі розміщення та сполучення без повторень з елементів множини M по 3 елементи.
2. Обчислити кількість перестановок множини $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, які закінчуються буквою a.
3. Обчислити значення:

   а) A_5^3; б) A_6^5; в) A_8^1; г) A_8^5; д) A_8^8; е) A_{10}^9.
4. Обчислити значення:

   а) C_5^1; б) C_5^3; в) C_8^4; г) C_8^8; д) C_8^0; е) C_{12}^6.
5. Скількома способами можна визначити призові місця (перше, друге, третє) у забігу 12 коней?
6. У групі n чоловіків і n жінок. Скількома способами їх можна вишикувати в шеренгу так, щоб чергувалися чоловік і жінка?
7. Міста A та B з'єднано трьома різними дорогами. Скількома способами можна виконати коловий рейс від A до B та від B до A, якщо, їдучи від B до A. обов'язково треба вибирати нову дорогу?
8. Дано множину $M = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$. Скільки існує розміщень без повторень з елементів множини M по чотири елементи, які містять:

   а) число 47;

   б) водночас числа 17 і 47;

   в) водночас числа 17, 47 і 73;

   г) водночас числа 17, 47, 73 і 97;

   д) три послідовні цілі числа у висхідному порядку?
9. Скількома способами можна розсадити шістьох осіб за круглим столом?
10. Скількома способами можна розсадити за круглим столом п'ятьох чоловіків і п'ятьох жінок, щоб двоє чоловіків не сиділи поруч?
11. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5, не повторюючи їх, склали всі можливі п'ятицифрові числа. Скільки серед них таких чисел:

    а) які починаються цифрою 3;

    б) не починаються цифрою 5;

    в) починаються з 54?

12. Дано натуральні числа від 1 до 31. Скількома способами можна вибрати з них три числа так, щоб їх сума була парним числом?
13. Скількома способами можна поставити на полицю 10 книжок:
   а) якщо серед них є один тритомник, усі томи якого мають стояти поруч у довільному порядку;
   б) усі томи тритомника мають стояти поруч за зростанням номерів томів?
14. Скільки учасників у шаховому турнірі, якщо відомо, що кожний учасник зіграв із кожним із решти, а всього відбулося 210 партій?
15. Скількома способами з колоди 52 карт можна вийняти 10 карт, щоб серед них були такі:
   а) точно один туз;
   б) принаймні один туз;
   в) не менше двох тузів?
16. Скількома способами з 28 кісток доміно можна утворити пари кісток, які можна докласти одна до другої за правилами доміно?
17. Скількома способами можна вибрати пару однакових карт із колоди 36 карт?
18. Скількома способами можна вибрати пару з колоди 36 карт і одного джокера? (Джокер утворює пару з будь-якою картою.)
19. Скількома способами можна поселити дев'ять студентів у три кімнати гуртожитку, поселяючи їх по троє в кожній?
20. Скількома способами можна вибрати п'ять невпорядкованих елементів множини, що складається з трьох елементів, якщо повторення дозволені?
21. Скількома способами можна вибрати три невпорядкованих елементи множини, що складається з п'яти елементів, якщо повторення дозволені?
22. Скільки різних рядків із шести букв можна утворити з алфавіту, який має 26 букв, якщо повторення дозволені?
23. Знайти кількість розв'язків наведених нижче рівнянь у невід'ємних цілих числах.
   а) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$;
   б) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$;
   в) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ за умов $x_1 \geqslant 2$, $x_2 \geqslant 3$, $x_3 \geqslant 5$.
24. Знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$, де x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – такі невід'ємні цілі числа:
   а) $x_1 \geqslant 1$;
   б) $x_j \geqslant 2$ для $j = 1, 2, 3, 4, 5$;
   в) $0 \leqslant x_1 \leqslant 10$;
   г) $0 \leqslant x_1 \leqslant 3$, $1 \leqslant x_2 < 4$, $x_3 \geqslant 15$.
25. Знайти кількість розв'язків нерівності $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 15$ у невід'ємних цілих числах.

26. Знайти кількість таких додатних цілих чисел, менших за 1 000 000, що сума їх цифр дорівнює 19.
27. Знайти кількість додатних цілих чисел, менших за 1 000 000, що мають точно одну цифру 9, і сума всіх їх цифр дорівнює 13.
28. Скільки різних рядків можна утворити зі слова MISSISSIPPI, використовуючи всі букви? Скільки таких рядків починаються та закінчуються літерою S? У скількох таких рядках усі чотири букви S стоять поруч?
29. Обчислити кількість бітових рядків довжиною n. Користуючись цим результатом, довести, що кількість підмножин множини з n елементів дорівнює 2^n.
30. Множина містить 100 елементів. Знайти кількість підмножин цієї множини, що містять більше одного елемента.
31. Скільки бітових рядків можна утворити з шести одиниць і восьми нулів?
32. Скільки бітових рядків, які складаються з чотирьох одиниць і 12 нулів, можна утворити, якщо кожний рядок обов'язково має починатися з одиниці та після кожної одиниці має бути принаймні два нулі?
33. Побудувати розклад:

    а) $(x+y)^5$; б) $(x-y)^5$; в) $(x+y)^6$; г) $(x-y)^6$.
34. Визначити коефіцієнт:

    а) при x^5y^8 у розкладі $(x-y)^{13}$;

    б) при $x^{14}y^{11}$ у розкладі $(x-y)^{25}$.
35. Скільки членів у розкладі $(x+y)^{100}$?

    У задачах 38–44 члени бінома пронумеровано від 1 до $n+1$:

$$(x \pm y)^n = \sum_{j=0}^{n} T_{j+1}, \quad \text{де} \quad T_{j+1} = (\pm 1)^j C_n^j x^{n-j} y^j.$$

36. Визначити п'ятий член розкладу бінома $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$, якщо відношення коефіцієнта третього члена до коефіцієнта другого члена дорівнює 11/2.
37. У розкладі бінома $(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^n$ коефіцієнт третього члена дорівнює 28. Визначити середній член розкладу.
38. Визначити найменше значення показника n у розкладі $(1+x)^n$, за якого відношення двох сусідніх коефіцієнтів дорівнює 7/15.
39. У розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt{a^{-1}}\right)^{15}$ визначити член, який не залежить від a.
40. Скільки раціональних членів міститься в розкладі $\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{100}$?
41. У розкладі бінома $(a\sqrt[5]{a/3} - b/\sqrt[7]{a^3})^n$ визначити член, що містить a^3, якщо сума біноміальних коефіцієнтів на непарних місцях у розкладі дорівнює 2048.
42. За якого значення n коефіцієнти другого, третього та четвертого членів розкладу бінома $(x+y)^n$ утворюють арифметичну прогресію?
43. Довести тотожність Паскаля $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ на основі алгебраїчних перетворень.

44. Нехай M — скінченна множина. Довести, що підмножин множини M із парною кількістю елементів стільки, скільки й підмножин із непарною кількістю елементів.

45. Довести, що $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^k)^k + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

46. Довести біноміальну теорему алгебрично за допомогою математичної індукції.

47. Довести, що $C_n^r = P_n(r, n-r)$.

48. Записати розклад $(x+y+z)^4$.

49. Знайти коефіцієнт при $x^3y^2z^5$ у розкладі $(x+y+z)^{10}$.

50. Знайти кількість членів (доданків) у розкладі $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$.

51. Знайти лексикографічно наступну перестановку для кожної з перестановок: 1432; 54123; 12453; 45231; 6714235; 31528764.

52. Розмістити наведені перестановки елементів множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ у лексикографічному порядку: 234561, 231456, 165432, 156423, 543216, 541236, 231465, 314562, 432561, 654321, 654312, 435612.

53. За допомогою алгоритму побудови лексикографічно наступної перестановки записати перші 18 перестановок елементів множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

54. Задати взаємнооднозначну відповідність між елементами множин $M = \{a, b, c, d, e\}$ й $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Побудувати перші 18 перестановок елементів множини M у лексикографічному порядку.

55. За допомогою алгоритму побудови лексикографічно наступного сполучення виписати всі сполучення по чотири елементи множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

56. Задати взаємнооднозначну відповідність між елементами множин $M = \{x, y, z, t, u\}$ та $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. За допомогою алгоритму виписати всі сполучення по три елементи множини M.

57. Описати алгоритм побудови розміщень по r елементів множини з n елементів. За його допомогою виписати всі розміщення по два елементи множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

58. Описати алгоритм побудови всіх розміщень по r елементів множини з n елементів, якщо повторення дозволені.

59. Описати алгоритм побудови всіх сполучень по r елементів множини з n елементів, якщо повторення дозволені.

60. Описати алгоритм побудови списку всіх розбиттів множини на непорожні частини. Виписати всі можливі розбиття множини $\{a, b, c, d\}$. Скільки їх?

61. Розв'язати рекурентні наведені нижче рівняння із заданими початковими умовами:

    а) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$;

    б) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$;

    в) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$;

    г) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 45$, $a_1 = 1$;

    д) $a_n = a_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = -1$;

е) $a_n = -8a_{n-1} - 16a_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = -4$;

ж) $a_n = -7a_{n-1} - 16a_{n-2} - 12a_{n-3}$, $n \geqslant 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 9$, $a_2 = 29$.

62. Дано неоднорідне рекурентне рівняння $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$. Показати, що $a_n = -2^{n+1}$ — його розв'язок. Знайти загальний розв'язок цього рекурентного рівняння. Знайти розв'язок за початкової умови $a_0 = 1$.

63. Дано неоднорідне рекурентне рівняння $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$. Визначити такі константи s і t, що $a_n = sn + t$ — його розв'язок. Знайти загальний розв'язок цього рекурентного рівняння та розв'язок за початкової умови $a_0 = 4$.

64. Скільки потрібно запросити людей, аби щонайменше шість із них народилися під одним і тим самим знаком зодіаку?

65. Скільки має бути людей, щоб обов'язково принаймні двоє з них народилися в один і той самий день тижня та в один і той самий місяць (можливо, у різні роки)?

66. Позначимо як M множину з десяти натуральних чисел, які не перевищують 50. Довести, що є принаймні дві різні п'ятиелементні підмножини множини M такі, що суми їх елементів рівні.

67. Скільки елементів містить об'єднання п'яти множин, якщо кожна з них містить 10 000 елементів, кожна пара — 1000 спільних елементів, кожна трійка — 100, кожна четвірка — 10 спільних елементів і один елемент належить усім п'яти множинам?

68. За допомогою принципу включення-виключення в альтернативній формі визначити кількість простих чисел, що не перевищують 100.

70. Скільки розв'язків має рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, якщо x_1, x_2, x_3 — невід'ємні цілі числа, менші, ніж 6?

71. Знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$, якщо x_1, x_2, x_3, x_4 — невід'ємні цілі числа такі, що $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 4$, $x_3 \leqslant 5$, $x_4 \leqslant 8$.

72. Знайти твірні функції для сполучень із повтореннями, у яких кожний об'єкт зустрічається:

    а) не менше двох разів;

    б) не більше чотирьох разів;

    в) не менше одного й не більше п'яти разів;

    г) кількість разів, кратну трьом.

73. Записати твірні функції для розміщень з n елементів по r із повтореннями, у яких кожний елемент зустрічається:

    а) не менше двох разів;

    б) точно два рази;

    в) не більше двох разів;

    г) парну кількість разів;

    д) непарну кількість разів.

74. Методом твірних функцій розв'язати однорідні рекурентні рівняння:

а) $a_n = 7a_{n-1}$, $a_0 = 5$;

б) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0 = 6$, $a_1 = 30$.

75. Методом твірних функцій розв'язати неоднорідні рекурентні рівняння:

а) $a_n = 3a_{n-1} + 2$, $a_0 = 1$;

б) $a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1}$, $a_0 = 1$.

Комп'ютерні проекти

Скласти програми із зазначеними вхідними даними та результатами.

1. Задано натуральне число n. Навести в лексикографічному порядку всі перестановки елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.
2. Задано натуральне число n і невід'ємне ціле число r ($r \leqslant n$). Навести в лексикографічному порядку всі r-сполучення без повторень з елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.
3. Задано натуральне число n і невід'ємне ціле число r ($r \leqslant n$). Навести в лексикографічному порядку всі r-розміщення без повторень з елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.
4. Задано натуральне число n. Навести в лексикографічному порядку всі сполучення без повторень з елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.
5. Задано натуральні числа n і r. Навести в лексикографічному порядку всі r-розміщення з повтореннями з елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.
6. Задано натуральні числа n і r. Навести в лексикографічному порядку всі r-сполучення з повтореннями з елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$.
7. Задано натуральне число n. Навести всі перестановки елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$, у яких жодний елемент не залишається на місці.
8. Задано рівняння $x_1 + x_2 + ... + x_n = C$, де C — ціла невід'ємна константа. Знайти всі розв'язки цього рівняння в невід'ємних цілих числах.