Розділ 5
Відношення

- Відношення та їх властивості
- Відношення еквівалентності
- Відношення часткового порядку
- Топологічне сортування
- Операції над відношеннями
- Замикання відношень
- Бази даних і відношення

Відношення – одне з основних понять сучасної математики. Мову відношень використовують для опису зв'язків між об'єктами та поняттями. Зокрема, поняття бінарного відношення дає змогу формалізувати операції попарного порівняння, і тому його широко використовують у теорії вибору, а реляційні бази даних ґрунтуються на концепції n-арних відношень.

5.1. Відношення та їх властивості

Найпростіший спосіб задати зв'язок між елементами двох множин – записати впорядковані пари елементів, що перебувають у цьому зв'язку. Нехай A та B – множини. *Бінарне відношення з A в B* – це якась підмножина R декартового добутку $A \times B$ цих множин: $R \subset A \times B$. Інакше кажучи, бінарне відношення з A в B – це множина впорядкованих пар, у якій перший елемент пари належить множині A, а другий – множині B. Використовують запис aRb, якщо $(a, b) \in R$, і запис $a\overline{R}b$, якщо $(a, b) \notin R$.

Бінарні відношення описують зв'язки між елементами двох множин. Зв'язки між елементами більше ніж двох множин задають n-арними відношеннями (див. підрозділ 5.7). Розглядаючи в певному контексті лише бінарні відношення, уживають термін „*відношення*" замість „бінарне відношення".

Приклад 5.1. Нехай $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ та задано відношення $R = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$. Отже, $0Ra$, бо $(0, a) \in R$, але $1\overline{R}b$, оскільки $(1, b) \notin R$.

Здебільшого розглядають бінарні відношення за умови $A=B$. *Відношенням на множині* A називають бінарне відношення з A в A. Інакше кажучи, відношення R на множині A — це підмножина декартового квадрату множини A, тобто $R \subset A^2$.

Приклад 5.2. Нехай $A=\{1, 2, 3, 4\}$. Які впорядковані пари утворюють відношення $R= \{(a, b) \mid a$ ділить $b\}$? Очевидно, що $R=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

Бінарне відношення на множині A можна задати за допомогою булевої матриці чи орієнтованого графа. На n-елементній множині A відношення R задає $n \times n$ матриця $M_R=[m_{ij}]$, $i, j=1, \ldots, n$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (a_i, a_j) \in R, \\ 0, \text{ якщо } (a_i, a_j) \notin R. \end{cases}$$

Граф G_R, який задає відношення R на множині A, будують так. Вершини графа позначають елементами цієї множини, а дуга (a_i, a_j) існує тоді й лише тоді, коли $(a_i, a_j) \in R$. Такий граф G_R називають *графом, асоційованим із відношенням* R, або просто *графом відношення* R.

Приклад 5.3. На рис. 5.1 зображено матрицю та граф, які задають відношення з прикладу 5.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

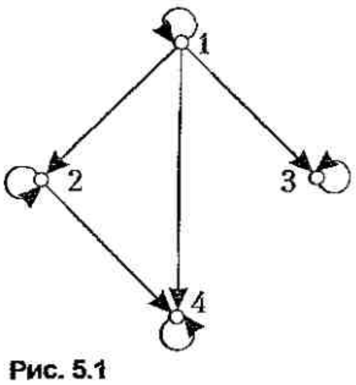


Рис. 5.1

Розглянемо властивості відношень на множині A. Відношення R на множині A називають *рефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \in R$.

Приклад 5.4. Розглянемо шість відношень на множині $A=\{1, 2, 3, 4\}$:

$$R_1=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\};$$
$$R_2=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\};$$
$$R_3=\{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\};$$
$$R_4=\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\};$$
$$R_5=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\};$$
$$R_6=\{(3, 4)\}.$$

Відношення R_3 та R_5 рефлексивні, бо вони містять усі пари вигляду (a, a), тобто $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$. Решта відношень не рефлексивні. Зокрема, відношення R_1, R_2, R_4, R_6 не містять пари $(3, 3)$.

Відношення R на множині A називають *іррефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \notin R$. Наприклад, відношення R_4, R_6 із прикладу 5.4 іррефлексивні, а R_1, R_2 – не рефлексивні й не іррефлексивні.

Відношення R на множині A називають *симетричним*, якщо для будь-яких $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$, випливає, що $(b, a) \in R$. У прикладі 5.4 лише відношення R_2 та R_3 симетричні.

Відношення R на множині A називають *антисиметричним*, якщо для всіх $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$, випливає, що $a = b$. Інакше кажучи, відношення антисиметриче, якщо в разі $a \neq b$ воно водночас не містить пар (a, b) та (b, a). У прикладі 5.4 антисиметричні лише відношення $R_4 - R_6$. У кожному з них немає таких пар елементів a та b $(a \neq b)$, що водночас $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$. Властивості симетричності й антисиметричності не антагоністичні: існують відношення, які мають обидві ці властивості. Наприклад, відношення $R = \varnothing$ на множині $A = \{a\}$ водночас і симетричне, й антисиметричне. Є також відношення, які не мають жодної з цих двох властивостей, наприклад R_1 із прикладу 5.4.

Відношення R на множині A називають *асиметричним*, якщо для всіх $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$, випливає, що $(b, a) \notin R$. Зрозуміло, що будь-яке асиметричне відношення має бути й антисиметричним. Обернене твердження неправильне. Відношення R_5 із прикладу 5.4 антисиметричне, проте не асиметричне, бо містить пари (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4).

Відношення R на множині A називають *транзитивним*, якщо для будь-яких a, b, $c \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, випливає $(a, c) \in R$. Відношення $R_4 - R_6$ із прикладу 5.4 транзитивні, відношення $R_1 - R_3$ не транзитивні: $(3, 4) \in R_1$, $(4, 1) \in R_1$, але $(3, 1) \notin R_1$; $(2, 1) \in R_2$, $(1, 2) \in R_2$, але $(2, 2) \notin R_2$; $(2, 1) \in R_3$, $(1, 4) \in R_3$, але $(2, 4) \notin R_3$.

Розглянемо, як деякі властивості відношень відображаються в їх матрицях і графах. Якщо відношення R рефлексивне, то на головній діагоналі матриці M_R лише одиниці, якщо іррефлексивне – то нулі. Матриця симетричного відношення симетрична, а матриця M_R антисиметричного відношення R має таку властивість: якщо $i \neq j$, то з $m_{ij} = 1$ випливає $m_{ji} = 0$ (але може бути $m_{ij} = m_{ji} = 0$) (рис. 5.2).

Граф G_R рефлексивного відношення R має петлю в кожній вершині. У графі транзитивного відношення в разі наявності пари дуг (a, b) та (b, c) обов'язково є дуга (a, c) (рис. 5.3).

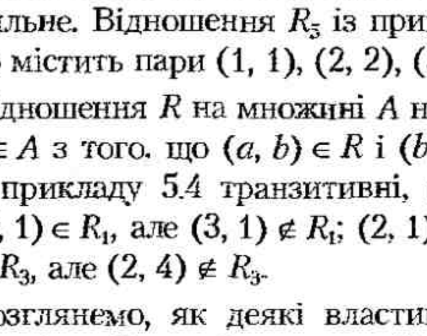


Рис. 5.2

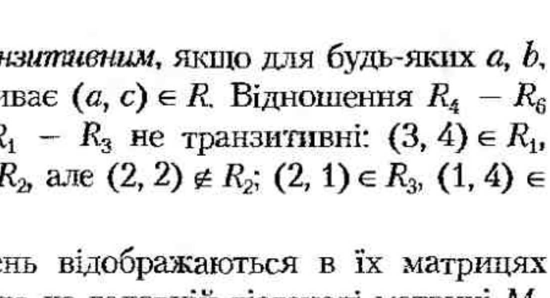


Рис. 5.3

5.2. Відношення еквівалентності

Розглянемо відношення, які мають водночас декілька зазначених вище властивостей у певній комбінації. Відношення на множині A називають *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Два елементи множини A, пов'язані відношенням еквівалентності, називають *еквівалентними*. Оскільки відношення еквівалентності за означенням рефлексивне, то кожний його елемент еквівалентний до самого себе. Більше того, позаяк відношення еквівалентності за означенням транзитивне, то з того, що елементи a та b еквівалентні й b та c еквівалентні, випливає, що a та c також еквівалентні.

Приклад 5.5. Нехай R – таке відношення на множині цілих чисел: aRb тоді й тільки тоді, коли $(a=b) \vee (a=-b)$. Воно рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому являє собою відношення еквівалентності.

Приклад 5.6. Нехай R – таке відношення на множині дійсних чисел: aRb тоді й лише тоді, коли $(a-b)$ – ціле число. Оскільки число $a-a=0$ ціле для всіх дійсних чисел a, то aRa для всіх дійсних чисел a. Отже, відношення R рефлексивне. Нехай тепер aRb. Звідси випливає, що $a-b$ – ціле число. Тому й число $b-a$ також ціле, тобто bRa. Ми довели, що відношення R симетричне. Якщо aRb та bRc, то числа $a-b$ та $b-c$ цілі. Але тоді число $a-c=(a-b)+(b-c)$ також ціле, тобто aRc. Отже, відношення R транзитивне. Тому це відношення еквівалентності.

Приклад 5.7. Конгруентність за модулем *m*. Нехай $m>1$ – ціле число. Доведемо, що $R=\{(a, b) \mid a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)\}$ – відношення еквівалентності на множині Z цілих чисел. За означенням, $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ еквівалентно тому, що m ділить $(a-b)$. Зазначимо, що $a-a=0$ ділиться на m, бо $0=0 \cdot m$. Отже, $a \equiv a (\mathrm{mod}\ m)$, тобто відношення рефлексивне. Окрім того, $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$, якщо $a-b=km$, де k – ціле число. Тоді $b-a=(-k)m$, тобто $b \equiv a (\mathrm{mod}\ m)$, і відношення симетричне. Нарешті, нехай $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ і $b \equiv c (\mathrm{mod}\ m)$. Це означає, що $a-b=km$, $b-c=lm$, де k, l – цілі числа. Додамо останні дві рівності: $a-b+b-c=(k+l)m$, тобто $a-c=(k+l)m$. Отже, $a \equiv c (\mathrm{mod}\ m)$, тобто відношення транзитивне. Отже, конгруентність за модулем m – відношення еквівалентності на множині цілих чисел.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Множину всіх елементів, які еквівалентні до елемента $a \in A$, називають *класом еквівалентності* (елемента a). Клас еквівалентності, породжений елементом a за відношенням R, позначають $[a]_R$. Маючи на увазі якесь певне відношення еквівалентності, використовують позначення $[a]$. Отже, $[a]_R = \{x \in A \mid aRx\}$. Елемент $b \in [a]_R$ називають *представником* цього класу еквівалентності.

Приклад 5.8. Знайдемо класи еквівалентності відношення з прикладу 5.5. Оскільки ціле число еквівалентне до самого до себе та до протилежного числа, то класи еквівалентності за цим відношенням такі: $[a]=\{-a, a\}$, $a \neq 0$, та $[0]=\{0\}$.

Приклад 5.9. Знайдемо класи еквівалентності елементів 0 і 1 для відношення конгруентності за mod 4 (див. приклад 5.7). Клас еквівалентності елемента 0 містить усі цілі числа b такі, що $0 \equiv b (\mathrm{mod}\ 4)$, тобто ті, що діляться на 4. Отже, $[0]=\{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$. Клас еквівалентності елемента 1 містить усі цілі числа b такі, що $1 \equiv b (\mathrm{mod}\ 4)$. Звідси випливає, що $[1]=\{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$. Класи еквівалентності, подібні до розглянутих у цьому прикладі, називають *класами конгруентності за модулем* m і позначають $[a]_m$. Отже, $[0]_4=\{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$, $[1]_4=\{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Зазначимо, що класи еквівалентності, породжені двома елементами множини A, або збігаються, або не перетинаються. Про це твердить наступна лема.

ЛЕМА 5.1. Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Тоді такі твердження еквівалентні:

(I) aRb,

(II) $[a]=[b]$,

(III) $[a]\cap[b]\neq\varnothing$.

Доведення. Спочатку доведемо, що з (I) випливає (II). Припустимо, що aRb. Щоб довести рівність $[a]=[b]$, покажемо, що $[a]\subset[b]$ та $[b]\subset[a]$. Нехай $c\in[a]$; тоді aRc. Оскільки aRb, а R – симетричне відношення, то bRa. Позаяк відношення R транзитивне, то з bRa й aRc випливає bRc, тому $c\in[b]$. Отже, $[a]\subset[b]$. Аналогічно можна довести, що $[b]\subset[a]$.

Доведемо тепер, що з (II) випливає (III). Справді, $[a]\neq\varnothing$, бо $a\in[a]$ внаслідок рефлексивності. Отже, з $[a]=[b]$ випливає $[a]\cap[b]\neq\varnothing$.

Нарешті, доведемо, що з (III) випливає (I). Припустимо, що $[a]\cap[b]\neq\varnothing$. Тоді існує такий елемент c, що $c\in[a]$ та $c\in[b]$, тобто aRc та bRc. Із симетричності відношення R випливає cRb. Оскільки відношення R транзитивне, то з aRc та cRb випливає aRb.

Позаяк з (I) випливає (II), з (II) випливає (III) та з (III) випливає (I), то твердження (I), (II), (III) еквівалентні.

Відношення еквівалентності R, задане на множині A, тісно пов'язане з розбиттям множини. Цей зв'язок виражено у двох наступних теоремах. Нагадаємо, що систему S підмножин множини A називають її розбиттям, якщо всі множини системи S непорожні, попарно не перетинаються й об'єднання їх усіх дорівнює множині A (див. підрозділ 1.13).

ТЕОРЕМА 5.1. Кожне відношення еквівалентності R на множині A породжує її розбиття на класи еквівалентності.

Доведення. Об'єднання класів еквівалентності за відношенням R покриває множину A, бо кожен елемент a з множини A належить своєму власному класу еквівалентності $[a]_R$. Інакше кажучи,

$$\bigcup_{a\in A}[a]_R = A.$$

Із леми 5.1 випливає, що коли $[a]_R\neq[b]_R$, то $[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$.

Приклад 5.10. Відношення конгруентності за mod 4 (див. приклад 5.9) породжує розбиття множини Z цілих чисел на чотири класи еквівалентності: $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$ та $[3]_4$. Вони попарно не перетинаються, а їх об'єднання дорівнює множині Z.

ТЕОРЕМА 5.2. Будь-яке розбиття множини A задає відношення еквівалентності на множині A.

Доведення. Нехай $a, b \in A$; будемо вважати, що aRb тоді й лише тоді, коли a та b належать одній і тій самій множині розбиття. Залишилося довести, що одержане відношення на множині A являє собою відношення еквівалентності. Для цього потрібно переконатись, що воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Справді, оскільки елемент a належить якійсь множині розбиття, то aRa, тобто відношення рефлексивне. Нехай A_r – якась множина розбиття й $a, b \in A_r$. Тоді й $b, a \in A_r$, тобто з aRb випливає bRa. Симетричність доведено. Нарешті, з aRb та bRc випливає $a, b, c \in A_r$. Тому aRc, тобто відношення R транзитивне.

5.3. Відношення часткового порядку

Відношення R на множині A називають *відношенням часткового порядку* (або *частковим порядком*), якщо воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне. Множину A з частковим порядком R називають *частково впорядкованою* й позначають (A, R).

Приклад 5.11. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. Відношення R задамо як звичайне порівняння чисел: $(a, b) \in R$ тоді й лише тоді, коли $a \leqslant b$ $(a, b \in A)$. Неважко безпосередньо переконатись, що це частковий порядок на множині A.

Приклад 5.12. Нехай A – множина з прикладу 5.11. Відношення R_1 задамо так: $(a, b) \in R_1$ тоді й лише тоді, коли a ділить b. Отже, $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (12, 12), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 12), (3, 6), (3, 12), (4, 8), (4, 12), (6, 12)\}$. Легко переконатись, що це відношення рефлексивне, антисиметричне й транзитивне, тому являє собою відношення часткового порядку на множині A.

Два елементи a та b частково впорядкованої множини (A, R) називають *порівнянними*, якщо aRb чи bRa. Якщо a та b – такі елементи, що ні aRb, ні bRa, то їх називають *непорівнянними*.

Приклад 5.13. Елементи 3 та 4 множини (A, R_1) із прикладу 5.12 непорівнянні.

Якщо (A, R) – частково впорядкована множина, у якій будь-які два елементи порівнянні, то її називають *лінійно*, або *тотально впорядкованою*, а частковий порядок R – *лінійним* (*тотальним*) порядком. Отже, множина (A, R) із прикладу 5.11 лінійно впорядкована, множина (A, R_1) із прикладу 5.12 частково впорядкована, але не лінійно впорядкована. Лінійно впорядковану множину називають також *ланцюгом*.

Приклад 5.14. Нехай $A = E_2^n$ – множина всіх векторів довжиною n з булевими компонентами 0, 1. Задамо частковий порядок на цій множині так: $(a_1, a_2, ..., a_n) \leqslant (b_1, b_2, ..., b_n)$ тоді й лише тоді, коли $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, ..., n)$. Цей частковий порядок не лінійний. Наприклад, не можна порівняти вектори (010000) і (101000).

Нехай на скінченній множині A задано якесь відношення часткового порядку R, а G_R – граф, асоційований із цим відношенням. Відношення R можна задати за допомогою такої процедури. Починають із графа G_R. Оскільки відношення часткового порядку рефлексивне, то в кожній вершині графа G_R є петля. Потрібно вилучити всі ці петлі. Потім вилучають усі дуги графа G_R, які є в ньому внаслідок транзитивності. Наприклад, якщо пари (a, b) та (b, c) належать відношенню, то в графі вилучають дугу (a, c). Більше того, якщо пари (c, d) також належить відношенню R, то в графі GR вилучають дугу (a, d). Після цього всі вершини графа розміщують на площині так, щоб початкова вершина кожної дуги була нижче, ніж кінцева вершина. Тепер усувають усі стрілки, бо дуги спрямовано вгору, до кінцевих вершин.

Усі ці кроки задано коректно, і в разі скінченної множини A кількість таких кроків скінченна. Отримаємо *діаграму Гассе* (H. Hasse), яка містить усю інформацію, потрібну для визначення відношення часткового порядку.

Приклад 5.15. Зобразимо діаграму Гассе для відношення часткового порядку з прикладу 5.12. Почнемо з орієнтованого графа, асоційованого з відношенням R_1 (рис. 5.4, *а*). Вилучимо всі петлі (рис. 5.4, *б*), а потім – усі дуги, зумовлені властивістю транзитивності; це дуги (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 8), (2, 12), (3, 12). Орієнтуємо всі дуги в напрямку знизу вверх і усунемо стрілки. Отримаємо діаграму Гассе (рис. 5.4, *в*).

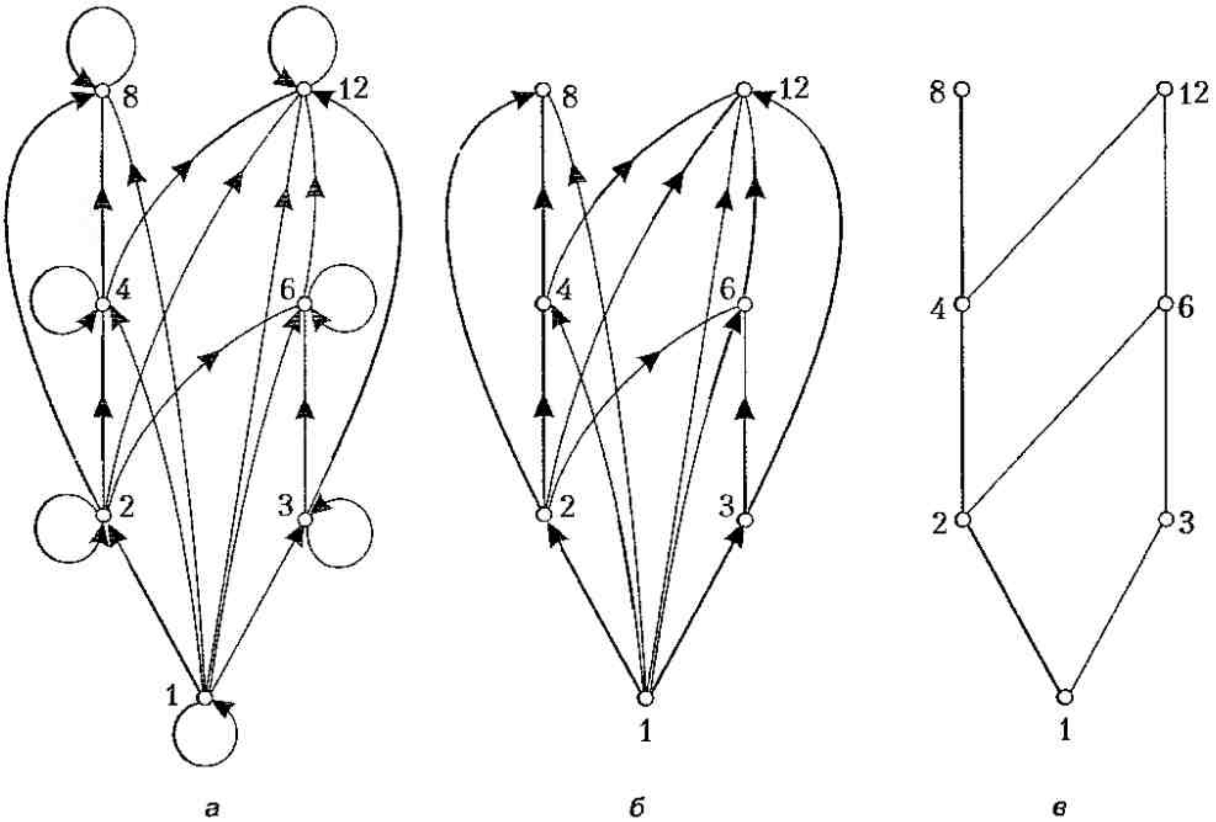


Рис. 5.4

Символом $\leqslant$ часто позначають довільне відношення часткового порядку. У частково впорядкованій множині (A, R) запис $a \leqslant b$ означає, що $(a, b) \in R$, а запис $a < b$ – що $a \leqslant b$, але $a \neq b$. Якщо $a < b$, то говорять, що елемент a *передує елементу* b (a менше, ніж b), або елемент b *виходить* з елемента a (b більше, ніж a).

Елемент $b \in A$ *безпосередньо виходить* з $a \in A$ тоді й лише тоді, коли $a < b$ та не існує такого елемента $u \in A$, що $a < u < b$. У такому разі елемент a *безпосередньо передує* елементу b.

Є алгоритм, який дає змогу побудувати діаграму Гассе для частково впорядкованої множини без використання графа відношення. Цей алгоритм ґрунтується на такій властивості. Нехай (A, R) — скінченна частково впорядкована множина; тоді $a_1 < a_n$ у тому й лише тому разі, якщо існує послідовність $a_1 < a_2 < ... < a_n$, у якій a_{i+1} безпосередньо виходить з a_i для $i = 1, 2, ..., n-1$. Зобразимо кожний елемент $a_i \in A$ точкою a_i на площині й розглянемо всі впорядковані пари (a_i, a_j). Точку a_j розмістимо вище точки a_i тоді й лише тоді, коли $a_i < a_j$, і з'єднаємо точки a_i й a_j лінією, якщо a_j безпосередньо виходить з a_i. Отримаємо діаграму Гассе; у ній існує шлях, який веде від точки a_n до точки a_m, якщо $a_n < a_m$.

Елементи частково впорядкованих множин, які мають певні екстремальні властивості, дуже важливі в багатьох застосуваннях. Елемент частково впорядкованої множини називають ***максимальним***, якщо він не менший за будь-який елемент цієї множини. Отже, a — максимальний елемент частково впорядкованої множини (A, R), якщо не існує такого елемента $b \in A$, що $a < b$. Аналогічно, елемент називають ***мінімальним***, якщо він не більший за будь-який елемент частково впорядкованої множини. Отже, елемент a мінімальний, якщо не існує такого елемента $b \in A$, що $b < a$. Максимальні та мінімальні елементи легко визначити на діаграмі Гассе: це відповідно „верхні" й „нижні" її елементи (для „верхніх" елементів немає висхідних ребер, а для „нижніх" — низхідних).

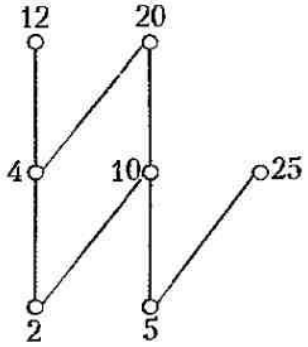


Рис. 5.5

Приклад 5. 16. На множині $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ задано відношення часткового порядку $R = \{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}$. Знайдемо максимальні й мінімальні елементи множини (A, R). Діаграму Гассе для цієї множини зображено на рис. 5.5. Із неї доходимо висновку, що максимальні елементи — 12, 20 і 25, а мінімальні — 2 та 5. Цей приклад свідчить, що частково впорядкована множина може мати більше одного максимального чи мінімального елемента.

5.4. Топологічне сортування

Хороший приклад використання частково впорядкованих множин — процес топологічного сортування. Це сортування елементів, для яких означено відношення часткового порядку, тобто порядок задано не для всіх, а лише для деяких пар.

Із цілком зрозумілих міркувань будемо вважати, що частково впорядкована множина, яка підлягає топологічному сортуванню, скінченна. Частковий порядок можна подати у вигляді діаграми Гассе, як це показано в підрозділі 5.3. Мета топологічного сортування – перетворити частковий порядок на лінійний.

Почнемо з означення. Лінійний порядок $\leqslant$ називають *сумісним* із частковим порядком R, якщо з aRb випливає $a \leqslant b$. Побудову лінійного порядку, сумісного із заданим частковим порядком, називають *топологічним сортуванням.*

Наведемо два приклади застосування топологічного сортування.

1. Певна задача (наприклад, технічний проект) розпадається на низку підзадач. Виконання деяких підзадач можливе лише після завершення інших. Якщо підзадачу v потрібно виконати до підзадачі w, то будемо писати $v < w$. Топологічне сортування – це такий розподіл робіт, за якого кожна з підзадач не розпочнеться до завершення всіх підзадач, які потрібно виконати до неї.
2. В університетських програмах деякі курси потрібно читати раніше за інші, бо останні ґрунтуються на попередньо викладеному матеріалі. Якщо для курсу w потрібно спочатку ознайомитись із курсом v, то пишемо $v < w$. Тут топологічне сортування означає, що жоден курс не можна читати раніше, ніж ті, що його підтримують.

ТЕОРЕМА 5.3. Кожна скінченна непорожня частково впорядкована множина (A, R) має принаймні один мінімальний елемент.

Доведення. Виберемо з множини A елемент a_0. Якщо він не мінімальний, то існує такий елемент a_1, що $a_1 < a_0$. Якщо елемент a_1 не мінімальний, то існує такий елемент a_2, що $a_2 < a_1$. Продовжимо цей процес: якщо елемент a_k не мінімальний, то існує такий елемент a_{k+1}, що $a_{k+1} < a_k$. Оскільки множина скінченна, то описаний процес закінчиться на мінімальному елементі a_m.

Опишемо роботу алгоритму топологічного сортування для довільної непорожньої частково впорядкованої множини (A, R). Спочатку виберемо мінімальний елемент a_1 (він існує за теоремою 5.3). Множина $(A \setminus \{a_1\}, R)$ також частково впорядкована (обґрунтування цього пропонуємо як вправу). Якщо вона непорожня, то виберемо з неї мінімальний елемент a_2. Вилучимо a_2; якщо ще залишились елементи, то виберемо мінімальний елемент a_3 з $A \setminus \{a_1, a_2\}$. Продовжимо процес вибору мінімального елемента a_{k+1} з $A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, доки залишаються елементи.

Позаяк A – скінченна множина, то цей процес завершиться. Отримаємо послідовність елементів $a_1, a_2, ..., a_n$. Шуканий лінійний порядок означають так: $a_1 \leqslant \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$. Він сумісний із заданим частковим порядком. Щоб переконатись у цьому, зазначимо, що коли $b < c$ в заданому частковому впорядкуванні, то c вибирають як мінімальний елемент, коли елемент b вже вилучено, бо інакше c не був би мінімальним елементом. Якщо є декілька мінімальних елементів, вибираємо будь-який. Опишемо цей алгоритм.

Алгоритм топологічного сортування

Наведемо кроки алгоритму.

Крок 1. Виконати $k := 1$.

Крок 2. Виконати $a_k :=$ мінімальний елемент множини A.

Крок 3. Виконати $A := A \setminus \{a_k\}$.

Крок 4. Виконати $k := k + 1$.

Крок 5. Якщо $A = \varnothing$, то зупинитись ($a_1, a_2, ..., a_n$ — результат топологічного сортування множини A), інакше перейти до кроку 2.

Приклад 5.17. Згідно з проектом у комп'ютерній компанії потрібно виконання сім завдань. Деякі з них можна розпочаті лише після завершення певних інших завдань. Частковий порядок на множині завдань задамо так: $X < Y$, якщо завдання Y не можна розпочати до завершення завдання X. Діаграму Гассе для множини цих завдань подано на рис. 5.6. Потрібно знайти порядок, у якому ці завдання можна виконати для завершення всього проекту.

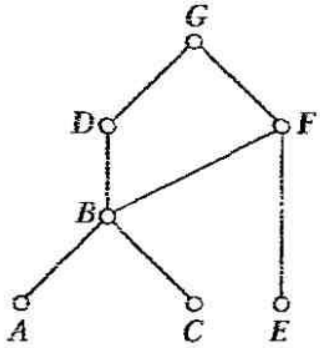
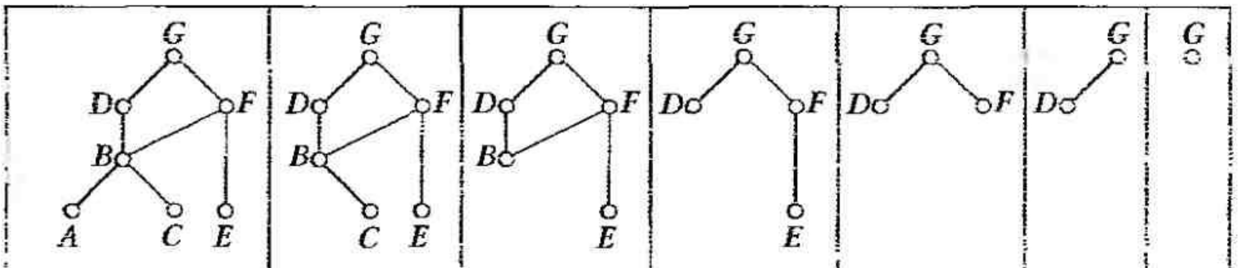


Рис. 5.6

Очевидно, що порядок виконання цих завдань можна дістати, виконавши топологічне сортування множини всіх завдань. Послідовність кроків такого сортування наведено на рис. 5.7. Результат цього сортування $A < C < B < E < F < D < G$ задає можливий порядок виконання завдань.



Вибраний мінімальний елемент	A	C	B	E	F	D	G

Рис. 5.7

5.5. Операції над відношеннями

Оскільки відношення з множини A в множину B — підмножина декартового добутку множин $A \times B$, то над будь-якими двома відношеннями з A в B можна виконувати звичайні теоретико-множинні операції.

Приклад 5.18. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Означимо відношення R_1 і R_2 з A в B:

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\},\ R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

Тоді

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\},$$
$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\},$$
$$R_1 \backslash R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\},$$
$$R_2 \backslash R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

Розглянемо тепер іншу операцію — композицію відношень. Нехай R — відношення з множини A в множину B, а S — відношення з множини B в множину C. ***Композицією*** відношень R і S називають відношення, яке складається з усіх можливих упорядкованих пар (a, c), де $a \in A$, $c \in C$, для яких існує такий елемент $b \in B$, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in S$. Композицію відношень R і S позначають як $S \circ R$.

Приклад 5.19. Знайдемо композицію відношень R і S, де R — відношення з множини $A = \{1, 2, 3\}$ в множину $B = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\};$$

S — відношення з множини B в множину $C = \{0, 1, 2\}$:

$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}.$$

Композицію $S \circ R$ будують, використовуючи всі впорядковані пари з відношень R і S такі, що другий елемент пари з R збігається з першим елементом пари з S. Наприклад, пари $(2, 3) \in R$ та $(3, 1) \in S$ породжують пару $(2, 1) \in S \circ R$. Виконавши описані дії, отримаємо

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}.$$

Нехай R — відношення на множині A. Степінь R^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, означають за допомогою рекурсії:

$$R^1 = R,$$
$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

Отже, зокрема,

$$R^2 = R \circ R,$$
$$R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R.$$

Приклад 5.20. Нехай на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Знайдемо R^n, $n = 2, 3, 4, 5$. За означенням послідовно одержимо

$$R^2 = R \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\},$$
$$R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\},$$
$$R^4 = R^3 \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\},$$

тобто $R^4 = R^3$. Можна переконатись, що $R^5 = R^4$.

ТЕОРЕМА 5.4. Нехай R – транзитивне відношення на множині A. Тоді $R^n \subset R$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Доведення. Застосуємо математичну індукцію. У разі $n = 1$ твердження теореми тривіальне. Гіпотеза індукції: $R^n \subset R$. Для завершення доведення потрібно переконатися, що з цієї гіпотези випливає включення $R^{n+1} \subset R$. Припустимо, що $(a, b) \in R^{n+1}$. Оскільки $R^{n+1} = R^n \circ R$, то існує такий елемент $x \in A$, що $(a, x) \in R$ та $(x, b) \in R^n$. За індуктивною гіпотезою $R^n \subset R$, звідки випливає, що $(x, b) \in R$. Позаяк відношення R транзитивне, то з $(a, x) \in R$ та $(x, b) \in R$ випливає, що $(a, b) \in R$. Отже, $R^{n+1} \subset R$.

Уведемо операції над булевими матрицями (тобто матрицями з елементами 0 і 1).

Диз'юнкція булевих $m \times n$ матриць P та Q – це $m \times n$ матриця $Z = P \vee Q$ з елементами $z_{ij} = p_{ij} \vee q_{ij}$, де $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Кон'юнкція булевих $m \times n$ матриць P та Q – це $m \times n$ матриця $Z = P \wedge Q$ з елементами $z_{ij} = p_{ij} \wedge q_{ij}$, де $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Нехай P – $m \times k$ матриця, Q – $k \times n$ матриця. Тоді *булевий добуток* матриць P та Q – це $m \times n$ матриця $Z = P \odot Q$ з елементами

$$z_{ij} = (p_{i1} \wedge q_{1j}) \vee (p_{i2} \wedge q_{2j}) \vee \ldots \vee (p_{ik} \wedge q_{kj}),$$

або, коротше,

$$z_{ij} = \bigvee_{r=1}^{k} (p_{ir} \wedge q_{rj}),$$

де

$$i = 1, \ldots, m,$$
$$j = 1, \ldots, n.$$

Булевий степінь булевих $n \times n$ матриць $A^{[r]}$, $r \in N$, означають так:

$$A^{[r]} = \underbrace{A \odot A \odot \ldots \odot A}_{r \text{ разів}}.$$

Це означення коректне оскільки булевий добуток матриць асоціативний. За означенням $A^{[0]} = I_n$, де I_n – одинична $n \times n$ матриця.

Операції над відношеннями легко виразити через матриці, які задають ці відношення:

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2},$$
$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2},$$
$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S,$$
$$M_{R^k} = M_R^{[k]}.$$

5.6. Замикання відношень

Нехай R – відношення на множині A. Воно може не мати деяких властивостей. Наприклад, це відношення може не бути рефлексивним, симетричним або транзитивним.

Замиканням відношення R за властивістю P називають найменше відношення $C \supset R$, яке має властивість P. Термін *„найменше відношення"* означає, що C – підмножина будь-якого відношення S, для якого виконуються такі умови.

1. S має властивість P.
2. $R \subset S$.

Можна довести, що замикання відношення R за властивістю P, якщо воно існує, являє собою перетин усіх відношень із властивістю P, які містять R.

Як властивість P можна брати, зокрема, рефлексивність, симетричність і транзитивність. Отже, розглянемо відповідні замикання відношення R.

Приклад 5.21. Відношення $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ на множині $A = \{1, 2, 3\}$ не рефлексивне. Щоб отримати його рефлексивне замикання, додамо пари (2, 2) та (3, 3), бо лише цих пар вигляду (a, a) не має в R. Очевидно, що це нове відношення рефлексивне, і R – його підмножина. Більше того, воно являє собою підмножину будь-якого рефлексивного відношення S, для якого $R \subset S$. Отже, ми справді одержали рефлексивне замикання відношення R.

З останнього прикладу зрозумілий спосіб побудови рефлексивного замикання: достатньо додати до відношення R усі ті пари (a, a), де $a \in A$, яких немає в R. Отже, рефлексивне замикання R дорівнює $R \cup \Delta$, де $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Відношення Δ на множині A називають *діагональним*. Що стосується орієнтованого графа, асоційованого з відношенням R, то рефлексивному замиканню відповідає граф, одержаний із нього додаванням петель у тих вершинах, де їх немає.

Приклад 5.22. Відношення $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ на множині $A = \{1, 2, 3\}$ не симетричне. Для отримання його симетричного замикання додамо пари (2, 1) і (1, 3), бо лише цих пар вигляду (b, a), для яких $(a, b) \in R$, немає в R. Очевидно, це нове відношення симетричне, й R – його підмножина. Окрім того, воно являє собою підмножину будь-якого симетричного відношення S, для якого $R \subset S$. Отже, ми справді одержали симетричне замикання відношення R.

Наведені міркування мають загальний характер: для отримання симетричного замикання потрібно додати всі такі пари (b, a), що $(b, a) \notin R$, але $(a, b) \in R$. Отже, симетричне замикання відношення R дорівнює $R \cup R^{-1}$, де $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$. Це можна сформулювати й у термінах графа відношення R: якщо в ньому є дуга (a, b), але немає дуги (b, a), то потрібно додати її.

Як знайти транзитивне замикання відношення R? Спочатку на прикладі покажемо, що попередня методика не приведе до успіху.

Приклад 5.23. Нехай на множині {1, 2, 3, 4} задано відношення $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. Очевидно, що воно не транзитивне: не вистачає пар (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1).

Додавши ці пари, отримаємо відношення $R_1 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$. Воно також не транзитивне, бо містить пари (3, 1) і (1, 4), але не містить пари (3, 4).

Отже, побудувати транзитивне замикання відношення складніше, ніж рефлексивне чи симетричне.

Шляхом у відношенні R від елемента a до елемента b називають послідовність елементів $a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b$ множини A таких, що $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, ..., $(x_{n-1}, b) \in R$. Доведемо, що процедура відшукання транзитивного замикання відношення R еквівалентна процедурі визначення того, які пари вершин з'єднано шляхом. Зазначимо, що шлях у відношенні R від a до b відповідає шляху з вершини a у вершину b в графі G_R цього відношення.

ТЕОРЕМА 5.5. Нехай R — відношення на множині A. Шлях довжиною n від елемента a до елемента b у відношенні R існує тоді й лише тоді, коли $(a, b) \in R^n$.

Доведення. Застосуємо математичну індукцію. За означенням, шлях від елемента a до елемента b довжиною 1 існує тоді й лише тоді, коли $(a, b) \in R$. Отже, теорема справджується для $n = 1$.

Гіпотеза індукції: нехай теорема справджується для цілого невід'ємного $n > 1$. Шлях довжиною $n + 1$ існує тоді й лише тоді, коли є такий елемент $x \in A$, що існує шлях довжиною 1 від елемента a до елемента x (тобто, $(a, x) \in R$) й існує шлях довжиною n від елемента x до елемента b (тобто, $(x, b) \in R^n$). Отже, з урахуванням індуктивної гіпотези, шлях довжиною $n + 1$ з a в b існує тоді й лише тоді, коли є такий елемент $x \in A$, що $(a, x) \in R$ та $(x, b) \in R^n$. Але такий елемент x існує тоді й лише тоді, коли $(a, b) \in R^{n+1}$. Отже, шлях довжиною $n + 1$ існує тоді й лише тоді, коли $(a, b) \in R^{n+1}$.

Нехай R — відношення на множині A. *З'єднувальним* називають відношення R^*, яке складається з таких пар (a, b), що існує шлях від елемента a до елемента b у відношенні R. Отже, з урахуванням теореми 5.5 $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

ТЕОРЕМА 5.6. Транзитивне замикання відношення R дорівнює з'єднувальному відношенню R^*.

Доведення. Очевидно, що $R \subset R^*$. Потрібно довести такі твердження: відношення R^* транзитивне; $R^* \subset S$, де S — будь-яке транзитивне відношення таке, що $R \subset S$.

1. Нехай $(a, b) \in R^*$, $(b, c) \in R^*$. Звідси випливає, що існує шлях від елемента a до елемента b та шлях від елемента b до елемента c у відношенні R. Отже, існує шлях від елемента a до елемента c у відношенні R (він проходить через вершину b). Звідси випливає, що $(a, c) \in R^*$, тобто відношення R^* транзитивне.
2. Нехай відношення S транзитивне та $R \subset S$. Оскільки $S^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$ та $S^n \subset S$ (за теоремою 5.4), то $S^* \subset S$. З умови $R \subset S$ випливає включення $R^* \subset S^*$, бо кожний шлях в R — це також шлях в S. Отже, $R^* \subset S^* \subset S$. Звідси випливає, що для будь-якого транзитивного відношення S такого, що $R \subset S$, виконується включення $R^* \subset S$. Це означає, що R^* — транзитивне замикання відношення R.

ТЕОРЕМА 5.7. Нехай множина A має n елементів і R — відношення на множині A. Тоді

$$R^* = \bigcup_{k=1}^{n} R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n.$$

Доведення. Достатньо довести, що коли в графі відношення R існує шлях із вершини a у вершину b, то існує й шлях довжиною $m \leqslant n$ з a в b. Нехай $P = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ — найкоротший шлях з $a = x_0$ в $b = x_m$; його довжина дорівнює m. Припустимо, що $m > n$. Тоді за принципом коробок Діріхле серед вершин шляху P обов'язково є щонайменше дві однакові: нехай $x_i = x_j$, де $0 \leqslant i < j \leqslant m$. Тоді існує цикл, що проходить через вершину x_i та міститься в P; його можна вилучити. Отримаємо шлях із вершини a у вершину b, який проходить через вершини $x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m$ і має меншу, ніж m, довжину. Але це суперечить тому, що шлях P найкоротший і m — його довжина. Отже, $m \leqslant n$.

З теореми 5.7 випливає таке матричне подання відношення R^*:

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \ldots \vee M_R^{[n]}.$$

Згідно з алгоритмом, що ґрунтується на цій формулі, для обчислення матриці M_{R^*} потрібно $O(n^4)$ операцій. Алгоритм Уоршалла (S. Warshall) ефективніший для побудови матриці M_{R^*}. Для його виконання потрібно $O(n^3)$ операцій. Розглянемо цей алгоритм.

Припустимо, що R — відношення на n-елементній множині A. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — довільна нумерація елементів цієї множини. В алгоритмі Уоршалла використано концепцію внутрішніх вершин шляху. Нагадаємо, що внутрішніми вершинами шляху $a, x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, b$ називають $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$.

Алгоритм Уоршалла будує послідовність булевих матриць $W^{(0)}, W^{(1)}, \ldots, W^{(n)}$, де $W^{(0)} = M_R$ — матриця відношення R. Елементи матриці $W^{(k)}$ позначимо як $w_{ij}^{(k)}$. Якщо існує шлях із вершини a_i у вершину a_j такий, що всі його внутрішні вершини містяться в множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, утвореній першими k вершинами, то $w_{ij}^{(k)} = 1$, а ні, то $w_{ij}^{(k)} = 0$. Перша й остання вершини такого шляху можуть і не належити множині вершин $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Зазначимо, що $W^{(n)} = M_{R^*}$. Справді, (i, j)-й елемент цієї матриці дорівнює 1 тоді й лише тоді, коли існує шлях із вершини a_i до вершини a_j, внутрішні вершини якого належать множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Алгоритм Уоршалла ефективно обчислює матрицю $W^{(k)}$ за матицею $W^{(k-1)}$. Шлях із вершини a_i у вершину a_j із внутрішніми вершинами в множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ існує лише у двох випадках.

1. Якщо існує шлях з a_i у a_j із внутрішніми вершинами лише в множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$ (рис. 5.8).
2. Якщо існує шлях з a_i в a_k та з a_k в a_j, і кожний із цих шляхів має внутрішні вершини лише в множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$ (рис. 5.9).

Рис. 5.8

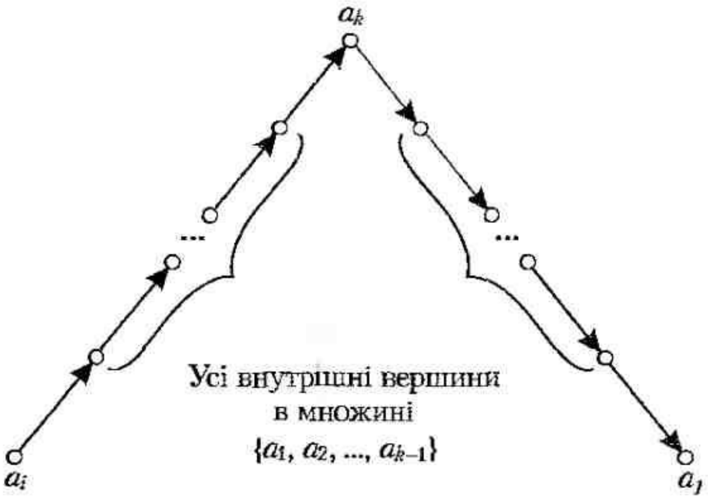


Рис. 5.9

У першому випадку шлях існує тоді й лише тоді, коли $w_{ij}^{(k-1)}=1$; у другому — коли обидва елементи $w_{ik}^{(k-1)}$ та $w_{kj}^{(k-1)}$ дорівнюють 1. Отже,

$$w_{ij}^{(k)} = w_{ij}^{(k-1)} \vee \left(w_{ik}^{(k-1)} \wedge w_{kj}^{(k-1)}\right),\ k = 1, 2, ..., n.$$

Для практичної реалізації останню формулу зручно перетворити так:

$$w_{ij}^{(k)} = w_{ij}^{(k-1)} \vee \left(w_{ik}^{(k-1)} \wedge w_{kj}^{(k-1)}\right) = \left(w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{ik}^{(k-1)}\right) \wedge \left(w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}\right) =$$
$$= \begin{cases} w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}, \text{ якщо } w_{ik}^{(k-1)} = 1, \\ w_{ij}^{(k-1)}, \text{ якщо } w_{ik}^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

Крім того, очевидно, що в разі $i=k$ дії в першому рядку формули можна не виконувати. Отже,

$$w_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}, \text{ якщо } i \neq k \text{ та } w_{ik}^{(k-1)} = 1, \\ w_{ij}^{(k-1)}, \text{ якщо } i = k \text{ чи } w_{ik}^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

Остання формула дає таке правило переходу від матриці $W^{(k-1)}$ до матриці $W^{(k)}$: для значень $i \neq k$ в разі $w_{ik}^{(k-1)} = 1$ замінити i-й рядок матриці $W^{(k-1)}$ на диз'юнкцію i-го й k-го рядків цієї матриці. Нижче подано алгоритм. Зазначимо, що i та j змінюються від 1 до n.

Алгоритм Уоршалла

Наведемо кроки алгоритму.

Крок 1. Присвоювання початкових значень. Виконати $W := M_R$, $k := 0$.

Крок 2. Виконати $k := k + 1$.

Крок 3. Для всіх $i \neq k$ таких, що $w_{ik} = 1$, і для всіх j виконати операцію $w_{ij} := w_{ij} \vee w_{kj}$.

Крок 4. Перевірка на закінчення. Якщо $k = n$, то зупинитись. Отримано розв'язок $W = M_{R^*}$, інакше перейти до кроку 2.

Приклад 5.24. Відношення задано матрицею

$$W^{(0)} = M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

За алгоритмом Уоршалла побудуємо транзитивне замикання цього відношення.
Для $k=1$ перший рядок залишаємо без змін ($i=k$), другий і третій рядки заміняємо на відповідну диз'юнкцію з першим:

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $k=2$ $W^{(2)} = W^{(1)}$, бо всі елементи другого стовпця матриці $W^{(1)}$ нульові.
Далі, для $k=3$ одержимо

$$W^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

і, нарешті, коли $k=4$, матимемо остаточний результат — матрицю транзитивного замикання

$$M_{R^*} = W^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.7. Бази даних і відношення

Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ — множини. Підмножину декартового добутку $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ називають *n-арним відношенням* на цих множинах. Самі множини $A_1, A_2, ..., A_n$ називають *доменами* відношення, а n — його *степенем*.

Приклад 5.25. Нехай R — відношення, що складається з трійок (a, b, c), де a, b та c — цілі числа й $a < b < c$. Тоді $(2, 7, 9) \in R$, але $(2, 9, 5) \notin R$. Степінь цього відношення дорівнює трьом. Усі три домени — множини цілих чисел.

Приклад 5.26. Нехай відношенням R складається з п'ятимісних кортежів $(N, S, D, T_в, T_п)$, які подають розклад авіаліній. Тут N — номер рейсу, S — пункт відправлення, D — пункт призначення, $T_в$ — час вильоту, $T_п$ — час прибуття. Зокрема, якщо рейс № 17 вилітає зі Львова о 9:30 і прибуває до Києва об 11:10, то кортеж (17, Львів, Київ, 9:30, 11:10) належить відношенню R. Степінь цього відношення дорівнює п'яти, а його домени — це, відповідно, множина всіх номерів рейсів, дві множини міст, дві множини значень часу.

Час, потрібний для обробки інформації в базах даних, залежить від того, як цю інформацію нагромаджено. Операції додавання та вилучення записів, їх пошуку й комбінування виконуються у великих базах даних мільйони разів. У зв'язку з важливістю цих операцій розроблено різні методи для подання баз даних. Розглянемо один із них, який називають реляційною моделлю даних. Цей метод ґрунтується на концепції n-арних відношень.

База даних складається із *записів*, які являють собою n-місні кортежі. Елементи кортежів утворюють *поля*. Наприклад, база даних, яка містить певну інформацію про студентів, може бути утворена полями, що містять, відповідно, прізвище, студентський номер, назву основної спеціальності та середній бал навчання. Цю реляційну базу даних подають у вигляді записів кортежів 4-арного відношення. Отже, студентові відповідає чотиримісний кортеж вигляду (ПРІЗВИЩЕ, СТУД_НОМЕР, СПЕЦ, БАЛ).

Приклад 5.27. У цьому прикладі наведено базу даних із шести записів:

(Бабенко П. С., 270436, Інформатика, 3.95),

(Біленко Б. М., 184931, Фізика, 4.09),

(Грінченко І. І., 270297, Інформатика, 4.15),

(Даціків І. А., 488934, Математика, 3.88),

(Яворський П. М., 488721, Математика, 4.15),

(Яковенко С. Ю., 295681, Психологія, 4.27).

Відношення, використовувані для подання баз даних, називають також *таблицями*, бо їх часто зображають у вигляді таблиць. Зокрема, базу даних студентів із прикладу 5.27 можна подати у вигляді табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Прізвище	Студ. номер	Спеціальність	Бал
Бабенко П. С.	270436	Інформатика	3.95
Біленко Б. М.	184931	Фізика	4.09
Грінченко І. І.	270297	Інформатика	4.15
Даціків І. А.	488934	Математика	3.88
Яворський П. М.	488721	Математика	4.15
Яковенко С. Ю.	295681	Психологія	4.27

Домен n-арного відношення називають ***первинним ключем***, якщо значення з цього домену в кортежі однозначно задає весь кортеж. Інакше кажучи, домен являє собою первинний ключ, якщо у відношенні немає двох кортежів з одним і тим самим значенням із цього домену.

Приклад 5.28. У відношенні з табл. 5.1 первинними ключами можуть бути домени „прізвище" та „студ. номер", а домени „спеціальність" і „бал" не можуть бути первинними ключами, тому що більше ніж один кортеж має однакові значення з цих доменів.

Комбінації доменів також можуть однозначно визначати кортежі в n-арних відношеннях. Якщо значення якоїсь сукупності доменів однозначно задають кортеж у відношенні, то декартів добуток цих доменів називають *комбінованим ключем*.

Записи можна вилучати з бази та додавати до неї. Тому потрібно бути впевненим, що кожний новий запис відрізняється в полі ключа (або в полях комбінованого ключа) від усіх інших записів у цій таблиці. Зокрема, як первинний ключ у прикладах 5.27, 5.28 доцільно вибрати „студ. номер", бо прізвище з ініціалами може повторюватись, а номер унікальний.

Операції над n-арними відношеннями використовують для утворення нових n-арних відношень. Розглянемо дві операції — проекцію та з'єднання.

Проекція $P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ відображає кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ довжиною n у кортеж $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots,$ $a_{i_m})$ довжиною m, де $m \leqslant n$. Інакше кажучи, проекція $P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ виключає $n - m$ компонент кортежу довжиною n, залишаючи тільки компоненти з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$.

Якщо після виконання проекції з'являться однакові кортежі, то їх записують лише один раз.

Приклад 5.29. У табл. 5.2 задано відношення, а в табл. 5.3 — його проекцію $P_{1,2}$.

Таблиця 5.2

Викладач	Факультет	Назва курсу
Зінченко С. В.	Математичний	Алгебра
Зінченко С. В.	Математичний	Аналітична геометрія
Коваль Ю. М.	Інформатики	Дискретна математика
Коваль Ю. М.	Інформатики	Системний аналіз
Яремчук А. І.	Фізичний	Теоретична фізика
Яремчук А. І.	Фізичний	Загальна фізика

Таблиця 5.3

Викладач	Факультет
Зінченко С. В.	Математичний
Коваль Ю. М.	Інформатики
Яремчук А. І.	Фізичний

Операцію з'єднання використовують для об'єднання двох таблиць в одну за умови, що вони мають деякі однакові поля. Нехай R — відношення степеня m, а S —

відношення степеня n. *З'єднання* $J_p(R, S)$, де $p \leqslant \min\{m, n\}$ — це відношення степеня $m+n-p$, яке містить усі кортежі $(a_1, a_2, ..., a_{m-p}, c_1, c_2, ..., c_p, b_1, b_2, ..., b_{n-p})$ довжиною $m+n-p$, де $(a_1, a_2, ..., a_{m-p}, c_1, c_2, ..., c_p) \in R$, $(c_1, c_2, ..., c_p, b_1, b_2, ..., b_{n-p}) \in S$. Інакше кажучи, операція J_p утворює нове відношення з двох наявних відношень R степеня m та S степеня n, з'єднуючи всі кортежі відношення R з усіма кортежами відношення S, де останні p компонент кортежів з R збігаються з першими p компонентами кортежів з S.

Приклад 5.30. Знайти відношення, отримане після застосування операції J_2 до відношень, заданих табл. 5.2, 5.4.

Таблиця 5.4

Факультет	**Назва курсу**	**Аудиторія**	**Час**
Інформатики	Дискретна математика	А111	9:30
Інформатики	Системний аналіз	А270	13:25
Математичний	Алгебра	А439	11:35
Математичний	Аналітична геометрія	А377	15:20
Фізичний	Теоретична фізика	Г216	9:30
Фізичний	Загальна фізика	Г105	13:25

Результат виконання операції з'єднання J_2 наведено в табл. 5.5.

Таблиця 5.5

Викладач	**Факультет**	**Назва курсу**	**Аудиторія**	**Час**
Зінченко С.В.	Математичний	Алгебра	А439	11:35
Зінченко С.В.	Математичний	Аналітична геометрія	А377	15:20
Коваль Ю.М.	Інформатики	Дискретна математика	А111	9:30
Коваль Ю.М.	Інформатики	Системний аналіз	А270	13:25
Яремчук А.І.	Фізичний	Теоретична фізика	Г216	9:30
Яремчук А.І.	Фізичний	Загальна фізика	Г105	13:25

Окрім проекції та з'єднання можна виконувати й інші операції над n-арними відношеннями. Їх докладно описано в літературі з теорії баз даних.

Контрольні запитання та завдання

1. Записати всі впорядковані пари, які утворюють відношення R із множини $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ в множину $B = \{0, 1, 2, 3\}$, де $(a, b) \in R$, якщо й лише якщо:

   а) $a = b$; б) $a + b = 4$; в) $a > b$;

   г) a ділить b; д) НСД$(a, b) = 1$; е) НСК$(a, b) = 2$.

   Тут НСД — найбільший спільний дільник, НСК — найменше спільне кратне.

2. Для кожного з відношень, наведених нижче, на множині {1, 2, 3, 4} визначити, чи воно рефлексивне, іррефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, транзитивне:

   а) {(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)};

   б) {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)};

   в) {(2, 4), (4, 2)};

   г) {(1, 2), (2, 3), (3, 4)};

   д) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)};

   е) {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)}.

3. Визначити, чи відношення R на множині всіх людей рефлексивне, іррефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, транзитивне, де $(a, b) \in R$, якщо й лише якщо:

   а) a вищий, ніж b;

   б) a та b народилися в один і той самий день;

   в) a має те саме прізвище, що й b;

   г) a та b мають спільних дідуся й бабусю.

4. Визначити, чи відношення R на множині цілих чисел рефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне, де $(x, y) \in R$, якщо й лише якщо:

   а) $x \neq y$;

   б) $xy \leqslant 1$;

   в) $x = y + 1$ або $x = y - 1$;

   г) x та y обидва від'ємні чи невід'ємні;

   д) $x = y^2$;

   е) $x \geqslant y^2$.

Нехай R — відношення з множини A в множину B. Відношення $\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$ називають *доповнювальним*. Відношення $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ називають *оберненим*.

5. Нехай R — відношення на множині цілих чисел, $R = \{(a,b) \mid a < b\}$. Знайти:

   а) $\overline{R}$; б) R^{-1}.

6. Нехай R — відношення на множині натуральних чисел, $R = \{(a,b) \mid a \text{ ділить } b\}$. Знайти:

   а) $\overline{R}$; б) R^{-1}.

7. Записати всі 16 різних відношень на множині {0, 1}. Скільки з них містять пару (0, 1)?

8. Скільки з 16 відношень на множині {0, 1}, записаних у розв'язанні задачі 7:

   а) рефлексивні;

   б) іррефлексивні;

   в) симетричні;

г) антисиметричні;

д) асиметричні;

е) транзитивні?

9. Скільки різних відношень на множині з n елементів:

а) симетричні;

б) антисиметричні;

в) асиметричні;

г) іррефлексивні;

д) рефлексивні й симетричні;

е) ні рефлексивні, ні іррефлексивні?

10. Скільки є транзитивних відношень на множині з n елементів, якщо:

а) $n=1$; б) $n=2$; в) $n=3$?

11. Знайти помилку в „доведенні" такої „теореми".

ТЕОРЕМА. Нехай R – симетричне й транзитивне відношення на множині A. Тоді R є рефлексивне.

Доведення. Нехай $a \in A$. Виберемо такий елемент $b \in A$, що $(a, b) \in R$. Оскільки відношення R симетричне, то й $(b, a) \in R$. Позаяк відношення R транзитивне, то з $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$ випливає $(a, a) \in R$. Отже, відношення R рефлексивне.

12. Довести, що відношення R на множині A симетричне тоді й лише тоді, коли $R = R^{-1}$, де R^{-1} – обернене відношення (див. інформацію перед задачею 5).

13. Довести, що відношення R на множині A антисиметричне тоді й лише тоді, коли $R \cap R^{-1}$ – підмножина діагонального відношення $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

14. Довести, що відношення R на множині A рефлексивне тоді й лише тоді, коли обернене відношення R^{-1} рефлексивне.

15. Довести, що відношення R на множині A рефлексивне тоді й лише тоді, коли доповнювальне відношення $\overline{R}$ іррефлексивне.

16. Задати кожне з відношень, наведених нижче, на множині $\{1, 2, 3\}$ за допомогою матриці:

а) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$;

б) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;

в) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2. 3), (3, 3)\}$;

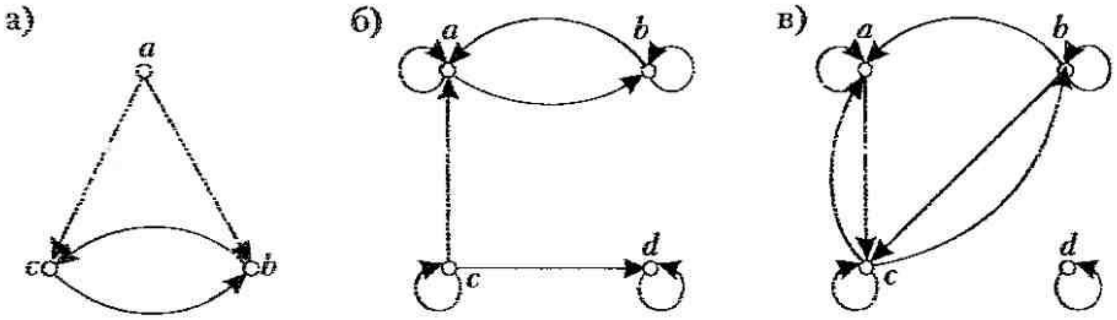
г) $\{(1, 3), (3, 1)\}$.

17. Виписати впорядковані пари елементів відношення на множині $\{1, 2, 3\}$, які відповідають наведеним нижче матрицям (рядки та стовпці відповідають числам, розміщеним у порядку зростання):

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначити, які з цих відношень рефлексивні, іррефлексивні, симетричні, антисиметричні, асиметричні, транзитивні.

18. Для кожного з відношень задачі 16 побудувати граф.
19. Для кожного з відношень задачі 17 побудувати граф.
20. Зобразити граф відношення $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b)\}$ на множині $A = \{a, b, c, d\}$.
21. Записати впорядковані пари елементів, які подають кожне відношення, задане графами, і визначити властивості цих відношень.



22. Які з наведених нижче відношень на множині {0, 1, 2, 3} являють собою відношення еквівалентності? Зазначити, чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності:

    а) {(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)};

    б) {(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)};

    в) {(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)};

    г) {(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)};

    д) {(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)}.
23. Які з наступних відношень на множині всіх людей являють собою відношення еквівалентності? Зазначити, чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності:

    а) $\{(a, b) \mid a$ та b одного віку$\}$;

    б) $\{(a, b) \mid a$ та b мають одних і тих самих батьків$\}$;

    в) $\{(a, b) \mid a$ та b мають спільного батька чи матір$\}$;

    г) $\{(a, b) \mid a$ та b зустрілись$\}$;

    д) $\{(a, b) \mid a$ та b розмовляють однією мовою$\}$.
24. Які з наступних відношень на множині всіх функцій із Z у Z являють собою відношення еквівалентності? Зазначити, чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності (Z — множина цілих чисел):

    а) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$;

    б) $\{(f, g) \mid f(0) = g(0)$ чи $f(1) = g(1)\}$;

    в) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = 1$ для всіх $x \in Z\}$;

    г) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = C$ для якогось $C \in Z$ і для всіх $x \in Z\}$;

    д) $\{(f, g) \mid f(0) = g(1)$ і $f(1) = g(0)\}$.

25. Задайте три відношення еквівалентності на множині студентів вашої академічної групи. Визначте класи еквівалентності для цих відношень еквівалентності.

26. Нехай A — непорожня множина, f — функція, означена на множині A. Відношення R складається з усіх упорядкованих пар (x, y) таких, що $f(x)=f(y)$:

    а) довести, що R — відношення еквівалентності на A;

    б) які класи еквівалентності породжує відношення R?

27. Нехай A — непорожня множина, R — відношення еквівалентності на A. Довести, що існує така функція, означена на множині A, що $(x, y) \in R$ тоді й лише тоді, коли $f(x)=f(y)$.

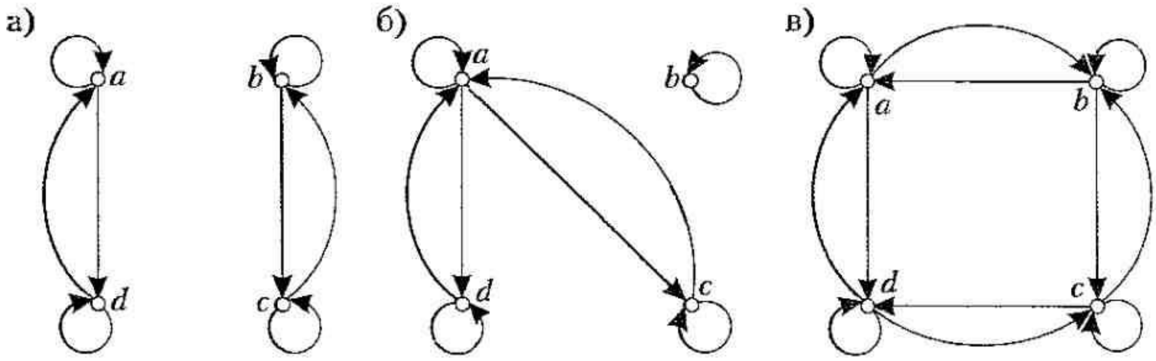
28. Відношення R, яке складається з усіх пар (α, β), де α та β — бітові рядки довжиною не менше ніж три, що збігаються в перших трьох бітах, являє собою відношення еквівалентності на множині всіх бітових рядків. Довести.

29. Довести, що тотожність формул логіки висловлювань — відношення еквівалентності на множині всіх формул.

30. Які з наведених нижче матриць подають відношення еквівалентності:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

31. Визначити, які з графів являють собою графи відношень еквівалентності.



32. Довести, що відношення R на множині всіх бітових рядків таке, що $\alpha R \beta$ тоді й лише тоді, коли α та β мають однакову кількість одиниць, являє собою відношення еквівалентності.

33. Для відношень еквівалентності із задач 22–24 наведіть класи еквівалентності.

34. Знайти клас еквівалентності бітового рядка 011 для відношення еквівалентності із задачі 32.

35. Для бітових рядків, наведених нижче, знайти класи еквівалентності відношення еквівалентності із задачі 28:

    а) 010; б) 1011; в) 11111; г) 01010101.

36. Знайти класи конгруентності $[4]_m$ для таких значень m:

а) 2; б) 3;

в) 6; г) 8.

37. Опишіть кожний із класів конгруентності за mod 6.

38. Які з наступних систем підмножин – розбиття множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? Для кожної системи підмножин, що являє собою розбиття множини A, побудувати відповідне відношення еквівалентності на множині A:

а) $\{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}\}$; б) $\{\{1\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}, \{5\}\}$;

в) $\{\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$; г) $\{\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}\}$.

39. Скільки різних відношень еквівалентності можна задати на множині з чотирьох елементів?

40. На множині цілих чисел Z задано відношення R. У яких випадках множина (Z, R) частково впорядкована:

а) aRb тоді й лише тоді, коли $a = b$;

б) aRb тоді й лише тоді, коли $a \neq b$;

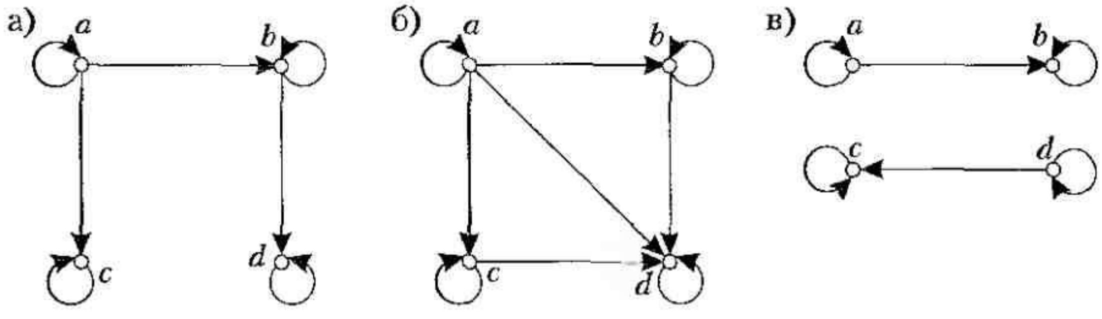
в) aRb тоді й лише тоді, коли $a \geqslant b$;

г) aRb тоді й лише тоді, коли a не ділить b?

41. Визначити, які з матриць подають відношення часткового порядку:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

42. Які з графів зображають відношення часткового порядку?



43. Нехай (A, R) – частково впорядкована множина. Довести, що множина (A, R^{-1}) також частково впорядкована. Тут R^{-1} – обернене відношення (див. інформацію перед задачею 5).

44. Побудувати діаграму Гассе для відношення „більше чи дорівнює" на множині $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

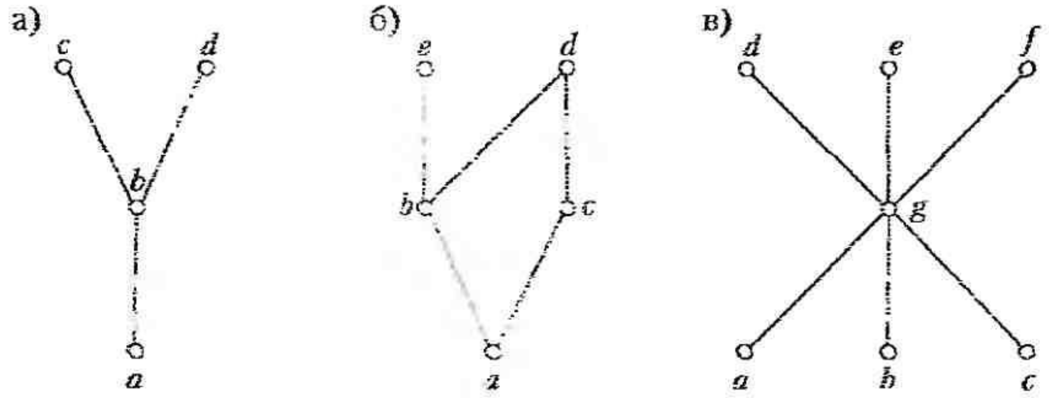
45. Побудувати діаграму Гассе для відношення $R=\{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}$ на множині A:

а) $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; б) $A=\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$;

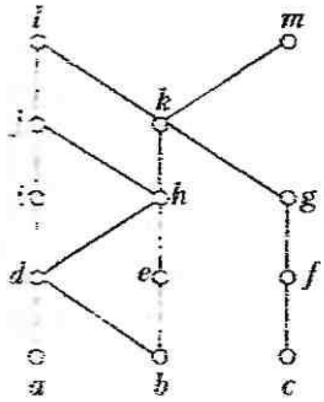
в) $A=\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$; г) $A=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

46. Побудувати діаграму Гассе для відношення $R=\{(A, B) \mid A\subset B\}$ на булеані $P(A)$, де $A=\{a, b, c\}$ (див. підрозділ 1.12).

47. Записати всі впорядковані пари відношення часткового порядку з такою діаграмою Гассе:



48. Для відношення часткового порядку, поданого діаграмою Гассе, знайти максимальні та мінімальні елементи.



49. Для частково впорядкованої множини (A, R), де $A=\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}$, $R=$ $=\{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}$, знайти максимальні та мінімальні елементи.

50. Виконати топологічне сортування для частково впорядкованої множини, заданої діаграмою Гассе із задачі 48.

51. Виконати топологічне сортування для частково впорядкованої множини (A, R), де $A=\{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$, $R=\{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}$.

52. Знайти відмінну від наведеної в прикладі 5.17 послідовність робіт для виконання завдань, з яких складається проект комп'ютерної компанії.

53. Нехай R і S — відношення на множині $A=\{1, 2, 3\}$, задані матрицями

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad M_S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Знайти матриці відношень:

а) $R\cup S$; б) $R\cap S$; в) $R\oplus S$; г) $S\circ R$; д) $R\circ R$.

54. Нехай відношення R задано матрицею

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Знайти матриці відношень:

а) R^2; б) R^3; в) R^4.

55. Нехай R — відношення на множині $A=\{0, 1, 2, 3\}$, яке складається з упорядкованих пар (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2) та (3, 0). Знайти:

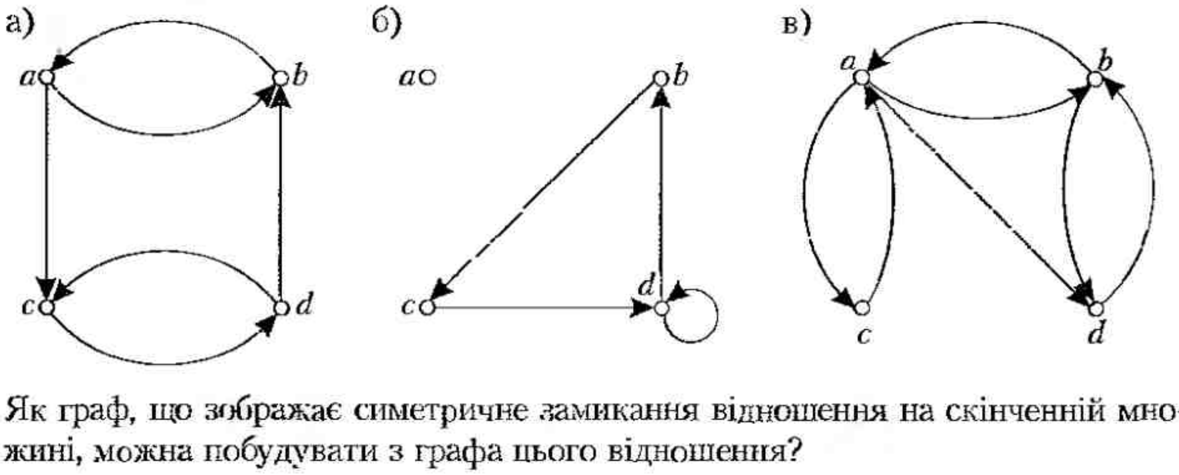
а) рефлексивне замикання відношення R;

б) симетричне замикання відношення R.

56. Нехай на множині Z цілих чисел задано відношення $R=\{(a, b)\mid a\neq b\}$. Знайти його рефлексивне замикання.

57. Як граф, що зображає рефлексивне замикання відношення на скінченній множині, можна побудувати з графа цього відношення?

58. Зобразити граф рефлексивного замикання для кожного з відношень, заданих графами:



59. Як граф, що зображає симетричне замикання відношення на скінченній множині, можна побудувати з графа цього відношення?

60. Знайти графи симетричного замикання відношень, заданих графами задачі 58.

61. Знайти найменше відношення, яке містить відношення $R=\{(a, b)\mid a>b\}$ на множині цілих чисел і водночас рефлексивне та симетричне.

62. Знайти граф найменшого відношення, яке водночас рефлексивне та симетричне для кожного з відношень, заданих графами задачі 58.

63. Відношення R на скінченній n-елементній множині A задано матрицею M_R. Довести, що матриця, яка задає рефлексивне замикання R, має вигляд $M_R \vee I_n$, де I_n – одинична $n \times n$ матриця.

64. Відношення R на скінченній множині A задано матрицею M_R. Довести, що матриця, яка задає симетричне замикання відношення R, має вигляд $M_R \vee M_R^{\mathrm{T}}$.

65. Довести, що замикання відношення R за властивістю P, якщо воно існує, являє собою перетин усіх відношень, що містять R і мають властивість P.

66. Нехай R – відношення на множині $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, яке складається з упорядкованих пар (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 4). Знайти:

    а) R^2; б) R^3; в) R^4;

    г) R^5; д) R^6; е) R^*.

67. Нехай відношення R утворено парами (a, b), де a та b – міста, між якими є пряма авіалінія. Коли пара (a, b) міститься в таких множинах:

    а) R^2; б) R^3; в) R^*?

68. Нехай R – відношення на множині всіх студентів, яке складається з усіх пар (a, b), де студенти a та b слухають принаймні один спільний курс і $a \neq b$. Коли пара (a, b) міститься в таких множинах:

    а) R^2: б) R^3; в) R^*?

69. Нехай відношення R рефлексивне. Довести, що відношення R^* також рефлексивне.

70. Нехай відношення R симетричне. Довести, що відношення R^* також симетричне.

71. Нехай відношення R іррефлексивне. Чи обов'язково буде іррефлексивним відношення R^2?

72. За алгоритмом Уоршалла побудувати транзитивні замикання відношень на множині $\{1, 2, 3, 4\}$:

    а) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$;

    б) $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;

    в) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;

    г) $\{(1. 1), (1. 4), (2, 1), (2, 3). (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$.

73. За алгоритмом Уоршалла побудувати транзитивні замикання наведених нижче відношень на множині $\{a, b, c, d, e\}$:

    а) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$;

    б) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$;

    в) $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$;

    г) $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$.

74. Знайти найменше відношення на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$, яке містить відношення $R = \{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ і має такі властивості:

    а) воно рефлексивне та транзитивне;

    б) симетричне та транзитивне;

    в) рефлексивне, симетричне та транзитивне.

75. Довести, що замикання за властивістю P відношення $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2)\}$ на множині $\{0, 1, 2\}$ не існує, якщо властивість P така:

    а) відношення не рефлексивне;

    б) кількість елементів відношення непарна.

76. Чи ми обов'язково одержимо відношення еквівалентності, побудувавши транзитивне замикання симетричного замикання рефлексивного замикання довільного відношення?

77. Чи ми обов'язково одержимо відношення еквівалентності, побудувавши симетричне замикання рефлексивного замикання транзитивного замикання довільного відношення?

78. Модифікувати алгоритм Уоршалла для відшукання рефлексивного замикання транзитивного замикання відношення на n-елементній множині.

79. Запропонувати алгоритм для побудови найменшого відношення еквівалентності, яке містить дане відношення.

80. Записати всі трійки, які утворюють відношення $\{(a, b, c) \mid a, b, c$ цілі та $0 < a < b < c < 5\}$.

81. Записати всі четвірки, які утворюють відношення $\{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d$ цілі додатні й $abcd = 6\}$.

82. Знайти результат застосування проекції $P_{1,2,4}$ до відношення із задачі 81.

83. Скільки компонент є в кортежі з таблиці, одержаній застосуванням оператора J_3 до двох таблиць, що складаються відповідно з п'ятикомпонентних і восьмикомпонентних кортежів?

Комп'ютерні проекти

Скласти програми із зазначеними вхідними даними та результатами.

1. Відношення на скінченній множині задано матрицею. Визначити, чи воно рефлексивне, іррефлексивне.
2. Відношення на скінченній множині задано матрицею. Визначити, чи воно симетричне, антисиметричне, асиметричне.
3. Відношення на скінченній множині задано матрицею. Визначити, чи воно транзитивне.
4. На скінченній множині задано частковий порядок. Побудувати діаграму Гассе та знайти всі максимальні й мінімальні елементи.

5. На скінченній множині задано частковий порядок. За допомогою топологічного сортування знайти сумісний із ним лінійний порядок.
6. Відношення на скінченній множині задано матрицею. Знайти матрицю його рефлексивного замикання.
7. Відношення на скінченній множині задано матрицею. Знайти матрицю його симетричного замикання.
8. Відношення на скінченній множині задано матрицею. Знайти матрицю його транзитивного замикання. Застосувати алгоритм Уоршалла.
9. Задано матрицю відношення R на скінченній множині. Знайти матрицю найменшого відношення еквівалентності, яке містить відношення R.
10. Задано n-арне відношення. Знайти його проекцію; поля проекції зазначено.
11. Задано m-арне й n-арне відношення, а також сукупність їх спільних полів. Знайти з'єднання заданих відношень за цими полями.