МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

О.І. Серпінська, О.О. Терентьєв,
О.І. Баліна, І.С. Безклубенко, Ю.В. Рябчун

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Рекомендовано вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури як навчальний посібник для студентів галузі знань 12 «Інформаційні технології» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» та 126 «Інформаційні системи і технології» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»

Київ 2023

ББК 22.176 я73
Т76

Автори: Серпінська О.І., асистент;
Терентьєв О.О., д.т.н., професор;
Баліна О.І., к.т.н., доцент;
Безклубенко І.С., к.т.н., доцент;
Рябчун Ю.В., Ph.D.

Рецензенти: *Доля О.В.,* к. ф.-м. н., доцент, КНУБА

Затверджено на засіданні вченої ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 6 від 19 січня 2024 року.

Дискретна математика [Електронний ресурс]: навч. посіб. /О.І. Серпінська та ін. – Київ: КНУБА, 2023. – 346 с.

ISBN 978-966-608-863-8

Навчальний посібник створений за матеріалами лекцій з курсу «Дискретна математика». Дисципліна «Дискретна математика» є базовою для підготовки бакалаврів зі спеціальностей 122 – «Комп’ютернінауки» і 126 – «Інформаційні системи і технології». Отримані знання будуть використані студентами при вивченні дисциплін «Теорія алгоритмів», «Прикладне програмування», «Об’єктно-орієнтоване програмування», «Числові методи», «Комп’ютерні мережі» та ін. Навчальний посібник містить основні положення теорії множин, комбінаторики, теорії графів та булевої алгебри. Матеріал проілюстровано численними прикладами. До кожного розділу подано задачі та вправи.

Посібник може бути корисним для інженерів та студентів технічних спеціальностей.

ББК 22.176 я73

© О.І. Серпінська, О.О. Терентьєв,
О.І. Баліна та ін., 2023
ISBN 978-966-608-863-8
© КНУБА, 2023

ЗМІСТ

Вступ

Навчальний посібник створений за матеріалами лекцій з курсу «Дискретна математика». Дисципліна «Дискретна математика» є базовою для підготовки бакалаврів зі спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки» і 126 «Інформаційні системи і технології».

Отримані знання будуть використані студентами при вивченні дисциплін «Теорія алгоритмів», «Прикладне програмування», «Об'єктно-орієнтоване програмування», «Числові методи», «Комп'ютерні мережі» та ін.

Навчальний посібник містить основні положення теорії множин, комбінаторики та булевої алгебри. Зокрема розглянуті основи теорії множин, відповідностей та відношень на множинах. Представлені відношення еквівалентності та порядку, детально описані їх властивості. Основні положення комбінаторики представлені законами комбінаторики, комбінаторними вибірками та типовими комбінаторними алгоритмами. Значна увага приділена теорії графів. Розглянуті базові визначення теорії графів, способи створення та властивості графів, відношення та відображення на графах. Окремо розглянуто дерева, їх властивості та ліс. Представлені основні алгоритми на графах. В розділі «Булева алгебра» надані канонічні форми булевих функцій і розглянуті проблеми мінімізації формул алгебри логіки.

Посібник може бути корисним для інженерів та студентів технічних спеціальностей.

Тема 1. Множини, операції над множинами

1.1. Основні положення теорії множин

Канторівський вираз «Множина - це зібрання в єдине ціле певних об`єктів, чітко розрізнюваних нашою інтуїцією чи нашою думкою», - безумовно, не можна вважати строгим математичним означенням. Це, скоріше, пояснення поняття множини.

Прикладами множини можуть бути множини десяткових цифр, літер українського алфавіту, мешканців Києва, парних чисел, розв'язків якогось рівняння тощо. На письмі множини позначають зазвичай великими літерами. Для деяких множин у математиці використовують сталі позначення, наприклад: Z – множина цілих чисел, N – множина натуральних чисел, Q – множина раціональних чисел, R – множина дійсних чисел.

1.1.1. Основні поняття та визначення теорії множин

Під ***множиною*** будемо розуміти довільну сукупність об'єктів, об'єднаних деякою спільною ознакою.

Синонімами поняття «множина» є поняття «сукупність», «клас», «збірка» тощо. Предмети, об'єкти, які містить множина, називають її елементами. Наприклад, дочка, син є елементами множини сім'ї.

Множини позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C, D, ..., а елементи множин – малими буквами цього алфавіту – a, b, c, d, ...

Приклад 1.1. Можливі позначення елементів множини: $a, b, c, ..., x, y, z$. Елементом множини може бути інша множина. У цьому випадку елементом множини є множина, яка представлена своєю назвою або елементами у фігурних дужках.

Приклад 1.2. Нехай $B = \{d, c, n\}$. Тоді $A = \{a, b, c, B\}$ або $A = \{a, b, c, \{d, c, n\}\}$.

Про елементи даної множини говорять, що вони належать цій множині, і символічно записують так: $a \in A$.

Читають: «елемент a належить множині A» або «множина A містить елемент a».

Знак належності елемента множини - це стилізація першої літери грецького слова бути. Те, що елемент a не належить множині A, позначають так: $a \notin A$.

Запис $a, b, c, \ldots \in A$ використовують для скорочення запису $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$ ...

Приклад 1.3. Позначення $x \in X$ показує, що елемент x належить множині X, тобто x є одним з елементів множини X. Позначення $\{d,c,n\} \in X$ показує, що множина $\{d,c,n\}$ є елементом множини X.

Позначення $a \notin X$ показує, що елемент a не належить множині X.

Вправа 1. Назвіть три елементи множини: а) навчальних предметів, що вивчаються в початковій школі; б) парних натуральних чисел; в) чотирикутників.

Вправа 2. Надані числа: 325, 0, -17, -3, 8, 7. Встановіть, які з них належать множині: 1) натуральних чисел; 2) цілих чисел; 3) раціональних чисел; 4) дійсних чисел.

Вправа 3. Прочитайте наступні висловлювання і вкажіть серед них істинні: 1) $100 \in N$; 2) $-8 \in Z$; 3) $-8 \notin N$; 4) 5,36∈Q; 5) 102∉R; 6) $\sqrt{2} \notin$Q; 7) -7∈R; 8) $\frac{3}{4} \in N$; 9) $0 \in Z$.

Вправа 4. Р – множина натуральних чисел, більших за 7 і менших за 14. З'ясуйте, які з чисел 13, 10, 5, 7, 14 йому належать, а які не належать. Відповідь запишіть, використовуючи знаки $\in$ і $\notin$.

Способи задавання множини

Для ***задання множини***, утвореної з будь-яких елементів, будемо застосовувати способи, в основі яких лежить позначення множини за допомогою фігурних дужок.

Якщо $a_1, a_2, \dots, a_n$– якісь об'єкти, то їх множину позначають як $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, де у фігурних дужках міститься перелік усіх елементів відповідної множини. Порядок запису елементів множини в такому позначенні неістотний.

Приклад 1.4 Множину всіх десяткових цифр записують $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, множину всіх основних математичних операцій $\{+, -, \times, \div\}$, множину розв'язків нерівності $(x-1)^2 \leq 0 - \{1\}$.

Одна з основних ідей канторівської теорії множин – розгляд множини як нового самостійного об'єкта математичного дослідження. Тому потрібно розрізняти такі два різні об'єкти, як елемент a та множина $\{a\}$, що складається з єдиного елемента a. Зокрема, множини можуть бути елементами якоїсь іншої множини. Наприклад, множина $D = \big\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\big\}$ всіх можливих пар з елементів a, b, c складається з трьох елементів, і її задано цілком коректно.

Такий спосіб задавання множини громіздкий і не використовується при великій кількості елементів.

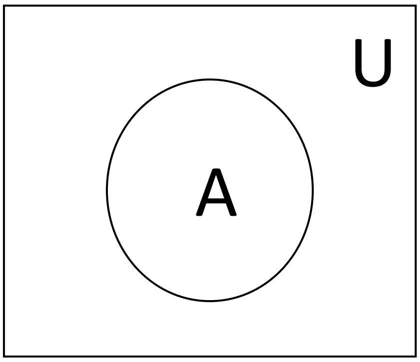
Другий спосіб задання множин ґрунтується на зазначенні загальної властивості чи породжувальної процедури для всіх об'єктів, що утворюють описувану множину.

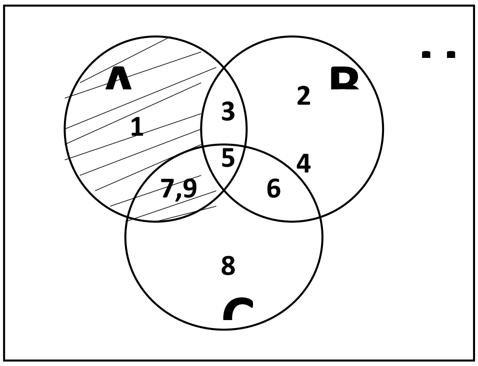
В загальному випадку задання множини М має вигляд $M = \{a | P(a)\}$. Цей вираз слід читати так: «*M* – це множина всіх тих і тільки тих елементів *a*, для яких виконується умова *P*». Через Р(а) позначено або властивість, яку мають елементи множини *M*, або якусь породжувальну процедуру, що описує спосіб отримання елементів множини M з уже відомих її елементів чи інших об'єктів. Замість вертикальної риски іноді пишуть двокрапку.

Приклад 1.6.$S = \{n|n -$ непарне число$\}$або $S = \{n|n = 2k + 1, k \in Z\}$, $X = \{x|x = \pi k, k \in Z\}$

Другий спосіб задання множин більш загальний. Наприклад, уведену вище множину D всіх пар з елементів a, b, c можна задати так: $D = \{\{x, y\}|x \in \{a, b, c\}, y \in \{a.b.c\}, x \neq y\}$.

Третій способ задання множин носить назву діаграми Ейлера-Венна.
З визначення витікає, що рівні множини і відношення з множинами зручно ілюструвати за допомогою графічних схем, в яких множини представляються у вигляді кіл, овалів або будь-яких інших геометричних фігур і передбачається, що в цих геометричних фігурах заключені всі елементи даної множини. Такі геометричні фігури називаються ***колами Ейлера***, від імені німецького математика Леонарда Ейлера, який в 1762 році застосував цю геометричну фігуру для логічних цілей.





Аналітичний, за допомогою символів операцій над множинами та дужок.

$$C = \overline{(B \cup A) \cap \overline{\overline{A}} \cup (A \cap \overline{B})} \cup B$$

Визначення підмножини

Дві множини A і B називають ***рівними*** (записують $A=B$), якщо вони складаються з тих самих елементів.

Множину A називають ***підмножиною*** множини B (записують $A \subseteq B$ чи $B \supseteq A$) тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A належить також множині B. Знаки *і* називають ***знаками включення***.

Неважко переконатися, що $A=B$ тоді й тільки тоді, коли одночасно виконуються два включення: $A \subseteq B$ та $B \subseteq A$. Крім того, якщо $A \subseteq B$ та $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$. Останні два факти часто використовують у доведеннях тверджень про рівність двох заданих множин.

Якщо $A \subseteq B$, однак $A \neq B$, то пишуть $A \subset B$ і називають множину A ***власною*** (строгою або істинною) ***підмножиною*** множини B. Знаки $\subset$ *і* $\supset$, на відміну від знаків $\subseteq$ *і* $\supseteq$ називають ***знаками строгого включення***.

Очевидно, що для будь-якої множини A виконується включення $A \subseteq A$.

Слід чітко розуміти різницю між знаками $\in$ і $\subseteq$, не плутати ситуації їх використання. Якщо $\{a\} \subseteq M$, то $a \in M$ і навпаки. Однак із включення $\{a\} \subseteq M$, взагалі кажучи, не випливає $\{a\} \in M$. Наприклад, для множини $D = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ і її елементів виконуються такі співвідношення:$\{a,b\} \in D$, $\{\{a,b\},\{bc\}\} \subseteq D$, $a \in \{a,b\}$, $\{c\} \notin \{a,c\}$, $\{a\} \subseteq \{a,b\}$.

Визначення рівності множин

Множина X дорівнює множині Y *у* випадку, якщо будь-який елемент a належить множині X ($a \in X$) тоді й тільки тоді, коли $a \in Y$. Іншими словами $X=Y$ (X дорівнює Y) тоді й тільки тоді, коли $X \subseteq Y$ й $Y \subseteq X$.

Приклад 1.7. Визначити, чи є рівними множини X та Y за умови, що $X =\{a,b,c,d\}$, $Y =\{c,a,b,d\}$.

Розв'язок. Перевіримо приналежність елементів множин X та Y. Будь-який елемент, що належить множині X, також належить і множині Y. Отже, $X = Y$.

Визначення порожньої множини

Порожня множина – це множина, яка не містить елементів. Позначення порожньої множини: $\emptyset$ або { }.

Крім того, вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини А, тобто $\emptyset \subseteq A$ (зокрема, $\emptyset \subseteq \emptyset$). Для будь-якого об`єкта x виконується $x \notin \emptyset$.

Вправа 5. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $\emptyset = \{0\}$; (б) $\emptyset = \{\ \ \}$; (в) $\{1, \emptyset\} = \{1\}$.

Визначення універсальної множини

Множина, яка вміщує в собі всі множини, що розглядаються, називається ***універсальною*** множиною або ***універсумом*** і позначається U.

Властивості універсальної множини.

Властивість 1. Будь-який об'єкт, яка б не була його природа, є елементом універсальної множини, зокрема $U \in U$.

Властивість 2. Будь-яка множина є підмножиною універсальної множини, зокрема $U \subseteq U$.

Універсальна множина має прикладний характер.

Множина U, незважаючи на те, що названа універсальною, не може бути однозначно визначена, якщо не названа предметна область, тобто не зазначена властивість об'єктів, за якою дана множина формується.

1. Універсальна множина не є множиною всіх множин.
2. Універсальна множина є єдиною для певної чітко окресленої загальної ознаки її елементів.
3. Універсальна множина має прикладний характер.

Приклад. 1.8.

1. Універсальна множина в теорії чисел – множина цілих чисел.
2. Універсальна множина в математичному аналізі – множина дійсних чисел.

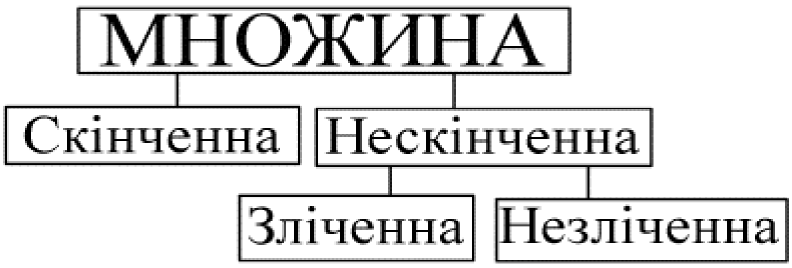
Скінченні й нескінченні множини

Множину називають ***скінченною,*** якщо кількість її елементів скінченна, тобто існує натуральне число k , що є кількістю елементів цієї множини. В іншому разі, множина є ***нескінченною***. Кількість елементів скінченної множини А традиційно позначають $|A|$.

Кількість елементів скінченої множини називається ***потужністю*** множини.

Наприклад: $|\emptyset| = 0$, якщо $a = \{0,1,3\}$, тоді потужність $|A| = 3$.

Якщо $|A| = |B|$, то множини A та B називають ***рівнопотужними***.



Приклад 1.9. Навести приклад скінченної множини.

Розв'язок. Задамо скінченну множину перерахуванням $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10\}$. У цій множині $k = 10$.

Нескінченна множина – множина, що включає нескінченну кількість елементів.

Якщо не існує невід'ємного цілого числа k, то множину називають нескінченною.

Приклад 1.10. Навести приклад нескінченної множини.

Розв'язок. Задамо нескінченну множину предикатом $B = \{b$ "$b -$ *ціле число* "$\}$. Для цієї множини не існує цілого невід'ємного числа k.

Зліченна множина – нескінченна множина, елементи якої принципово можливо пронумерувати натуральними числами.

Незліченна множина – така нескінченна множина, яка не є зліченною.

Приклад 1.11. Дати приклади нескінченних множин, до яких входять зліченні множини.

Розв'язок. Множини натуральних чисел N, цілих чисел Z. Множини раціональних чисел Q і дійсних чисел R. Множина комплексних чисел C.

Зліченна множина – нескінченна множина, елементи якої можливо пронумерувати натуральними числами.

Зліченна множина – нескінченна множина X, у якій існує взаємо-однозначна відповідність $X \leftrightarrow N$, де N позначає множину всіх натуральних чисел.

Зліченна множина є «найменшою» нескінченною множиною, тобто у будь - якій нескінченній множині знайдеться зліченна підмножина.

Властивість 1. Будь-яка підмножина зліченної множини скінченна.

Властивість 2. Множина всіх скінченних підмножин зліченної множини зліченна.

Приклад 1.12. Приклад нескінченної зліченної множини. Зліченна множина – зірки, які принципово можливо порахувати. Скінченна множина, яка є підмножиною зліченної множини – це зірки, які занесені до зіркового каталогу.

Незліченна множина – така нескінченна множина, яка не є зліченною.

Таким чином, будь-яка множина або скінченна, або зліченна, або незліченна.

n *-множина* – це множина, яка має n елементів.

Булеан

Визначення. Множину всіх підмножин множини A називають ***булеаном*** і позначають 2^A або P(A). В деяких джерелах булеан позначають, як $\beta(A)$.

$$2^A = \{N | N \subseteq A\}$$

Якщо множини A має n елементів, то булевн $P(A)$ міститиме 2^n елементів, через що його називають ***множиною-степенем*** множини A. Для скінченної множини A з n=A кількість її підмножин (потужність булеана) дорівнює $2^n = 2^{|A|}$. Отже, $|2^A| = 2^{|A|}$. Булеан включає порожню множину і саму множину A.

Приклад 1.13. Для множини $A = \{a, b\}$ маємо $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, а для $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ $P(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$.

Вправа 6. Нехай A – множина студентів вашої групи, яка її потужність? Яка потужність булеана вашої групи?

Вправа 7. Визначити множину: (а) $\beta(\beta(\{1,2\}))$; (б) $\beta(\beta(\beta(\varnothing)))$.

Обов`язкові завдання

1. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $\{1,2,3\} = \{1,2,2,3\}$; (в) $\{1,2,3\} = \{1,3,2\}$;

(б) $\{1,2,3\} = \{1,\{2\},3\}$; (г) $\{1,2,3\} = \{(1,2),(2,3)\}$

2. З яких елементів складається множина B, якщо $A = \{1,2,3\}$?

(а) $B = \{y \mid y = x + z, x, z \in A\}$; (б) $B = \{y \mid x = y + z, x, z \in A\}$

(в) $B = \{y \mid y = xz, x, z \in A\}$.

3. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $\varnothing = \{0\}$; (в) $\{1,\varnothing\} = \{1\}$; (д) $|\{\varnothing\}| = 0$; (є) $|\{\varnothing,\{\varnothing\}\}| = 2$;

(б) $\varnothing = \{\ \}$; (г) $|\varnothing| = 0$; (е) $|\{\varnothing\}| = 1$; (ж) $|\{\{\varnothing\}\}| = 2$.

4. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $1 \in \{1,2,3\}$; (в) $\{1\} \in \{1,2,3\}$; (д) $\{1,2\} \in \{1,2,3\}$ (є) $\{1,2\} \in \{\{1,2\}\}$; (з) $a \in \{a\}$;

(б) $1 \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$; (г) $\{1\} \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$; (е) $\{1,2\} \in \{1,2\}$; (ж) $\{1,2\} \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

5. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $0 \in \varnothing$; (в) $\varnothing \in \{1\}$; (д) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$;

(б) $\varnothing \in \varnothing$; (г) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; (е) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

6. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $1 \subseteq \{1,2,3\}$; (в) $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$; (д) $\{1,2\} \subseteq \{\{1\},\{1,2\}\{3\}\}$;

(б) $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$; (г) $\{1\} \subseteq \{\{1\},\{2,3\}\}$; (е) $\varnothing \subseteq \{1,2,3\}$.

7. Нехай $A = \{1,2,\{1\}\}$. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $1 \in A$; (б) $\{1\} \in A$; (в) $\{\{1\}\} \in A$; (г) $\{1\} \subseteq A$;

(д) $\{\{1\}\} \subseteq A$; (ж) $\{\{2\}\} \subseteq A$; (і) $\varnothing \subseteq A$; (к) $\{\varnothing \subseteq A\}$;

(е) $\{2\} \in A$; (з) $\{1,2\} \in A$; (ї) $\varnothing \subseteq A$; (л) $\{\varnothing,1\} \subseteq A$;

(є) $\{2\} \subseteq A$; (и) $\{1,2\} \subseteq A$; (й) $\{\varnothing\} \in A$; (м) $\{\varnothing,\{1\}\} \subseteq A$.

8. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $\varnothing \subseteq \varnothing$; (г) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$; (є) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$;

(б) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; (д) $\varnothing \subseteq \{1\}$; (ж) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing\}$;

(в) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$; (е) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$; (з) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\{\{\varnothing\}\}\}$.

9. Чи існує така одноелементна множина В, що для якоїсь множини А одночасно виконуються співвідношення $A \in B$ і $A \subseteq B$?

10. Для множини А побудувати множину всіх її підмножин, тобто булеан P(A):

(а) $A = \{1,2,3\}$; (в) $A = \{1,\{2\},\{1,2\}\}$;

(б) $A = \{\varnothing\}$; (г) $A = \{\varnothing,\{1,2\}\}$.

11. Визначити множину:

(а) $\beta(\beta(\{1,2\}))$; (б) $\beta(\beta(\beta(\varnothing)))$.

12. Назвіть три елементи множини:

а) навчальних предметів, що вивчаються в початковій школі;

б) парних натуральних чисел;

в) чотирикутників.

13. В – множина парних чисел. Запишіть за допомогою символів наступні висловлювання: 1) число 20 парне; 2) число 17 не є парним.

14. Запишіть, використовуючи символи: а) Число 14 – натуральне; б) Число – 7 не є натуральним; в) Число 0 – раціональне; г) $\sqrt{7}$ - число дійсне.

15. Надані числа: 325, 0, - 17, -3,8, 7. Встановіть, які з них належать множині: 1) натуральних чисел; 2) цілих чисел; 3) раціональних чисел; 4) дійсних чисел.

16. Прочитайте наступні висловлювання і вкажіть серед них істинні:

1) $100 \in N$; 2) $-8 \in Z$; 3) $-8 \notin N$; 4) $5{,}36 \in Q$; 5) $102 \notin R$; 6) $\sqrt{2} \in Q$;

7) $-7 \in R$; 8) $\frac{3}{4} \in N$; 9) $0 \in Z$.

17. Р – множина натуральних чисел, більших за 7 і менших за 14. З`ясуйте, які з чисел 13, 10, 5, 7, 14 йому належать, а які не належать. Відповідь запишіть, використовуючи знаки $\in$ і $\notin$.

18. А – множина рішень рівняння $x^2 + 1 = 0$. Чи вірно, що А – порожня множина? Наведіть приклади рівняння, множина рішень якого складається з: а) одного елементу; б) двох елементів; в) трьох елементів.

19. Запишіть за допомогою знаку дорівнює і фігурних дужок речення: 1) Х – множна чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5; 2) У - множина літер в слові «математика».

20. Множина С складається з квадрату, кола і трикутника. Чи належить цій множині діагональ квадрата?

21. Перерахуйте елементи наступної множини: А – множина непарних однозначних чисел; В - множина натуральних чисел, не менших за 5; С – множина двозначних чисел, що діляться на 10.

22. Вкажіть характеристичну властивість елементів множини:

а) {а, е, е, і, о, у, є, ю, я, и}; б) {23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15 };

в) {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}.

23. А - множина двозначних чисел, запис яких закінчується цифрою 1. Чи належать цій множині числа 28, 31, 321, 61?

24. Надана множина А = {5, 10, 15, 25}. Вкажіть дві підмножини, що рівні множині А.

25. Відомо, що елемент аміститься в множині А і в множині В. Чи випливає з цього, що: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A = B$?

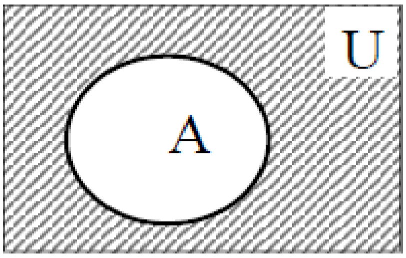
26. Відомо, що кожен елемент множини А міститься в множині В. Чи вірно, що: 1) $A \subset B$; 2) $A = B$?

27. З множини К = {216, 546, 153, 171, 234} випишіть числа, які: 1) діляться на 3; 2) діляться на 9; 3) не діляться на 4; 4) не діляться на 5. Чи є серед отриманих підмножин таке, яке дорівнює множині К?
28. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера-Венна відношення між множинами А і В, якщо: 1) А – множина парних чисел, В – множина чисел, що кратні 3; 2) А - множина квадратів, В- множина прямокутників; 3) А – множина квадратів, В – множина прямокутних трикутників; 4) А – множина квадратів, В – множина прямокутників з однаковими сторонами.
29. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера-Венна відношення між множинами А, В і С, якщо відомо, що: 1) $A \subset B$ і $B \subset A$; 2) $A \subset B$, С перетинається з В, але не перетинається з А; 3) А, В і С перетинаються, але жодна не є підмножиною іншої.

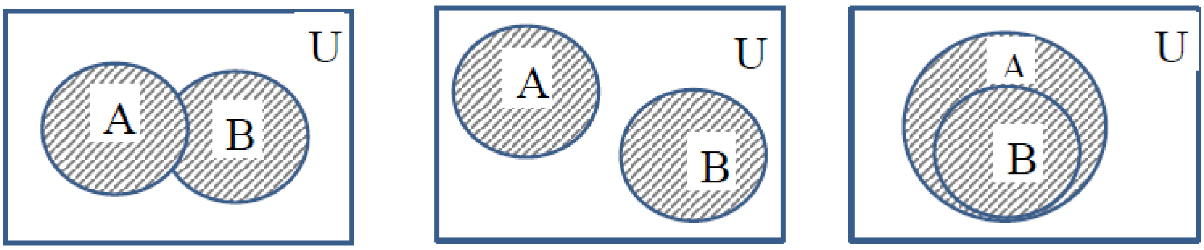
1.1.2. Операції над множинами

Операції над множинами дозволяють будувати нові множини, використовуючи вже існуючі.

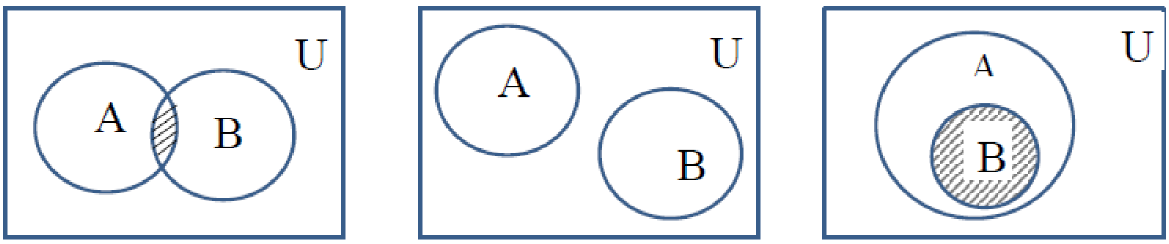
Доповненням до множини А, позначається (читається "не А" або "доповнення до А") є множина $\overline{A} = \{x | x \notin A, x \in U\}$.



Об'єднанням множин А та В називають множину С, яка складається з елементів А або В, а саме: $C = A \cup B = A + B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$.

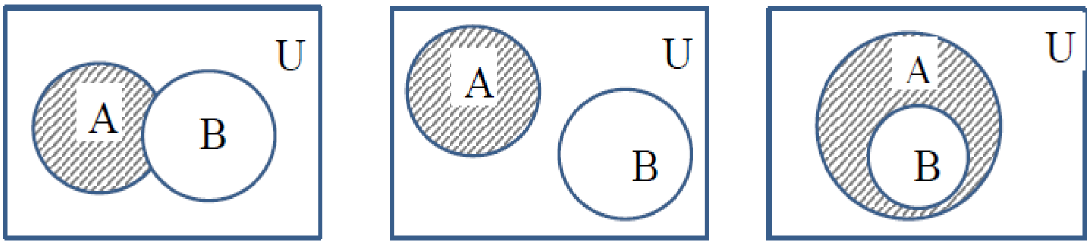


Перетином двох множин є третя множина $C = A \cap B$, яка складається з елементів як А так і В: $C = \{x \mid x \cap A$ та $x \cap B\}$.



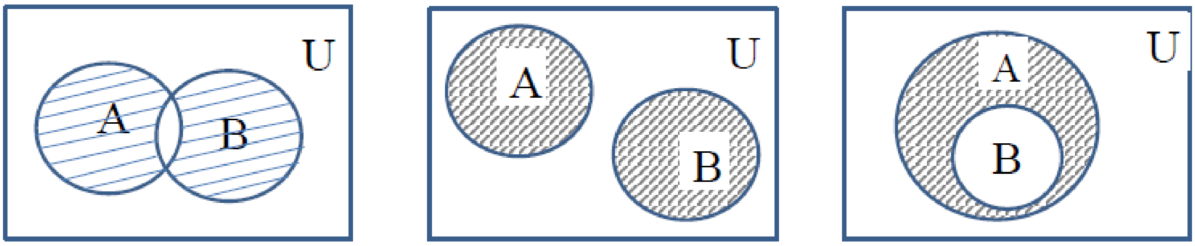
Різницею двох множин A та B позначається A\B або A-B називають множину C, яка складається з елементів A, що не належать

B:C =A\B $=\{x \mid x \in$ A та $x \notin$ B$\}$.



Симетричною різницеюмножин A та B називають множину:

A$\div$B = $\{x \mid x \in$ A та $x \notin$ B, або $x \in$ B та $x \notin$ A$\}$ або A$\div$B = ((A\B)$\cup$ (B\A)).



Приклад 1.14. $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$, $\{a, c\} \cup \emptyset = \{a, c\}$, $\{a, b, c\} \cup \{a, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$.

Приклад 1.15. $\{a, b, c\} \cap \{a, c, d, e\} = \{a, c\}$, $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$**.**

Кажуть, що A і B не перетинаються, якщо $A \cap B = \emptyset$.

Вправа 8.

1. Найстарший математик серед шахістів і найстарший шахіст серед математиків – це та сама людина чи (можливо) різні?

2. Найкращий математик серед шахістів і найкращий шахіст серед математиків – це та сама людина чи (можливо) різні?

Приклад 1.16. $\{b, c\} \backslash \{a, d, c\} = \{b\}$**,** $\{a, c, d, e\} \backslash \{a, b, c\} = \{d, e\}$, $\{a, b\} \backslash \emptyset = \{a, b\}$**,** $\{a, b\} \backslash \{a, b, c, d\} = \emptyset$**.**

Приклад 1.17. $\{a, b, c\} \oplus \{a, c, d, e\} = \{\boldsymbol{b}, d, e\}$**,** $\{a, b\} \oplus \{a, b\} = \emptyset$**,** $\{a, b\} \oplus \emptyset = \{a, b\}$**.**

Приклад 1.18. Якщо як універсальну множину взяти множину N всіх натуральних чисел, то доповненням P множини P всіх парних натуральних чисел буде множина всіх непарних натуральних чисел.

1.1.3. Діаграми Венна (Ейлера)

Діаграми Венна (Ейлера) – зручний інструмент, що дозволяє зображувати множини й ілюструвати операції над ними. Множини в діаграмах Венна зображують внутрішніми частинами кіл, їх перетинами, об’єднаннями і т. ін. На рис. 1. наведена діаграма Венна для множини *X*, яка зображена внутрішньою частиною кола. Зовнішня частина кола зображує $\overline{X}$.

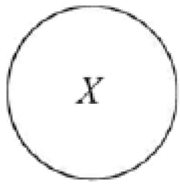


Рис. 1. Діаграма Венна для множини *X*

На рис. 2 наведена діаграма Венна для двох множин: *X* і *Y*. Кожна множина зображена колом, і кола перетинаються.

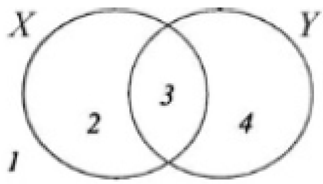


Рис. 2. Діаграма для множин *X* і *Y*

На рис. 2 бачимо 4 області: 1 – область універсальної множини, 2 – область, що належить тільки множині *X*, 3 – область, що належить спільно множинам *X* і *Y* 4 – область, що належить тільки множині *Y* .

На рис. 3 наведені ілюстрації операцій над множинами.

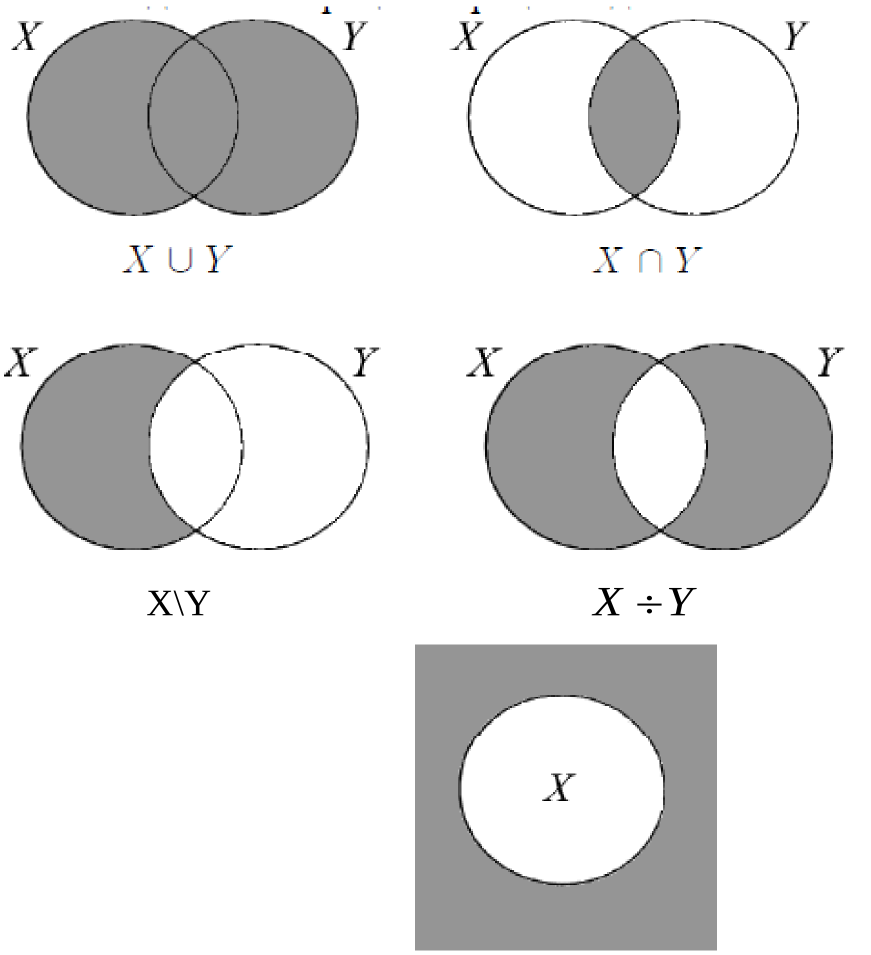


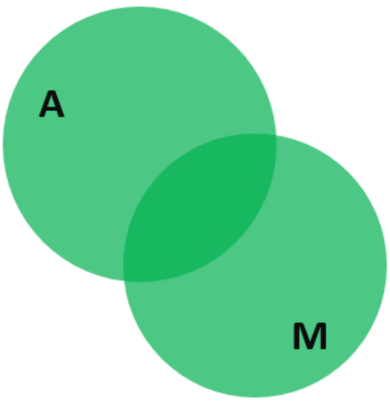
Рис. 3. Діаграми Венна операцій над множинами

При вирішенні багатьох задач, пов`язаних з множинами, незамінним виявляється прийом, що заснований на використанні так званих «діаграм Ейлера-Венна». Ці діаграми вперше з`явилися в роботах одного з величніших математиків в історії Леонарда Ейлера. Використання кіл Ейлера додає наочності при вирішенні складних задач, роблячи деякі речі буквально очевидними. Пропоную вам в цьому впевнитись самостійно на прикладі вирішення наступної задачі.

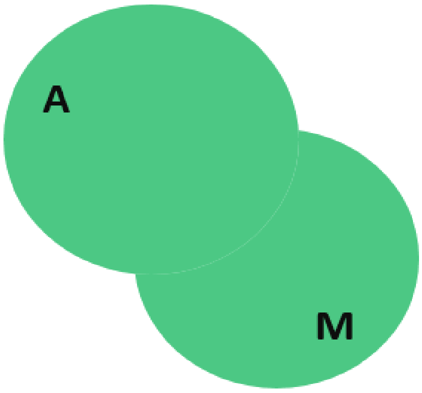
Приклад 1.19 58 людей щоденно дістаються до роботи міським транспортом: на автобусі, на трамваї або на метро. Кожен користується хоча б одним з видів транспорту. 42 людини з них користуються метро, 32 – трамваєм, 44 – автобусом. 21 людина з них користується метро і трамваєм, 31 – метро і автобусом, 22 – трамваєм і автобусом. Скільки серед них людей, які використовують всі три види транспорту, щоб дістатися до роботи

Тут треба розуміти, що якщо сказано, що «42 людини користуються метро», то це зовсім не означає, що окрім метро вони не користуються ніяким іншим видом транспорту. Хто-небудь з них може і користується. Може бути ще якийсь один вид транспорту, трамвай або автобус. А може одразу і обидва! Вирішення задачі як раз і складається з того, щоб порахувати людей, які користуються всіма трьома видами транспорту.

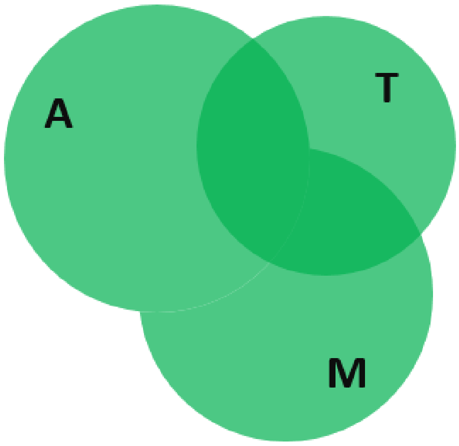
З першого погляду незрозуміло, з чого починати рішення. Але якщо подумати, стає ясно, що діяти треба за наступним алгоритмом. Будемо намагатися розписати всіх людей (58) через відомі з умови дані. Нам відомо, що автобусом користуються 44 людини. Додамо до цієї кількості людей, які користуються метро. Їх всього 42 людини. За допомогою діаграм Ейлера-Венна цю операцію можна зобразити наочно в наступному вигляді:



Тобто поки що ми маємо діло з виразом 58 = 44 + 42… Знак «…» означає, що вираз ще не закінчений. Проблема в тому, що ми порахували людей на перетині цих кіл двічі. Відповідна область на діаграмі виділена темно-зеленим кольором. Тому один раз їх треба відняти. Це люди, які користуються автобусом і метро. Їх, як відомо, 31. Тобто наш «незакінчений» вираз приймає вигляд: 58 = 44 + 42 — 31… І на діаграмі при цьому зникає темно-зелений колір:

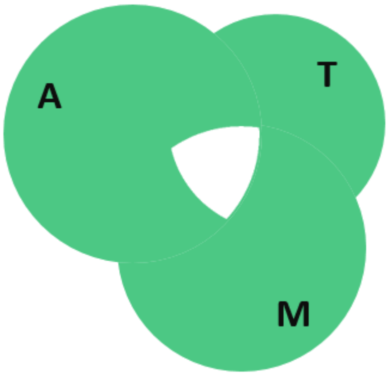


Поки все добре. Додаємо тепер людей, які їздять на трамваї. Таких людей 32. Вираз приймає вигляд: 58 = 44 + 42 — 31 + 32… Діаграма з колами Ейлера, в свою чергу, стає наступною:

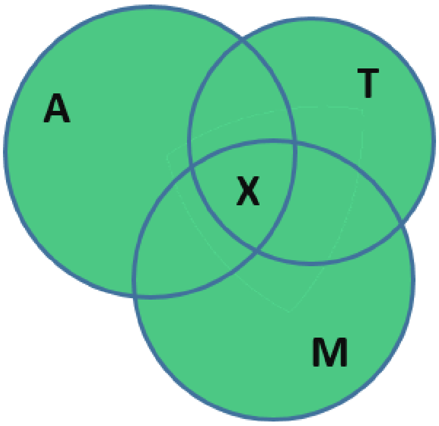


Проблема в тому, що знову ми схопили зайвого. Люди, яких ми знову порахували двічі, відмічені на діаграмі темно-зеленим кольором. Ця область знаходиться на перетині множин, які ми отримали на попередньому етапі, і множини людей, що користуються трамваєм.

Треба відняти людей, яких ми порахували двічі. Але як це зробити? Єдине, що ми можемо зробити, - це разом відняти людей, які користуються трамваєм і автобусом (їх 22 людини), а також трамваєм і метро (таких людей 21). Після цього наш незакінчений вираз для загальної кількості людей приймає вигляд: 58 = 44 + 42 — 31 + 32 — 22 — 21…, а діаграма з колами Ейлера виявиться з діркою в центрі, тому що центральну частину ми відняли двічі:



На щастя в незафарбованій області як раз і знаходяться ті люди, число яких нам потрібно порахувати. Дійсно, ці бідолахи користуються щоденно всіма трьома видами транспорту для того, щоб дістатися до роботи, бо вони знаходяться на перетині всіх трьох множин. Позначимо кількість цих бідолах за x. Тоді діаграма прийме наступний вигляд:

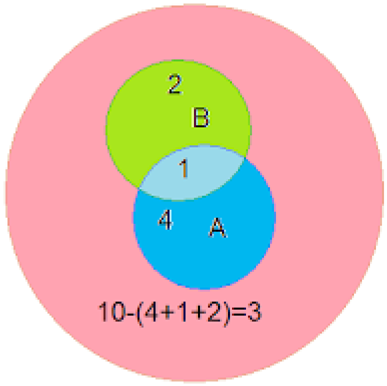


А рівняння стане наступним: 58=44+42-31+32-22-21+*x*

Розрахунки дають x=14. Це і є відповіддю задачі. Стільки людей користуються всіма трьома видами транспорту кожного дня, щоб дістатися до роботи.

Ось таке просте рішення. Фактично, в одне рівняння. Просто чудово, чи не правда?! А тепер уявіть, як прийшлося б вирішувати цю задачу без використання кіл Ейлера. Це був би жах. Так що в черговий раз пересвідчуємося, що будь-які методи візуалізації дуже корисні при вирішенні задач з математики. Використовуйте їх, це допоможе вам в вирішенні складних задач як на олімпіадах.

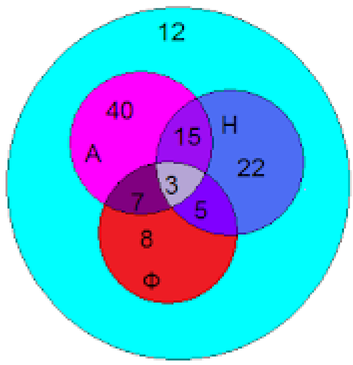
Приклад 1.20. Скільки натуральних чисел з першого десятку не діляться ані на 2, ані на 3?



Розв'язок. Для вирішення задачі зручно скористуватися колами Ейлера. В нашому випадку три кола: велике коло – це множина чисел від 1 до 10, всередині великого – два менших кола, що перетинаються один з іншим. Нехай множина чисел, що кратні 2– це множина А, а множина чисел, що кратні 3 – множина В. Розмірковуємо. На 2 ділиться кожне друге число. Значить, таких чисел буде 10:2=5. На 3 діляться 3 числа (10:3). На 2 і 3 діляться ті числа, що діляться на 6. Таке число тільки одне. Тому множина А складається з 5-1=4 чисел, множина В – 3-1=2 чисел. Звідси слідує, що в першому десятку міститься 10-(4+1+2) =3 числа.

Приклад 1.21. За допомогою кіл Ейлера можна відповісти на безліч питань, що поставлені до однієї умови задачі.

Розв'язок. Нехай коло А відображає всіх учнів, що говорять англійською, коло Н – що говорять німецькою мовою, коло Ф – що говорять французькою. Всього досліджуваних учнів – 112. Скільки учнів говорять: а) всіма трьома мовами? б) англійською і німецькою? в) французькою? Скільки всього учнів, що розмовляють іноземними мовами? Скільки з них не говорять французькою? Скільки з них не говорять німецькою? Скільки з них не говорять іноземними мовами?



Відповідь: а) На всіх трьох мовах говорять 3 учні; б) Англійською і німецькою – 15 учнів; в) тільки французькою – 8 учнів. Всього 100 (40+7+3+15+5+22+8) дітей, що розмовляють іноземними мовами. Французькою не говорять 89 учнів (112-(8+5+7+3).

1.1.4. Тотожності алгебри множин

Тотожності алгебри множин, сформульовані в наведених нижче теоремах, можуть бути перевірені шляхом формальних доведень або на діаграмах Венна.

Основні тотожності алгебри множин

1. $A \cup A = A$ 1′. $A \cap A = A$

ідемпотентність

2. $A \cup B = B \cup A$ 2′. $A \cap B = B \cap A$

комутативність

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 3′. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Асоціативність

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 4′ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

дистрибутивність

5. $A \cup \emptyset = A$ 5′. $A \cap \emptyset = \emptyset$

6. $A \cup \bar{A} = U$ 6′. $A \cap \bar{A} = \emptyset$

7. $A \cup U = U$ 7′. $A \cap U = A$

8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 8′. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

закони де Моргана

9. $A \cup (A \cap B) = A$ 9′. $A \cap (A \cup B) = A$

закони Порецького

10. $A \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = A \cup B$ 10′. $A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = A \cap B$

закони поглинання

11. $\overline{U} = \emptyset$ 11′. $\overline{\emptyset} = U$

12. $A \backslash \emptyset = A$

13. $A \backslash A = \emptyset$

14. $U \backslash A = \overline{A}$

15. $A \backslash U = \emptyset$

16. $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

17. $A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Наведу також інші корисні теоретико-множинні тотожності:

$A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$,

$A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $\overline{U} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \boldsymbol{U}$.

Окремо запишемо властивості операції симетричної різниці:

$A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$;

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ - асоціативність;
$A \oplus B = B \oplus A$ - комутативність;
$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ - дистрибутивність перетину;
$A \oplus A = \emptyset$; $A \oplus U = \overline{A}$; $A \oplus \emptyset = A$.

У справедливості перерахованих властивостей можна переконатися у різний спосіб. Наприклад, намалювати діаграми Ейлера для лівої й правої частин тотожностей й переконатися, що вони збігаються, або ж провести формальне міркування для кожної тотожності. Розглянемо, наприклад, першу тотожність: $A \cup A = A$. Візьмемо довільний елемент x, що належить до лівої частини тотожності, $x \in A \cup A$. За визначенням операції об’єднання маємо: $x \in A$або $x \in A$. У кожному разі $x \in A$. Візьмемо знову довільний елемент з множинив лівій частині тотожності. Виявляється, що він належить множині в правійчастині. Звідси за визначенням включення множин одержуємо, що $A \cup A \subseteq A$.

Нехай тепер $x \in A$. Тоді, очевидно, вірно, що $x \in A$ або $x \in A$. Звідси завизначенням операції об’єднання маємо $x \subseteq A \cup A$. Таким чином, $A \subseteq A \cup A$.

Отже, за визначенням тотожності множин: $A \cup A = A$. Аналогічні міркування неважко провести й для інших тотожностей. Для доведення можна використовувати тотожності алгебри логіки.

Доведемо в такий спосіб властивість дистрибутивності множин.

Теорема 1.1. Для множин A і B справджується тотожність:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Доведення. При доведенні скористаємося операціями алгебри логіки, оскільки для доведення співвідношень на множинах необхідно довести, що ці співвідношення справедливі для всіх його елементів.

$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow (x \in A)$ і $(x \in (B \cup C)) \leftrightarrow$ Визначення перетину
$\leftrightarrow (x \in A)$ і $(x \in ((x \in B)$ або $(x \in C))) \leftrightarrow$ Визначення об’єднання
$\leftrightarrow ((x \in A)$ і $(x \in B))$ або $((x \in A)$ і $(x \in C)) \leftrightarrow$ Закон логіки де Моргана
$\leftrightarrow (x \in (A \cap B))$ або $(x \in (A \cap C)) \leftrightarrow$ Визначення перетину
$\leftrightarrow x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ Визначення об’єднання

Для доведення також використовують діаграми Венна (Ейлера). Доведення властивості асоціативності за допомогою діаграм Венна показано на рис. 4.

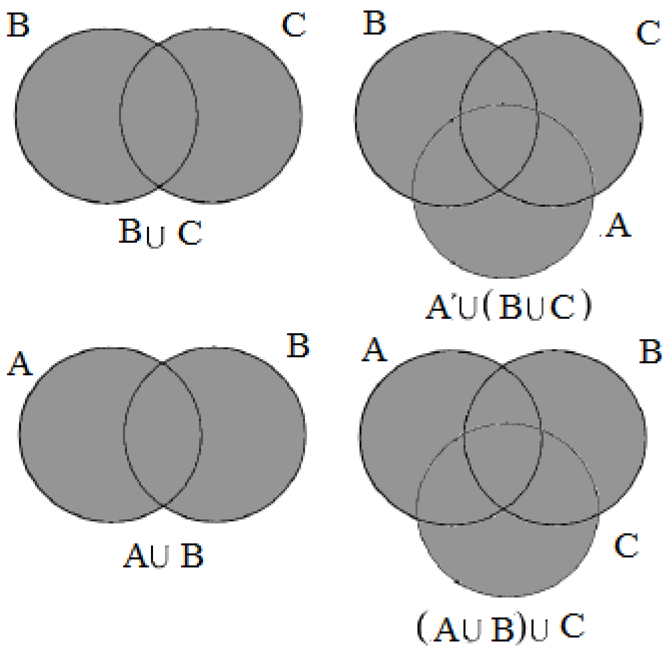


Рис. 4. Графічне доведення властивості асоціативності

Будуємо ($B\cup C$) й потім $A\cup (B\cup C)$

Будуємо ($A\cup B$) й потім $(A\cup B)\cup C$

Для доведення тотожностей алгебри множин можна використовувати інші тотожності алгебри множин.

Теорема 1.2. Для множин Aі Bсправедлива тотожність (закон склеювання)

$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = A$$

Доведення. Доведемо цю тотожність двома способами: аналітично (використовуючи алгебру множин) і конструктивно (використовуючи діаграми Ейлера-Венна).

$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ = початковий вираз

$= (A\cup(A\cap\overline{B}))\cap(B\cup(A\cap\overline{B}))$ = застосували закон дистрибутивності відносно $(X\cap\overline{Y})$

$= (A\cup(A\cap\overline{B}))\cap(B\cup A)$ = застосували закон Порецького

$= A\cap(B\cup A)$ = застосували закон склеювання для об’єднання

$= A$ застосували закон склеювання для перетину

На рис. 5 показано діаграми Ейлера-Венна для доведення закону склеювання.

$A\cap B$ $\qquad$ $A\cap\overline{B}$ $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = A$

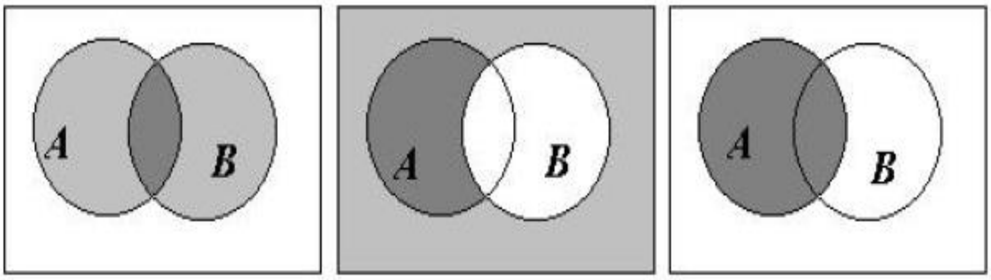


Рис. 5. Графічне доведення закону склеювання

Приклад 1.22. Доведемо тотожність: $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\setminus C$

Доведення.

1 *спосіб*

1) Доведемо, що $A\setminus(B\cup C) \subseteq (A\setminus B)\setminus C$. Розглянемо довільний елемент множини $A\setminus(B\cup C)$: $x\in A\setminus(B\cup C) \Rightarrow x\in A$ і $x\notin B\cup C \Rightarrow x\in A$ і $x\notin B$ і $x\notin C \Rightarrow x\in A\setminus B$ й $X\notin C \Rightarrow x\in(A\setminus B)\setminus C$.

2) Доведемо, що $(A\setminus B)\setminus C \subseteq A\setminus(B\cup C)$. Нехай $x\in(A\setminus B)\setminus C$:

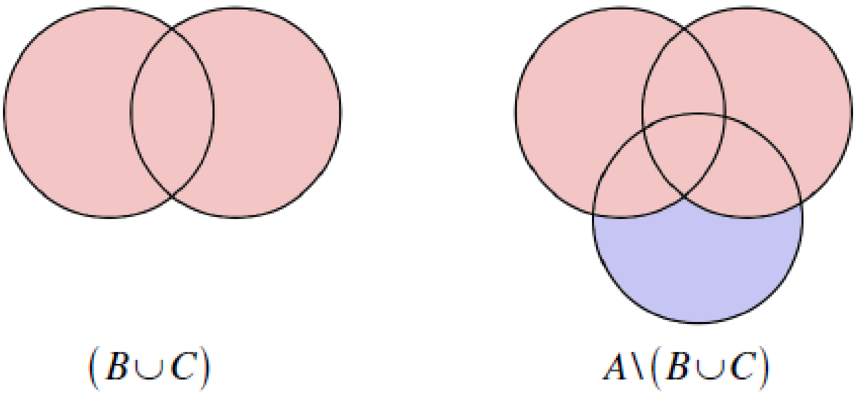
$X\in(A\setminus B)\setminus C \Rightarrow x\in A\setminus B$ і $x\notin C \Rightarrow x\in A$ і $x\notin B$ і $x\notin C \Rightarrow x\in A$ й $x\notin B\cup C \Rightarrow x\in A\setminus(B\cup C)$.

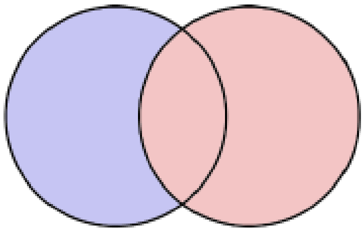
2 *спосіб*

Перетворимо ліву частину тотожності на праву за допомогою властивостей операцій над множинами:

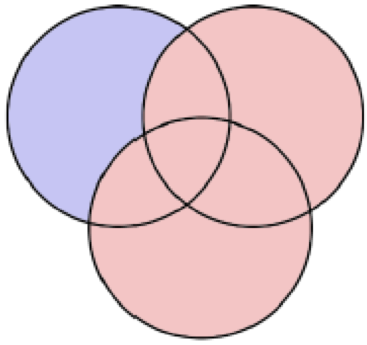
$A\setminus(B\cup C) = A\cap(\overline{B\cup C}) = A\cap(\overline{B}\cap\overline{C}) = (A\cap\overline{B})\cap\overline{C} = (A\setminus B)\cap\overline{C} =$
$=(A\setminus B)\setminus C$

На рис. 6 зображені обидві частини тотожності за допомогою діаграм Ейлера-Венна:





$(A\setminus B)$



$(A\setminus B)\setminus C$

Рис. 6. Графічне доведення тотожності $A\setminus (B\cup C) = (A\setminus B)\setminus C$

Обов`язкові завдання

1. Нехай $A = \{1,3,5,6\}, B = \{1,2,3,5,7\}, C = \{2,4,7\}$. Обчислити
(а) $A \cup B$; (б) $(A \cup C)\setminus B$; (в) $A \cap B \cap C$; (г) $(A\setminus C) \cup (B\setminus A)$;
(д) $A \oplus B$; (е) $(B\setminus C) \cap (A\setminus B)$.

2. За допомогою діаграм Ейлера-Венна перевірити такі теоретико-множинні рівності:
(а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; (б) $(A \cap B) \cup A = (A \cup B) \cap A = A$;
(в) $A\setminus(B \cup C) = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$; (г) $(A \cup B)\setminus C = (A\setminus C) \cup (B\setminus C)$;
(д) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$; (е) $A \oplus B = (A \cup B)\setminus(A \cap B)$.

3.Що можна сказати про множини А та В, якщо
(а) $A \cup B = A \cap B$; (б) $A\setminus B = B\setminus A$; (в) $A \subseteq \overline{B}$ та $\overline{A} \subseteq B$; (г) $A \cup B = \emptyset$;
(д) $A\setminus B = A$; (е) $A\setminus B = \emptyset$; (є) $A\setminus B = B$; (ж) $(A\setminus B) \cup (B\setminus A) = A \cup B$.

4. Що можна сказати про множини А та В, якщо
(а) $A \oplus B = A$; (в) $A \oplus B = \emptyset$; (д) $(A\setminus B) \oplus (B\setminus A) = \emptyset$;
(б) $A \oplus B = \overline{A}$; (г) $A \oplus B = U$; (е) $(A \cup B) \oplus A = B$

5. Шестикласники заповнювали анкету з питаннями про їхні улюблені мультфільми. Виявилося, що більшості з них подобається «Білосніжка і семеро гномів», «Губка Боб Квадратні Штані» і «Вовк і теля». В класі 38 учнів. «Білосніжка і семеро гномів» подобається 21 учню. Причому трьом з них подобається ще і «Вовк і теля», шістьом - «Губка Боб Квадратні Штані», а одна дитина однаково любить всі три мультфільми. У «Вовка і теля» 13 фанатів, п`ятеро з яких назвали в анкеті два мультфільми. Треба визначити, скільком шестикласникам подобається «Губка Боб Квадратні Штані».

1.1.5. Розбиття множин

Множина X може бути розбита на класи множин X_j, які не перетинаються, якщо:
- об'єднання всіх підмножин X_j збігається з множиною X: $X = \bigcup_{j \in J} X_j$:
- перетин двох різних підмножин порожній, тобто для будь-яких двох $i \in J$ і $j \in J$ при $i \neq j$ виконується умова: $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Приклад 1.23. Розбиття множини на підмножини.

1. Довільна множина X може бути розбита на дві підмножини, які доповнюють одна одну X_1 і $X_2 = X \setminus X_1$. Для цих підмножин справедливі співвідношення: $X_1 \cup X_2 = X$ і $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Приклад 1.24. Множину двозначних чисел $X = \{10,11,12,\dots,98,99\}$ можна розбити на класи за ознакою остачі від ділення на 4:
клас, породжений остачею 0 – $X_0 = \{12,16,20,\dots,96\}$;
клас, породжений остачею 1 – $X_1 = \{13,17,21,\dots,97\}$;
клас, породжений остачею 2 – $X_2 = \{14,18,22,\dots,98\}$;
клас, породжений остачею 3 – $X_3 = \{15,19,23,\dots,99\}$.

1.1.6. Покриття множин

Покриттям множини X називають сімейство множин $C = \{Y_j\}, j \in J$ таких, що їх об'єднання містить множину X: $X \subset \bigcup_{j \in J} Y_j$.

Якщо C – покриття множини X, то будь-яку множину $D \subset C$, що також є покриттям множини X, називають **під покриттям** множини C.

Приклад 1.25. Нехай $X = \{i | i = 2n + 1, n = 1,2,3, \dots\}$. Побудувати покриття множини X

Розв'язок. $J = \{1,2\}$, $C = \{Y_1, Y_2\}$, $Y_1 = \{-k | k = 1,2, \dots\}$, $Y_2 = \{k | k = 1,2, \dots\}$. Тоді $X \subset Y_1 \cup Y_2$, а, отже, сімейство множин C є покриттям множини X.

1.1.7. Упорядкований набір або кортеж

Нехай задана деяка множина X. Візьмемо множину натуральних чисел $N_n = \{1,2,\dots,n\}$ і задамо деякі відображення множини N_n у множину X (числу 1 ставиться у відповідність елемент $x_1 \in X$, числу 2 – елемент $x_2 \in X$, …, числу n – елемент $x_n \in X$).

Отримуємо набір $x_1, x_2, \dots, x_n$ елементів множини X, в якому деякі елементи можуть повторюватись декілька разів (при відображенні N_n у X може трапитись, що різним числам відповідає один і той же елемент множини X). Розташовуючи елементи цього набору за порядком номерів, отримуємо **кортеж**

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ довжини n, який складено з елементів множини X. Елемент x_k, $1 \le k \le n$, називається ***k*-тою компонентою** або ***k*-тою координатою кортежу** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Два кортежі $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ вважаються **рівними**, якщо вони мають однакову довжину і їх компоненти з однаковими номерами рівні.

Будемо позначати кортежі грецькими літерами. Компонентами кортежу можуть бути множини, кортежі і т.д.

Приклад 1.26.

1) Кортежі α= $(3^2, 4^2, 5^2)$ і β= $(\sqrt{81}, \sqrt{256}, \sqrt{625})$ рівні, α = β.

2) Кортежі (a, b, c) і (b, a, c, a) не рівні, так як мають різну довжину.

3) Кортежі (1,2,3) і (2,1,3) мають однакову довжину і складаються з однакових елементів, але вони не рівні, так як порядок їх компонент не співпадає.

4) Кортежі α= $(\{a, b\}, c, d)$ і β= $(\{b, a\}, c, d)$ рівні, так як множини $\{a, b\}$ і $\{b, a\}$ рівні (для множин порядок елементів не грає ролі).

5) Кортежі α= $((a, b), c, d)$ і β= $((b, a), c, d)$ різні, так як різні кортежі (a, b) і (b, a).

1.1.8. Декартовий добуток множин

Узагальнимо поняття кортежу і будемо розглядати такі кортежі, у яких компоненти належать різним множинам.

Декартовим добутком множин А і В (позначається $A \times B$) називається множина всіх пар *(a, b)*, у яких перша компонента належить множині А ($a \in A$), а друга – множині В ($b \in B$), тобто $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Декартів добуток можна природно узагальнити для довільної скінченної сукупності множин. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$ - множини, то їх декартовим добутком називається множина $D = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$, яка складається з усіх наборів $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, у кожному з яких і-й член, що називається ***і-тою координатою*** , або ***і-тою компонентою*** набору, належить множині $A_i, i = 1,2, \dots, n$. Декартів добуток позначають $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Щоб відрізняти набір $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ від множини, що складається з елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$, його записують не у фігурних, а в круглих дужках і називають ***кортежем***, ***вектором*** або ***впорядкованим набором***.

Знайдемо число елементів декартового добутку $A \times B$ у випадку, коли $|A|=k$, а $|B|=m$: $A=\{(a_1, \dots, a_k)\}$, $B=\{(b_1, \dots, b_m)\}$.

Декартовий добуток $A \times B$ складається з кортежів (a_i, b_j), які можна розташувати наступним чином:

$$(a_1, b_1) , (a_1, b_2) , \dots , (a_1 . b_m);$$
$$(a_2, b_1) , (a_2, b_2) , \dots , (a_2, b_m);$$

…………………………………..

$$(a_k, b_1)\ , (a_k, b_2)\ , \dots , (a_k, b_m).$$

Ми отримаємо k рядків з m пар в кожному. Звідси випливає, що загальна кількість кортежів, що містяться в множині $A\times B$, дорівнює $k\times m$, тобто $n(A)\times n(B)$. Має місце формула: $n(A\times B) = n(A)\times n(B)$ - **правило добутку.**

Довжиною кортежу називають кількість його координат.

Два кортежі $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \dots, b_n)$однакової довжини вважають ***рівними*** тоді і тільки тоді, коли рівні відповідні їх координати, тобто $a_i = b_i, i = 1,2, \dots, n$. Отже, кортежі (a, b, c) і (a, c, b) різні, а множини $\{a, b, c\}$ i $\{a, c, b\}$ - рівні між собою.

Декартів добуток множини А на себе n разів, тобто множину $A\times A\times\ldots\times A$ називають ***n-м декартовим (прямим) степенем*** множини А та позначають A^n. Вважають, що $A^0 = \emptyset (n = 0)$ й $A^1 = A (n = 1)$.

Прийнято вважати, що якщо хоча б одна з множин A, Bпорожня, то їх декартовий добуток порожній: $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$

Якщо $A=B$, то декартовий добуток $A\times B$називається **декартовим квадратом множини** Aі позначається: $A\times B = A^2 = \{(a,b) \mid a\in A, b\in A\}$

В якості універсальної множини для множини $A\times B$є множина:

1) $U\times U$, якщо$A\in U$ i $B\in U$;

2) $U_1\times U_2$, якщо $A\in U_1$ і $B\in U_2$.

Приклад 1.27. Побудувати $C = A\times B$, якщо $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1,2\}$.

Розв'язок. $C = \{(x, 1). (x, 2)(y, 1). (y, 2), (z, 1), (z, 2)\}$.

1.1.9. Графічна інтерпретація декартового добутку

Існує графічна інтерпретація прямого добутку множин. Нехай множина $A = \{x | a \le x \le b\}$ – це інтервал значень змінної x і $B = \{y | c \le y \le d\}$– це інтервал значень змінної y. Ясно, що множини A і B мають нескінченне число елементів. Тоді прямий декартовий добуток $A\times B$– це множина точок прямокутника, зображеного на рис. 1.8.

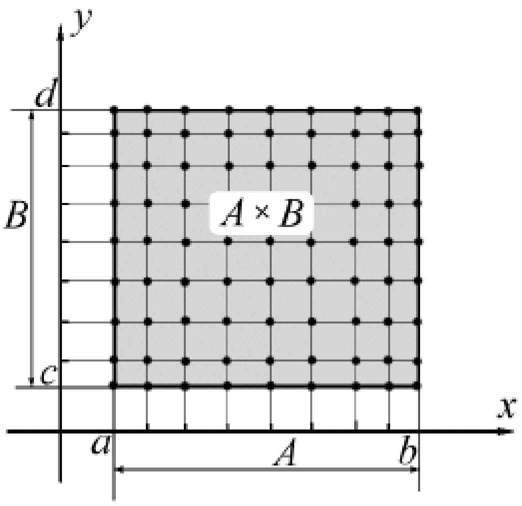


Рис. 7. Геометричне місце точок, що входять до декартового добутку множин A і B

Отже, $C = A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$.

Приклад 1.28. Якщо $A = \{a, b\}$ та $B = \{b, c, d\}$, то $A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\}$;
$A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Якщо R – множина дійсних чисел, або множина точок координатної прямої, то R^2- це множина пар *(a, b)*, де $a, b \in R$, або множина точок координатної площини.

Операція декартового добутку неасоціативна і не комутативна, тобто множини $(A \times B) \times C, A \times (B \times C)$, а також множини $A \times B$ та $B \times A$, узагалі кажучи, різні.

Зв`язок декартового добутку з іншими теоретико-множинними операціями виражають такі тотожності:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$$
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$
$$\left(\overline{A \times B}\right) = \left(\overline{A} \times \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \times B\right) \cup \left(A \times \overline{B}\right).$$

Для підмножин будуть вірні твердження:

Якщо $A \subseteq B$, то $A \times C \subseteq B \times C$,
Якщо $A, B \neq 0$, то $A \times B \subseteq C \times D \Leftrightarrow A \subseteq C$ і $B \subseteq D$

Зворотний декартовий добуток

Нехай $C = A \times B$– прямий декартовий добуток множин.
Тоді $C^{-1} = B \times A$ буде називатися **зворотним** декартовим добутком до прямого добутку.

Приклад 1.29. Побудувати прямий та зворотний декартові добутки для множин A= {1, 2, 3} і B= {x, y, z}.

Розв'язок.

$C = A\times B=\{(1, x),(1, y),(1, z),(2, x),(2, y),(2, z),(3, x),(3, y),(3, z)\}$

$C^{-1} = B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3), (z, 1), (z, 2), (z, 3)\}$.

1.1.10 Проєктування

Проекцією на і-ту вісь (і-тою проекцію) кортежу $w = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ називається і-та координата a_iкортежу w_δ позначається $Pr_i\, w$.

Прекцією кортежу $w = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на осі з номерами $i_1, i_2, \dots, i_n$називається кортеж $\left(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\right)$; позначається $Pr_{i_1, i_2, \dots, i_n}\, w$.

Нехай V – множина кортежів однакової довжини. Проекцією множини V на і-ту вісь (позначається $\Pr_i V$) називається множина проекцій на і-ту вісь усіх кортежів множини V: $Pr_i\, V = \{Pr_i\, v\, |v \in V\}$.

Операція проєктування може застосовуватися тільки до тих множин, які містять кортежі однакової довжини.

Приклад 1.30.$Pr_{i_1, i_2, \dots, i_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_n}$. Якщо $V = \{(a, b, c), (a, c, d), (a, b, d)\}$, то $Pr_1\, V = \{(a)\}$, $Pr_2\, V = \{(b, c)\}$, $Pr_3\, V = \{(c, d)\}$, $Pr_{1,3}\, V = \{(a, c), (a, d)\}$, $Pr_{2,3}\, V = \{(b, c), (c, d), (b, d)\}$.

<u>Обов`язкові завдання</u>

1. Довести тотожності$(A \cap B) \cup A = (A \cup B) \cap A = A$.
2. Для заданих множин $A = \{1,2\}, B = \{2,3,4\}$ визначити
   (а) $A \times B$; (в) B^2; (д)$A \times B \times A$;
   (б) $B \times A$; (г) $(B \backslash A) \times A$; (е) $A \times (A \cup B)$.
3. Довести $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.
4. Довести, що коли $B = \emptyset$, то $Pr_1(A \times B) = A$.

1.2. Відповідності та відношення

1.2.1. Відповідність. Основні поняття

Розглянемо множини A і B. Елементи цих множин можуть зіставлятися один з одним яким-небудь чином, утворюючи впорядковані пари *(a, b).* Якщо спосіб такого зіставлення визначений, тобто для кожного елемента $a \in A$вказано елемент $b \in B$, з яким зіставляється елемент a, то говорять, що між множинами A і B встановлена відповідність.

Для того, щоб задати відповідність, необхідно вказати:

1) Множину A, елементи якої зіставляють з елементами іншої множини;

2) Множину B, елементи якої ставлять у відповідність елементам першої множини;

3) Множину $Q \subseteq A \times B$, що визначає закон (правило), за яким здійснюють відповідність, тобто таке правило, що перераховує всі пари *(a, b)*, які беруть участь у зіставленні.

Таким чином, відповідність (позначимо її через q) є трійкою множин

$$q = \langle A, B, Q \rangle$$

де – $Q \subseteq A \times B$підмножина декартового добутку множин A і B, яку ще називають графіком відповідності; A – множина відправлення відповідності; B – множина прибуття відповідності.

Крім того, з кожною відповідністю зв'язані нерозривно ще дві множини:

1. множина $Pr_a\, Q$, яку називають **областю визначення** відповідності. В цю множину входять елементи множини, що беруть участь у зіставленні;

2. множина $Pr_b\, Q$, яку називають **областю значень** відповідності. В цю множину входять елементи множини, що беруть участь у зіставленні.

Якщо $(a, b) \in Q$**,** то говорять, що елемент b відповідає елементу a.

Геометрично це зображають у вигляді стрілки, спрямованої від до. На рис. 8 показано дві множини A і B з установленими відповідностями між їх елементами. При цьому графік відповідності має вигляд:

$$Q = \{(a_1, b_6), (a_2, b_7), (a_3, b_1), (a_4, b_2), (a_5, b_3), (a_6, b_4), (a_7, b_5)\}$$

Для кожної відповідності $q = \langle A, B, Q \rangle$, існує зворотна відповідність, яка утворюється у випадку, коли дану відповідність розглядають у зворотному напрямку, тобто визначають елементи $a \in A$, з якими зіставляються елементи $b \in B$.

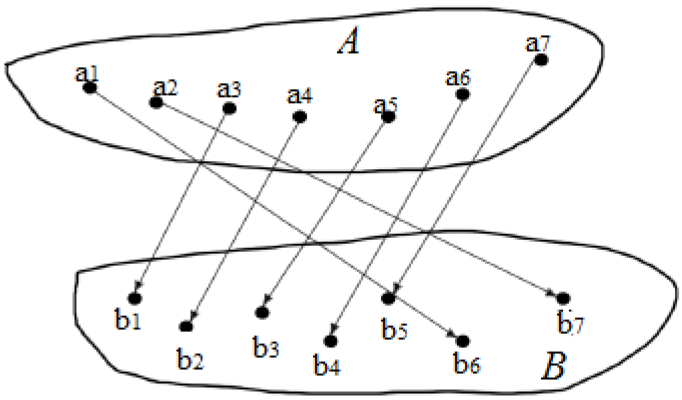


Рис. 8. Графічне представлення відповідності множин A і B

Зворотна відповідність позначається: $q^{-1} = \langle A, B, Q^{-1} \rangle$, де $Q^{-1} = B \times A$. Геометрично зворотну відповідність можна одержати шляхом зміни напрямку стрілок прямої відповідності.

1.2.2. Типи відповідностей

Відповідності можуть бути різних типів: одно-однозначні, одно-багатозначні, багато-однозначні, багато-багатозначні.

Одно-однозначна (або взаємно-однозначна) відповідність

Одно-однозначна (або **взаємно-однозначна)** відповідність – це така попарна відповідність між елементами двох множин A і B, коли один елемент з A зіставлене з єдиним елементом з B і навпаки.

Приклад 1.31. Нехай існує множина натуральних чисел N і множина квадратів натуральних чисел P. Побудувати одно-однозначну відповідність.

Розв'язок. Кожному натуральному числу можна поставити у відповідність його квадрат і навпаки – кожному квадрату цілого числа відповідає саме натуральне число.

Тому між множинами N й P існує взаємно-однозначна відповідність, як показано на рис. 9.

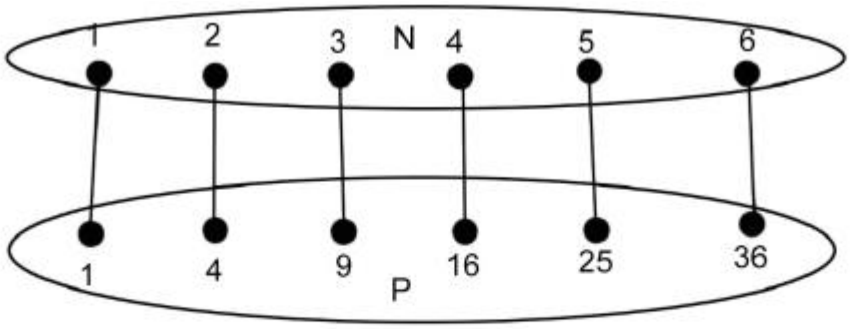


Рис. 9. Графічне представлення відповідності елементів множини натуральних чисел N та множини квадратів цих чисел P

Одно-багатозначна відповідність

Одно-багатозначна відповідність – це така відповідність між елементами двох множин A і B, коли з одним елементом першої множини A зіставлено більше одного елемента другої множини B, але кожний елемент другої множини відповідає тільки одному елементу першої множини.

Приклад 1.32. Нехай існує множина квадратних коренів $G = \{1,2,3,4,5\}$ і множина цілих чисел $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16, \ldots ,25\}$.

Побудувати відповідність між елементами цих множин.

Розв'язок. Кожному елементу множини G однозначно відповідає один елемент множини N. Зворотна відповідність може бути багатозначною за умови, що ми будемо виділяти цілу частине від взяття квадратного кореня для кожного елемента множини N, як показано на рис. 10.

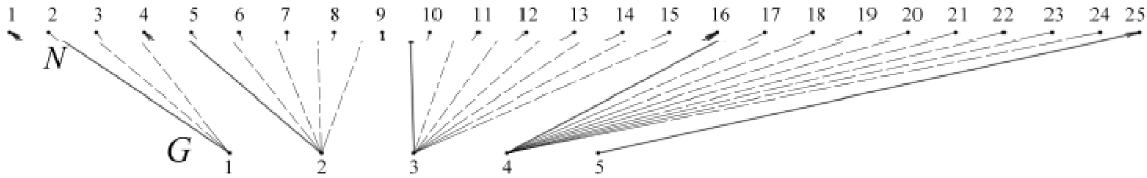


Рис. 10. Графічне представлення одно-багатозначної відповідності між елементами множини N та G

Багато-однозначна відповідність

Багато-однозначна відповідність – це така відповідність між елементами двох множин A і B, коли з елементом першої множини зіставлено тільки один елемент другої множини, але кожний елемент другої множини відповідає більше ніж одному елементу першої множини.

Приклад 1.33. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – це припустима множина оцінок, а $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 25\}$ – множина студентів у групі. Побудувати відповідність між елементами цих множин.

Розв'язок. Кожний студент під час здачі іспиту може одержати тільки одну оцінку. У той же час, та сама оцінка може бути поставлена деякій підмножині студентів. Тому між цими множинами можна побудувати багато-однозначну відповідність, як показано на рис. 11.

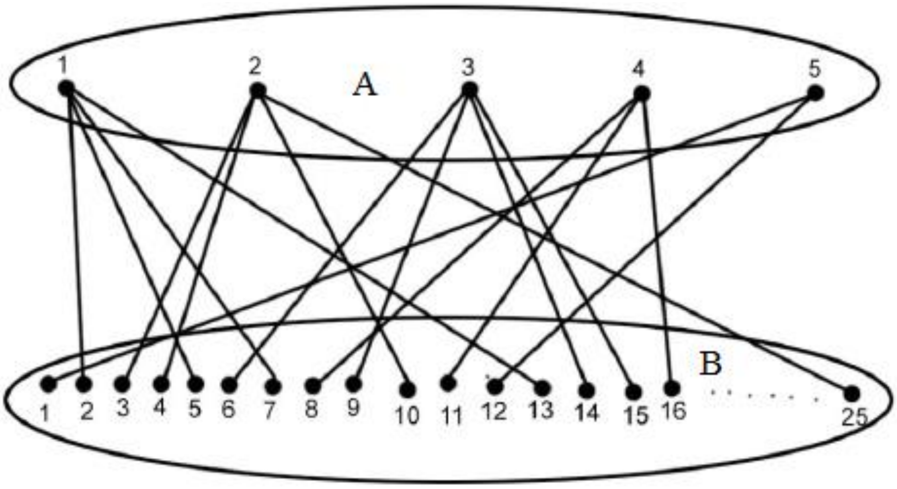


Рис. 11. Графічне представлення багато-однозначної відповідності між елементами множини A та B

Багато-багатозначна відповідність

Багато-багатозначна відповідність – це така відповідність між елементами двох множин A і B, коли з одним елементом першої множини зіставлено більш ніж один елемент другої множини і навпаки.

Приклад 1.34. Нехай A – множина театральних постановок, а B – множина глядачів. Кожний глядач може подивитися деяку підмножину театральних постановок. У той же час, кожну з театральних постановок відвідує деяка підмножина глядачів. Графічне представлення такої відповідності показане нарис. 12.

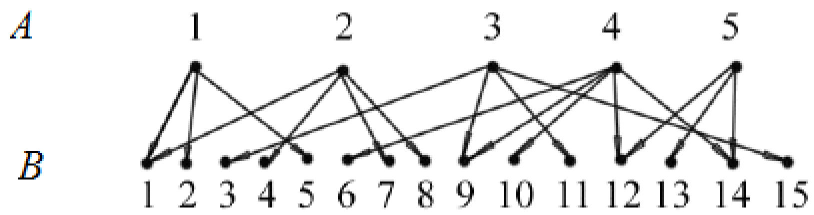


Рис. 12. Графічне представлення багато-багатозначної відповідності між елементами множини A та B

1.2.3. Поняття відношення

Фундаментальним поняттям дискретної математики є поняття «***відношення***», яке використовують для позначення зв`язку між об’єктами або поняттями.

Наприклад, властивість елементу а належати $(a \in A)$ множині А. На множині людей можна задати родинні відношення, наприклад «x сестра y». Причому, якщо взяти конкретних людей і підставляти їх імена замість x і y, то отримаємо або справедливе відношення, або хибне.

Нехай задано декартовий добуток непорожніх множин $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Підмножина $\rho \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, називається n-місним відношенням на множині $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$або кортежем. Інакше кажучи, $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$перебувають у відношенні ρ, якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \rho$.

При n=1, відношення ρявляються підмножинами множини A, їх називають ***одномісними*** або ***унарними***. Властивості унарного відношення ρ- це властивості самої підмножини A, тому термін відношення при n=1 вживається рідко. Якщо n=2, то відношення називають ***бінарним***. Бінарні відношення називаються основними і використовуються найчастіше.

Бінарні відношення. Відношення між парами об`єктів називають двомісними або ***бінарними***. Наприклад «x дільник y», «x студент групи y».

Бінарним відношенням між елементами множин $a \in A$та $b \in B$називають підмножину ρ множини $A \times B (\rho \subset A \times B)$. Позначають: $a\rho b$ або $(a, b) \in \rho$. Читається «а находиться у відношенні з в».

Областю визначення відношення ρ (позначається D_ρ) називають множину перших координат(а) елементів із ρ, ***областю значень*** (позначаються μ_ρ) називають множину других координат (в) елементів з ρ.

Доповненням бінарного відношення R між елементами Aта B вважається множина $-R=\overline{R}=(A\times B)\setminus R$.

Оберненим відношенням для бінарного відношення R називається множина $R^{-1} = \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$.

Образом множини Aвідносно R називають множину $R^{-1}(A)$.

Добутком (композицією) відношень $R_1 \subseteq A \times B$ та $R_2 \subseteq B \times C$ називається відношення $R_1 \circ R_2 = \{(a, b)|$існує c, таке, що $(a, c) \in R_1$ та $(c, b) \in R_2\}$.

Приклад 1.35. $P = \{(a,b),(a,c),(b,a),(c,d)\}$,

$Q = \{(a,b),(b,c),(c,a),(c,d)\}$**,** то

$$P \circ Q = \{(a,c),(a,a),(a,d),(b,b)\}$$

$$Q \circ P = \{(a,a),(b,d),(c,b),(c,c)\}$$

Приклад 1.36. Розглянемо відношення ρна множинах $A=\{1,7,8,9\}$ та $B = \{5,6,10\}$, ρ - відношення «а більше за в $(a>b)$. Тоді $\rho = \{(7,5),(7,6),(8,5),(8,6),(9,5),(9,6)\}$. $D_\rho = \{7,8,9\}$. $\mu_\rho = \{5,6\}$

Властивості обернених відношень:

1) $(R^{-1})^{-1} = R$
2) якщо $R \subset S$, то $R^{-1} \subset S^{-1}$
3) $\overline{R}^{-1} = \overline{R^{-1}}$
4) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
5) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

1.2.4. Способи задавання бінарних відношень

Оскільки бінарні відношення є множинами, то для їх задавання можна використовувати ті самі способи, що і для множин. Крім того, якщо бінарні відношеннязадані наскінченних множинах, то їх можна задавати за допомогою ***матриць відношень*** **та** ***графів***(діаграм) відношень.

1)**Задавання відношення перліком**

Бінарне відношення можна задати, перераховуючи всі пари, які в нього входять (якщо відношення складається зі скінченної кількості пар) або вказавши загальну властивість пар, що належать цьому відношенню,
тобто предикатом (згадайте способи задавання множин).

Приклад 1.37. Нехай дана множина $A = \{p,r,s,q\}$. Задати відношення $R \subseteq A \times A$ перерахуванням пар.

Розв'язок $R = \{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$.

Приклад 1.38. Нехай дано множину натуральних чисел *N*. Задати відношення, вказавши загальну властивість пар, що належать відношенню.

Розв'язок. $R = \{(n,m) \in N \times N | n - дільник m\}$.

2)Матричний спосіб.

При ***матричному способі задання відношення*** елементам множини *A* ставляться у відповідність рядки матриці *M R*, елементам множини *B* — стовпці. Якщо пара (*a, b)* перебуває у відношенні *R*, то на перетині відповідного їм рядка та стовпця матриці записується одиниця, інакше — нуль.

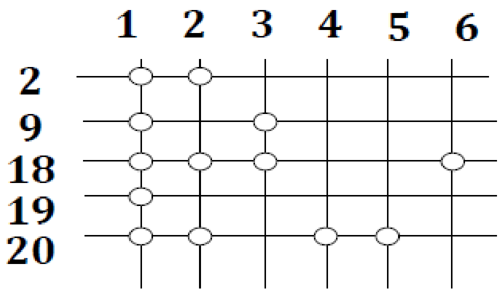
Введемо символ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, aRb \\ 0, a\overline{R}b \end{cases}$.

Бінарне відношення задається двовимірною таблицею – матрицею суміжності, якій взаємооднозначно співставляють елементи множини *A* та *B*. Кожна клітинка (i,j) відповідає елементам множини *A*×*B*. Якщо *aRb*, то в клітинці (i, j) ставлять одиницю, якщо $a\overline{R}b$ - нуль.

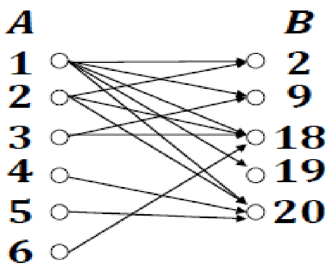
Приклад 1.39. Задати бінарне відношення на множинах матричним способом *A*={1,2,3,4,5,6}, *B*={2,9,18,19,20}; *R*={(*a*,*b*)|*a* ∈*A*, *b* ∈*B*; *a* −дільник *b*}

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ C = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{18} \\ \mathbf{19} \\ \mathbf{20} \end{array} \end{array}$$

3) **Табличний спосіб.** Для табличного задання відношення *R*⊂*A*×*B* проводять вертикалі, кожну з яких позначають деяким елементом з *A* і горизонталі, позначаючи їх елементами з *B*. Потім точками позначають перетин тих прямих, які задовольняють відношення R.



4) **Стрілочне зображення.** При стрілочному зображенні відношення *R*⊂*A*×*B* елементи *A* та *B* позначаються точками, після чого спрямованими від *a* до *b*стрілками, з'єднуються ті і тільки ті з них, де *a* ∈ *A* та *b* ∈ *B*, для яких (*a*,*b*)∈*R*.

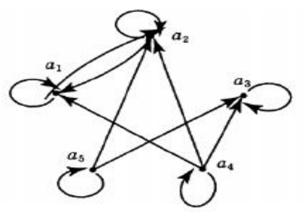


5) **Фактор-множина.** Сукупність всіх елементів $b \in B$, для яких $(a, b) \in R$, називають **перерізом (перетином)** відношення R за елементом a. Позначують $\Pr_a$.

Сукупність всіх перерізів відношення R за елементами множини Aназивають **фактором** або **фактор-множиною** множини B.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \{2,9,18,19,20\} & \{2,18,20\} & \{9,18\} & \{20\} & \{20\} & \{18\} \end{pmatrix}.$$

6) ***Графічний спосіб.*** Цей спосіб передбачає побудову ***графа*** відношення.



Приклад 1.40. Нехай існує відношення R, яке задано переліком: $R = \{(p,r), (s,q), (r,p), (p,p), (s,r), (p,s)\}$.Представити дане відношенняу вигляді графа.

Розв'язок.

На рис. 13 зображено граф бінарного відношення:

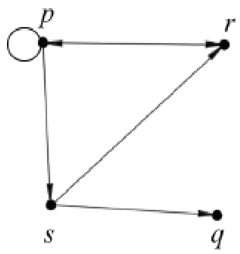


Рис. 13. Граф бінарного відношення R

1.2.5. Операції над відношеннями

Оскільки відношення є множинами, елементами яких є впорядковані пари, то над ними можна виконувати всі відомі операції над множинами.

$P = \{(a,b), (a,c), (b,a), (c,d)\}$, а $Q = \{(a,b), (b,c), (c,a), (c,d)\}$, то

$$P \cup Q = \{(a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,d)\}$$

$$P \cap Q = \{(a,b), (c,d)\}$$

$$P \backslash Q = \{(a,c), (b,a)\}$$

$$P \oplus Q = \{(a,c),(b,a),(b,c),(c,a)\}$$

Крім того, над відношеннями визначені операції знаходження оберненого відношення та композиції відношень.

Бінарне відношення $R^{-1} = \{(y,x)|(x,y) \in R\}$, визначене на множинах B та A, називається ***оберненим*** до відношення $R \subseteq A \times B$.Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис. 14, $R^{-1} = \{(1,a),(2,a),(1,d),(4,b),(4,f)\}$.

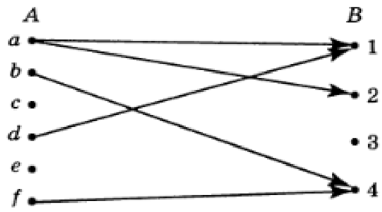


Рис. 14. Граф відношення R

Бінарне відношення $S \circ R = \{(x,z)|\text{існує такий } y \in B, \text{що } (x,y) \in R,(y,z) \in S\} \subseteq A \times C$

називається ***добутком*** **(композицією**) відношень$R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$.

Наприклад, для відношень *R* та *S*, зображених на рис. 15
$S \circ R = \{(a,x),(a,y)\}$.

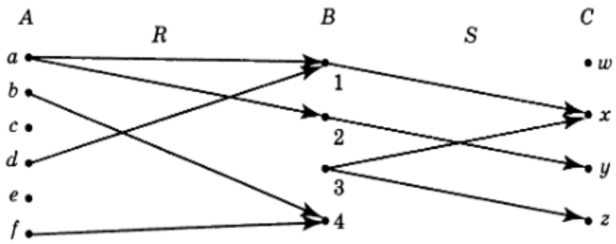


Рис. 15. Граф відношень R та S

Приклад 1.41. Нехай $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{23,24,25,26,27\}$, $C = \{a,b,c,d,e,f\}$, Бінарне відношення R визначене на множинах *A* та *B* наступним чином: тоді і тільки тоді, коли *y* націло ділиться на *x*, xRy,
$S = \{(23,f),(24,b),(25,d),(26,d),(27,a),(27,e)\} \subseteq B \times C$.

Знайти першу та другу проекції бінарного відношення та вказати $T = S \bullet R$ та вказати $T^{-1}[\{a,c,d,f\}]$.

Розв'язок. Задамо бінарне відношення R переліком елементів, які перебувають у цьому відношенні:
$R = \{(2,24),(2,26),(3,24),(3,27),(4,24),(5,25),(6,24),(8,24),(9,27)\}$,
тоді $T = \{(2,b),(2,d),(3,b),(3,a),(3,e),(4,b),(5,d),(6,b),(8,b),(9,a),(9,e)\}$.

Тому $Pr_1 T = \{2,3,4,5,6,8,9\}$; $Pr_2 T = \{a,b,d,e\}$. Вкажемо перелік елементів відношення T^{-1}:
$T^{-1} = \{(b,2),(d,2),(b,3),(a,3),(e,3),(b,4),(d,5),(b,6),(b.8),(a,9),(e,9)\}$.

Тоді $T^{-1}[\{a,c,d,f\}] = \{2,3,5,9\}$.

Властивості композиції відношень

Композиція відношень **асоціативна**: тобто, якщо X, Y, Z, D – множини і якщо

$R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$ і $T \subseteq Z \times D,$ тоді $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

1.2.6. Спеціальні властивості відношень

Бінарне відношення $\{(a,a) | a \in A\}$ називається ***відношенням ідентичності*** на множині A.

Нехай $C = A \times B$, aRb, $R \subseteq C$.

1) ***Рефлексивність.*** Якщо для довільного елементу c виконується cRc, тобто елемент $c \in C$ знаходиться у відношенні R до самого себе, відношення R називається ***рефлексивним.***

Приклад 1.42. $\boldsymbol{R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}}$ рефлексивне на множині $A = \{1,2,3\}$, проте не рефлексивне на множині $A' = \{1,2,3,4\}$.

Прикладами рефлексивних відношень є:

- $=$ - дорівнює
- $\leq$ - менше або дорівнює
- $\geq$ - більше або дорівнює
- $\subseteq$ - є підмножиною або дорівнює

Бінарне відношення є рефлексивним, якщо на його діаграмі кожна вершина з'єднана "петлею" із самою собою.

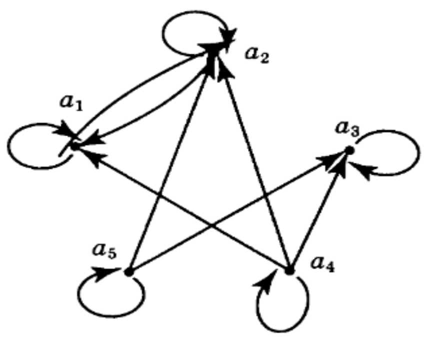


Рис. 16. Рефлексивне бінарне відношення

2) ***Антирефлексивність (іррефлексивність).*** Якщо із c_1Rc_2 слідує, що $c_1 \neq c_2$, відношення R називають ***антирефлексивним або іррефлексивним.***

Приклад 1.43. Відношення $S = \{(1,2)(1,3),(2,1),(3,2)\}$ анти- рефлексивне у множині $A = \{1,2,3\}$.

Прикладами антирефлексивних відношень є:

- $\neq$ - не дорівнює
- $<$ - менше
- $>$ - більше
- $\subset$ - є підмножиною
- «бути старшим» у множині людей
- «бути батьком»

Порожнє відношення прийнято вважати як рефлексивним, так і антирефлексивним. Якщо відношення є ні рефлексивним, ні антирефлексивним, то його називають ***не рефлексивним***.

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 17 не є рефлексивним, оскільки при вершинах a_3 та a_5 відсутні петлі.

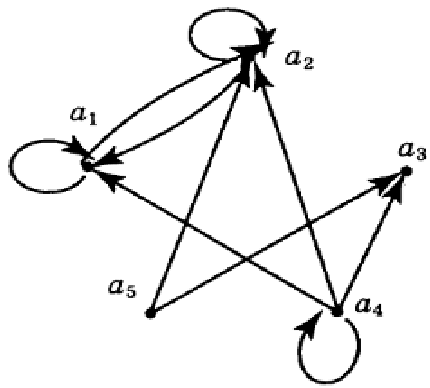


Рис. 17. Приклад діаграми однорідного не рефлексивного відношення

Приклад 1.44. Відношення $P = \{(1,1), (1,3)(2,1), (3,3)\}$не рефлексивне, оскільки елемент *2*, на відміну від всіх інших, не перебуває у відношенні сам з собою $(2,2) \notin P$.

3) ***Симетричність.*** Якщо для пари c_1Rc_2 слідує, що c_2Rc_1, то відношення R називають ***симетричним***.

Приклад 1.45. Відношення $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$ симетричне. Симетричними є відношення паралельності, перпендикулярності, подібності, універсальне відношення тощо. Для симетричного відношення його графік симетричний відносно діагоналі – бісектриси координатного кута.

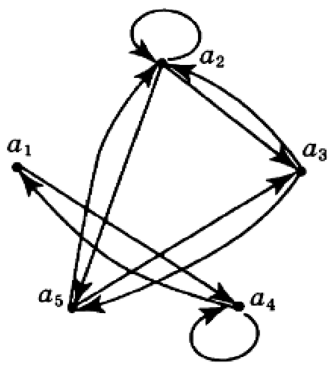


Рис. 18. Приклад діаграми симетричного бінарного відношення

4) ***Антисиметричність.*** Якщо із c_1Rc_2 та c_2Rc_1 слідує $c_1 = c_2$, відношення R називають ***антисиметричним***.

Приклад 1.46. Відношення $R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (4,4)\}$ антисиметричне: є пари (c_1,c_1) і немає пар (c_1,c_2), (c_2,c_1) .

Антисиметричними є відношення включення, "менше", "більше", "менше дорівнює" тощо.

5) ***Асиметричність.*** Якщо із c_1Rc_2 не виконується c_2Rc_1, то відношення R називають ***асиметричним***.

Приклад 1.47. Відношення $S = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ асиметричне. Асиметричними є відношення включення, "менше", "більше" тощо. Відношення рівності, діагональне та порожнє вважають як симетричними, так і антисиметричними.

6) ***Транзитивність***. Якщо c_1Rc_2 та c_2Rc_3 слідує, що c_1Rc_3, то відношення R називають ***транзитивним***.

Приклад 1.48. Відношення $R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (4,4)\}$ транзитивне. Приклади транзитивних відношень:

- відношення часткового порядку
  - строга нерівність: (a <b), (b <c) ⇒ (a<c)
  - нестрога нерівність: $(a \leq b)$, $(b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$
- включення підмножини:
  - строга підмножина $(A \subset B; B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$
  - нестрога підмножина $(A \subseteq B; B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$
- подільність
  - $(a|b)$, $(b|c) \Rightarrow (a|c)$
  - $(a{:}\,b)$, $(b{:}\,c) \Rightarrow (a{:}\,c)$
- рівність: $(a = b)$, $(b = c) \Rightarrow (a = c)$
- еквівалентність: $(a \Leftrightarrow b)$, $(b \Leftrightarrow c) \Rightarrow (a \Leftrightarrow c)$

- імплікація: $(a \Rightarrow b)$, $(b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$
- паралельність: $(a||b)$, $(b||c) \Rightarrow (a||c)$
- відношення подібності геометричних фігур
- бути предком

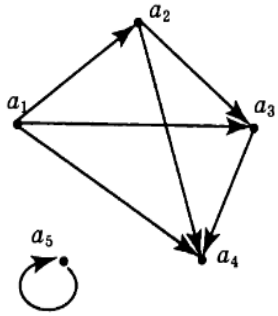


Рис. 19. Приклад діаграми транзитивного відношення

7) ***Антитранзитивність.*** Якщо c_1Rc_2 та c_2Rc_3 виходить, що не виконується c_1Rc_3, то відношення R називають ***антитранзитивним***: для будь-яких трійок a, b, c відсутня транзитивність.

Приклад 1.49.

- Відношення перемогти в турнірах «на виліт»: якщо А переміг гравця В, а В переміг гравця С, то А не грав з С, отже, не міг його перемогти.
- Бути сином (батьком, бабусею).
- Гра «Камінь, ножиці, папір». Камінь перемагає ножиці, ножиці виграють у паперу, але камінь програє паперові і т. д.
- Харчовий ланцюжок: це відношення не завжди є транзитивним (приклад — вовки їдять оленів, олені їдять траву, але вовки не їдять траву).
- Бути переважніше ніж. Якщо ми хочемо яблуко замість апельсина, а замість яблука ми б хотіли кавун, то це не значить, що ми віддамо перевагу кавуну.
- Бути другом.
- Бути колегою по роботі.
- Бути підлеглим. Наприклад, у часи феодального ладу в Західній Європі була в ходу приказка: «Васал мого васала — не мій васал».
- Бути схожим на іншу людину.

Бінарне відношення R називається ***лінійним*** на множині A, якщо для довільних відмінних один від одного a A, b B хоча би одна із пар a, b, b, a є елементом відношення R.

Замиканням бінарного відношення R за властивістю P називається таке мінімальне за числом елементів бінарне відношення $[R]_p$, яке містить у собі відношення R і задовольняє властивість P.

Приклад 1.50. На множині$A = \{1,2,3,4\}$задано відношення:
$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$;
$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$;
$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$;
$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$;
$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$;
$R_6 = \{(3,4)\}$.

Визначити, які з цих відношень (а) рефлексивні; (б) анти рефлексивні; (в) симетричні; (г) антисиметричні; (д) транзитивні.

Розв'язок.R_3і R_5- рефлексивні, оскільки вони містять всі пари вигляду (a, a), тобто (1,1), (2,2), (3,3), (4,4). Всі інші не є рефлексивними. R_1, R_2, R_4, R_6 не містять пару (3,3).

Відношення R_2, R_3- симетричні. В R_2є пари (1,2) і (2,1). В R_3 є пари (1,2), (2,1), (1,4), (4,1).

Відношення R_5 - антисиметричні, бо є пари (c1, c1) і немає пар (c1, c2), (c2, c1).

Відношення R_6, R_4- асиметричні, бо якщо із c1Rc2 не виконується c2Rc1, то відношення R називають *асиметричним.*

Властивості симетричності і анти симетричності не є антагоністичними. Відношення $R=\varnothing$на множині $A = \{a\}$ одночасно і симетричне і антисиметричне. R_1 не має властивостей ані симетричності, ані анти симетричності.

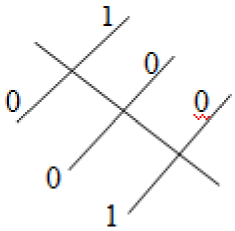
Асиметричне відношення є і антисиметричним. Обернене твердження неправильним. Відношення R_5 є антисиметричним відношенням, але не є асиметричним, бо містить пару (1,1).

R_4, R_5, R_6- транзитивні. R_1, R_2, R_3 - не транзитивні, бо
$(3,4) \in R_1; (4,1) \in R_1$, але $(3,1) \notin R_1$; $(2,1) \in R_2; (1,2) \in R_2$але $(2,2) \notin R_2$; $(2,1) \in R_3$; $(1,4) \in R_3$; але $(2,4) \notin R_3$.

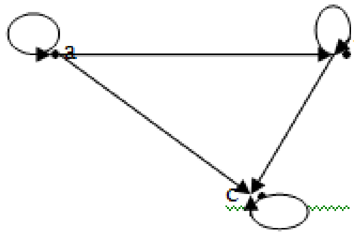
Відношення R на множині A називають ***іррефлексивним,*** якщо для будь-якого $a \in A$ $(a,a) \notin R$; R_4, R_6 - іррефлекствні; R_1, R_2- не рефлексивні і не іррефлексивні.

Якщо відношення рефлексивне, то на головній діагоналі матриці відношення будуть знаходитися «1», якщо іррефлексивне, то на головній діагоналі – «0».

Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Матриця антисиметричного відношення має наступну властивість: якщо $i \neq j$, то з $m_{i,j} = 1$ випливає $m_{j,i} = 0$.



Граф рефлексивного відношення має петлю в кожній вершині, в графі транзитивного відношення в разі наявності пари дуг (a, b) (b, c) існує дуга (a, c).



1.3. Відношення еквівалентності

1.3.1. Визначення відношення еквівалентності

Деякі елементи множини можна розглядати як еквівалентні в тому випадку, коли кожний із цих елементів при деякому розгляді може бути замінений іншим. У цьому випадку говорять, що дані елементи перебувають у відношенні еквівалентності.

Бінарне відношення називається відношенням ***еквівалентності*** на множині A, якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Бінарне відношення еквівалентності *розбиває* множину A на множини, які не мають спільного перетину (***класи еквівалентності***).

Граф відношення еквівалентності $R = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c),(d,d)\}$ наведено на рис 20. (у випадку однорідних відношень кожний елемент множини, на якій визначене відношення, достатньо зображати один раз).

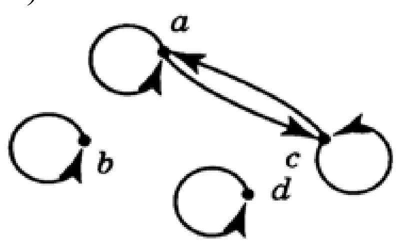


Рис.20. Граф відношення еквівалентності

1.3.2. Властивості еквівалентних відношень

1. Властивість **рефлексивності** проявляється в тому, що кожний елемент еквівалентний самому собі або $x \equiv x$.

2. Висловлювання про те, що два елементи є еквівалентними, не вимагає уточнення, який з елементів розглядається першим, який другим, тобто наявною є $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$ – властивість **симетричності.**

3. Два елементи, еквівалентні третьому, еквівалентні між собою, або наявною є $x \equiv y$ і $y \equiv z \rightarrow z \equiv z$ – властивість **транзитивності.**

Як загальний символ відношення еквівалентності використовується символ «≡» (іноді символ «~»). Для окремих відношень еквівалентностівикористовуються інші символи:
«=» – для позначення рівності;
«||» –для позначення паралельності;
«↔»– для позначення логічної еквівалентності.

Приклад 1.51. Визначити, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності, та вказати для них класи еквівалентності:
а) перпендикулярність площин у просторі;
б) відношення "бути однакового зросту" на множині людей;
в) відношення "знаходитися один від одного на відстані не меншій за 100" на площині;
г) відношення "бути родичем" на множині людей (вважаємо, що людина є родичем сама собі, а дві людини є родичами, якщо одна з них є нащадком іншої, або вони мають спільного предка).

Розв'язок. а) Відношення перпендикулярності площин не є відношенням еквівалентності, оскільки воно не є рефлексивним.

б) Відношення "бути однакового зросту" на множині людей є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність, очевидно, справджується, оскільки відношення рівності чисел є рефлексивним.

Симетричність також виконується по тій самій причині.

Для перевірки транзитивності досить пересвідчитися у транзитивності відношення рівності чисел. Якщо вважати, що зріст вимірюється в сантиметрах, то класом еквівалентності, який відповідає числу k, є множина людей зросту k см.

в) Відношення не є відношенням еквівалентності, оскільки не виконується умова транзитивності. Для того, щоб пересвідчитися у цьому досить розглянути вершини рівнобедреного трикутника з бічною стороною 100 та основою 50. Відстані від кінців основи до вершини задовольняють умову, а довжина основи — не задовольняє.

г) Відношення не є відношенням еквівалентності. Рефлексивність та симетричність випливають із означення. Покажемо, що транзитивність не виконуються. Нехай різні люди А та В є родичами і нехай В та С також є родичами, причому А предок В по батьківській лінії, а С — предок В по материнській лінії. Тоді жоден із людей А та С не є родичем іншого. Отже, транзитивність не виконується.

Приклад 1.52. Перевірити, чи є визначене на множині $A = \{x, y, z, t, u, v, w\}$ бінарне відношення $R = \left\{\begin{matrix}(u,x),(u,u).(y,z),(w,w),(y,y),(z,y),(z,z),(z,w),(y,w),(x,u).(w,y), \\ (w,z),(x,x),(v,v),(t,t)\end{matrix}\right\}$, відношенням еквівалентності. Якщо так, то вказати фактор-множину *A*/*R*.

Розв'язок. Оскільки $I_A \subseteq R$, то відношення R є рефлексивним.

Для перевірки симетричності знайдемо обернене відношення: $R^{-1} = \left\{\begin{matrix}(x,u),(u,u),(z,y),)w,w),(y,y),(y,z),(z,z),(w,z),(w,y),(u,x),(y,w), \\ (z,w),(x,x),(y,y),(t,t)\end{matrix}\right\}$. Легко переконатися, що , $R^{-1} = R$а отже, відношення R є симетричним.

Для перевірки транзитивності знайдемо другу степінь відношення R: $R^2 = \left\{\begin{matrix}(x,x),(x,u),(y,y),(y,z),(y,w),(z,y),(z,z),(z,w),(t,t),(u,x),(u,u), \\ (v,v),(w,y),(w,z),(w,w)\end{matrix}\right\}$.

Нескладно перевірити, що $R^2 = R$. Тому відношення R є транзитивним.

Отже, бінарне відношення R є відношенням еквівалентності. Знайдемо тепер класи еквівалентності. Для цього потрібно вказати одноелементні зрізи відношення *R*.

$R[x] = \{x, u\}; R[y] = \{y, z, w\}; R[z] = \{y, z, w\}\colon R[t] = \{t\}$"$R[u] = \{x, u\}\colon R[v] = \{v\}$"$R[w] = \{y, z, w\}$.

Отже, $A \backslash R = \big\{\{x, u\}, \{y, z, w\}, \{t\}, \{v\}\big\}$.

1.3.3. Класи еквівалентності

Відношення еквівалентності R_e– це відношення на множині A , яке розбиває дану множину на підмножини, елементи яких еквівалентні один одному, але не еквівалентні елементам інших підмножин.

Класами еквівалентності називають підмножини, що не перетинаються та отримані в результаті розбиття множини *A* відношенням еквівалентностіR_e. Множину класів еквівалентності множини *A* відносно R_e називають **фактор-множиною** і позначають$[A]_R$.

Приклад 1.53. Розбиття множини на підмножини. Нехай множина *B* – це набір різнокольорових повітряних кульок.

1. Відношення R_1 задамо умовою:

$(a, b) \in R_1$ якщо *«a* одного кольору з *b».*

Рис. 21. Множина кульок B

Одержимо класи еквівалентності з кульок одного кольору.

2. Відношення R_2 задамо умовою:

$(a, b) \in R_2$якщо «a одного розміру з b»

Одержимо класи еквівалентності з кульок одного розміру.

3. Відношення R_3 задамо умовою: $(a, b) \in R_3$якщо «a однакової форми з b»

Одержимо класи еквівалентності з кульок однакової форми.

Нехай i $a \in A$ – елемент множини$A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$. *Т*оді $[a_i]$позначає множину $\{x|xRa_i\} = \{x|(x, a_i) \in R\}$, *яку* називають **класом еквівалентності**, що містить a_i. Символ$[A]_R$позначає множину всіх класів еквівалентності множини *A* по відношенню *R*. Таким чином,$[A]_R$– фактор-множина.

Приклад 1.54. Нехай *A* = {1,2, 3, 4,5,6} і дано відношення еквівалентності:

$R =$
$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,4), (2,1), (2,4), (3,5), (5,3), (4,1), (4,2)\}$

Класи еквівалентності відношення *R* були отримані шляхом визначення класу еквівалентності кожного елемента множини *A*:

$[1] = \{x|(x,1) \in R\} = \{x|xR1\} = \{1,2,4\}$, де1 ∈ [1], оскільки(1,1) ∈ *R* ,2 ∈ [1], оскільки (2,1) ∈ *R*,4 ∈ [1], оскільки(4,1) ∈ *R*, не існує жодного іншого *x* ∈ *A* такого, що (*x*,1) ∈ *R*.

Так само одержуємо

[2] = {*x*|(*x*,2) ∈ *R*} = {*x*|*xR*2} = {2,1, 4}

[3] = {*x*|(*x*, 3) ∈ *R*} = {*x*|*xR*3} = {3, 5}

[4] = {*x*|(*x*, 4) ∈ *R*} = {*x*|*xR*4 } = {4,1,2}

[5] = {*x*|(*x*,5) ∈ *R*} = {*x*|*xR*5} = {5, 3}

[6] = {*x*|(*x*, 6) ∈ *R*} = {*x*|*xR*6} = {6}.

1.3.4. Замикання множин

Множину A називають замкнутою відносно деякої операції, якщо результатом виконання даної операції над елементами множини A завжди буде елемент, який належить множині A.

Приклад 1.55. Нехай множина N – множина натуральних чисел. Розглянемо операцію «+» на множині N. Чи є множина N замкнутою відносно операції «+»?

Розв'язок. Нехай $n \in N$ і $m \in N$. Тоді $n + m = k \in N$ для будь-яких $n, m \in N$.

1.4. Відношення порядку

1.4.1. Визначення відношень порядку

Бінарне відношення R називається **відношенням порядку (порядком) на множині** A, якщо воно є антисиметричним та транзитивним. Пара (A, R) називається **впорядкованою** ***множиною***. Якщо a та b — елементи впорядкованої множини (A, R) і виконується умова aRb, то кажуть, що елемент a передує елементу b.

1.4.2. Види відношень порядку

Якщо порядок є рефлексивним, то він називається **частковим (нестрогим) порядком.** Прикладом є відношення "$\leq$" на множині дійсних чисел.
Антирефлексивний порядок називається **строгим порядком**. Прикладом є відношення "$\subset$" (відношення строгого включення множин). Відношення R є строгим порядком тоді і тільки тоді, коли воно є одночасно асиметричним і транзитивним. Якщо R — відношення строгого порядку на множині A, то відношення $R' = R \cup I$ називається відношенням часткового порядку, відповідним відношенню R.

Відношення порядку, яке є лінійним, називається відношенням ***лінійного*** порядку.

Прикладом строгого лінійного порядку є відношення "$>$" на числовій множині.

1.4.3. Діаграма Хассе

Відношення часткового порядку на скінченній множині зручно задавати за допомогою діаграм Хассе. При цьому кожний елемент з'єднується відрізками з усіма його "безпосередніми попередниками" і розташовується на діаграмі вище за них. На рис. 22 зображено діаграму Хассе для відношення подільності $(x, y) \in R$ тоді і тільки тоді, коли число x є дільником числа y на множині $\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$.

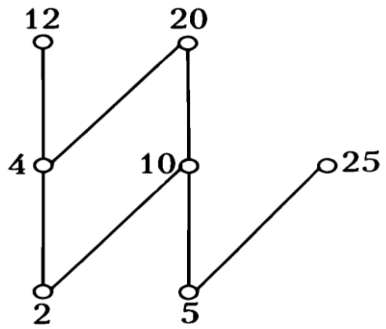


Рис. 22. Діаграма Хассе для відношення подільності на множині $\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$

Елемент a називається **мінімальним елементом** впорядкованої множини (A, R), якщо не існує такого елемента $b \in A$, що виконуються умови $b \neq a$ і bRa.

Аналогічно дається означення **максимального елемента** впорядкованої множини.

Для відношення подільності із діаграмою на рис. елементи 2 та 5 є мінімальними, а елементи 12, 20 та 25 — максимальними.

Елемент a називається **найменшим елементом** впорядкованої множини (A, R), якщо для довільного елемента $b \in A$ $(a, b) \in R$. Аналогічно дається означення **найбільшого елемента** впорядкованої множини.

Найбільший, найменший, максимальні та мінімальні елементи називають **екстремальними елементами** впорядкованої множини.

Для часткового впорядкованої множини, діаграма якої наведена на рис.23, елемент G буде найбільшим, а найменшого елемента взагалі не існує (елементи A, C та E —мінімальні, але не найменші, оскільки жодний із них не передує двом іншим).

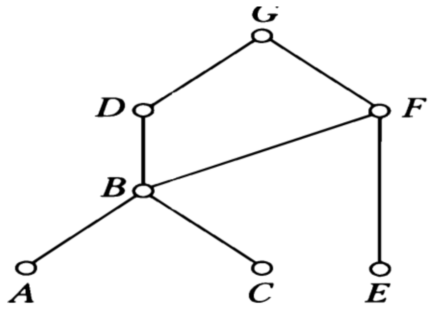


Рис.23. Діаграма Хассе для відношення часткового порядку

Елемент a впорядкованої множини (A, R) називається **нижньою гранню множини** $M \subseteq A$, якщо для усіх елементів $b \in M$ виконується умова aRb. Аналогічно дається означення верхньої грані.

Найбільша нижня грань множини (якщо вона існує) називається **точною нижньою гранню** множини M і позначається $\inf M$.

Точна верхня грань (найменша верхня грань) множини M позначається sup$M$. Так, наприклад для відношення, діаграма якого наведена на рис. 10, sup$\{D,E\}$=G, inf $\{D,F\}$=B , а inf $\{B,E\}$не існує.

Частково впорядкована множина (A, R)називається ґраткою, якщо для довільних $a\in A$, $b\in A$ існують inf $\{a, b\}$та sup$\{a, b\}$.

Приклад 1.56. Перевірити, чи є бінарне відношення $R = \{(a,a),(b,d),(b,b),(a,e),(c,c),(a,b),(a,d),(c,d),(d,d),(b,c),(a,c)\}$відношенням часткового порядку на множині A =$\{a, b, c, d, e\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе впорядкованої множини (A, R), відшукати її екстремальні елементи та перевірити, чи є впорядкована множина A,R ґраткою. Крім того, знайти inf $\{b, c\}$ та sup$\{b,c\}$.

Розв'язок. Відношення R є рефлексивним. Перевіримо, чи є воно антисиметричним. Знайдемо обернене йому відношення $R^{-1} = \{(d,b),(e,a),(b,a),(d,a),(d,c),(c,b),(c,a)\}$. Тоді $R^{-1} \cap R = I_A$, а, отже, відношення R є антисиметричним. Перевіримо транзитивність.

$R^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(b,e\},(c,c),(c,d),(d,d),(e,e)\}$=$R$. Тому відношення R є транзитивним.

Отже, відношення R є відношенням часткового порядку. Зобразимо діаграму Хассе частково впорядкованої множини (A, R). Відповідна діаграма наведена на рис.24.

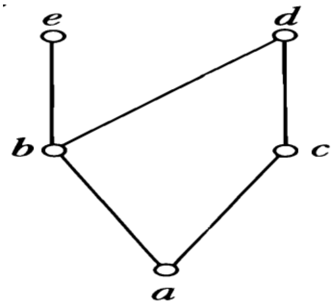


Рис.24. Діаграма Хассе

З діаграми Хассе видно, що елемент a є найменшим елементом впорядкованої множини (A, R), а, отже, єдиним мінімальним елементом. Елементи e та d — максимальні елементи впорядкованої множини (A, R), а найбільший елемент не існує. Оскільки sup$\{e,d\}$не існує, то впорядкована множина (A, R) не є ґраткою. Нарешті, з діаграми Хассе видно, що inf$\{b,c\}$=a, sup$\{b,c\}$=d.

<u>Обов`язкові завдання</u>

1. Нехай задано множини $A = \{a, b, c, d\}; B = \{1,2,3,4,5\}: G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, відповідності між A і B:
$C_1 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 2), (d, 3\}$;
$C_2 = \{(b, 3), (b, 5), (c, 1), (c, 4), (d, 1), (d, 4), (d, 5)\}$ і відповідності між B і G:
$D_1 = \{(1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha)(2, \gamma), (3, \gamma), (5, \alpha), (5, \beta)\}$;
$D_2 = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (4, \alpha), (4, \gamma)\}$. Визначити (а) $C_i \circ D_j, i, j = 1,2$;
(б) $C_i \circ C_j^{-1}, i, j = 1,2$; (в) $C_2 \circ (D_1 \circ D_2^{-1})$.
2. На множині $M = \{1,2,3,4\}$ задано відношення
$R_1 = \{(1,1)(1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$;
$R_2 = \{(1,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,3), (4,1), (4,4)\}$;
$R_3 = \{(1,3), (1,4), (2,1), (1,2), (3,1), (3,3), (4,1)\}$;
$R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$;
$R_5 = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (4,1), (4,3)\}$. Визначити, які з цих відношень
(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні (в) симетричні;
(г) антисиметричні; (д) транзитивні; (е) толерантні.

Відношення R на множині M називається ***толерантним***, якщо воно рефлексивне і симетричне.

3.Нехай A = {1, 2, 3, 4, 5}. Чи є відношення еквівалентним?
R= {(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (1, 5), (3,1), (3, 5), (5,1), (5, 3)}
4. Дана множина X={1,2,3,6} і відношення R={(x,y)|x,y ∈X, x– дільник y}. Показати, що відношення R є відношенням порядку. Побудувати діаграму Хассе частково впорядкованої множини (X, R). Чи існує в множині X найбільший і найменший елементи? Чи існують непорівнювальні елементи?

1.5. Функціональні відношення

1.5.1. Основні визначення

Відношення R (R⊂A×B) називають **функціональним**, якщо для кожного x∈A переріз R по x містить не більше одного елемента y∈B (або один або жодного!).

У цьому випадку говорять, що відношення R діє з множини A у множину B і часто використовують позначення R:A→B.

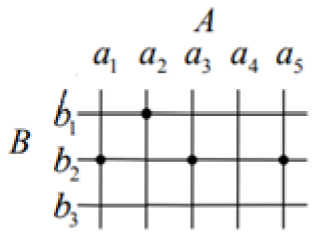
Також використовується позначення функціональної залежності малими латинським буквами f:A→B або y=f(x), а відношення f називають **функцією**.

Функція f може бути задана не на всій множені A, а тільки на деякій її частині $D\subset A$. В цьому випадку множину $D(f)$ називають **областю визначення функції** f або *domf* (*domain* — «область»): $Domf = \{a \in A | b \in B, b = f(a)\}$

Підмножину $Im\subset B$ називають **областю значень функції** f(Image– «зображення чи образ»: $Im\, f = \{b \in B | a \in A, b = f(a)\}$.

Елемент $b=f(a)$, де $a\in D$, називають **образом** елемента a, а сам елемент a – **прообразом** елемента b. Якщо $D=A$, то функція f називається **<u>всюди визначеною</u>** на A. У цьому разі $Domf = A$.

Приклад 1.57. Відношення f_1, яке задано таблицею



,

Є функціональним, але не всюди визначеним. Образом елемена a_3 є елемент b_2, а прообразом елемента b_2 є елементи a_3, a_1, a_5

Приклад 1.58.

а) Нехай $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,4,9,16,25\}$, тоді $R_1 = \{(1,1),(2,4),(3,4),(4,16)\}$- функціональне, але відношення $R_2 = \{(1,1),(1,4),(3,9)\}$ не є функціональним за означенням.

б) Англо-український словник встановлює відповідність між множинами англійських і українських слів. Це відношення не є функціональним, оскільки одному англійському слову зазвичай ставиться у відповідність кілька українських слів. Більше того, воно не є всюди визначеним, оскільки завжди можна знайти англійське слово, якого немає в цьому словнику.

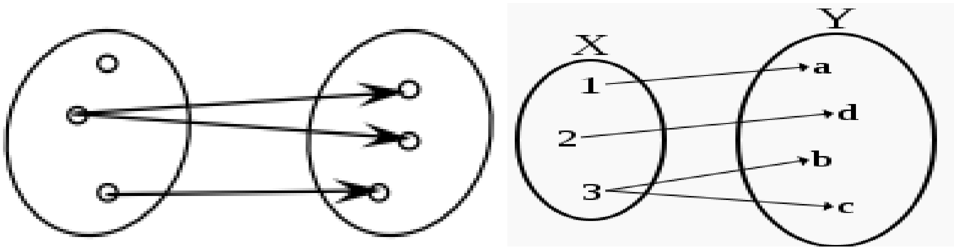


Рис. 25. Відношення, але не функція

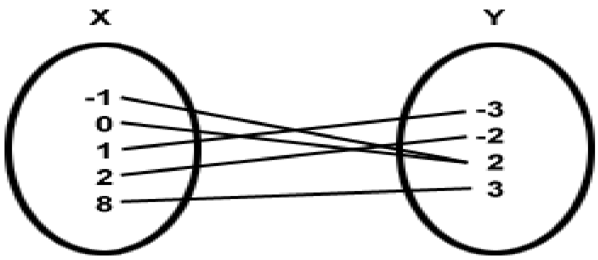
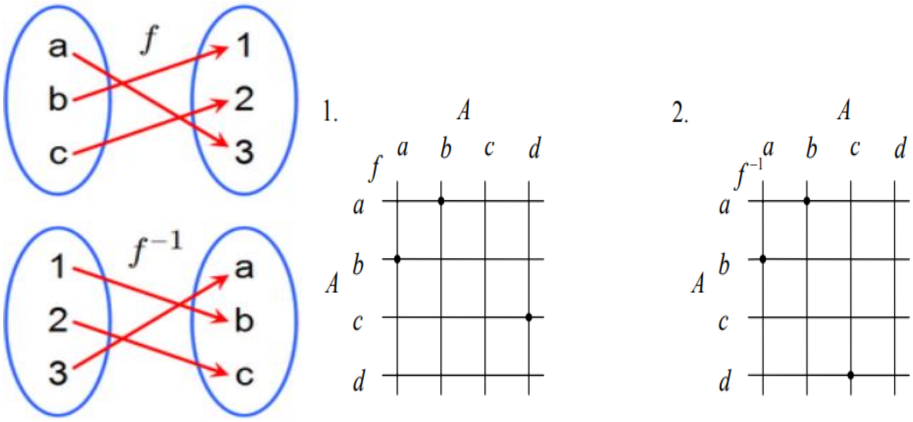


Рис.26. Відношення і функція

1.5.2.Обернене функціональне відношення

Якщо обернене відношення $R^{-1}\subset B\times A$ також є функціональним відношенням, то це відношення визначає деяку функцію, яку будемо називати оберненою до *f* функцією і позначати $f^{-1}:B\to A$ або $f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.



$$f=\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & a & c \end{bmatrix},\qquad f^{-1}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & d \end{bmatrix}.$$

Function $f(x)$	Inverse $f^{-1}(y)$	Notes
$x + a$	$y - a$	
$a - x$	$a - y$	
mx	y / m	$m \neq 0$
$1 / x$	$1 / y$	$x, y \neq 0$
x^2	$\sqrt{y}$	$x, y \geq 0$ only
x^3	$\sqrt[3]{y}$	no restriction on x and y
x^p	$y^{1/p}$ (i.e. $\sqrt[p]{y}$)	$x, y \geq 0$ in general, $p \neq 0$
e^x	$\ln y$	$y > 0$
a^x	$\log_a y$	$y > 0$ and $a > 0$

Рис.27. Приклади функціональних і обернених до них відношень

Якщо функція задана формулою *y=f(x)*, то для знаходження оберненої функції потрібно розв'язати рівняння *f(x)=y* відносно *x*, а потім поміняти місцями *x* і *y*.

$$f(x) = (2x+8)^3$$
$$y = (2x+8)^3$$
$$\sqrt[3]{y} = 2x+8$$
$$\sqrt[3]{y} - 8 = 2x$$
$$\frac{\sqrt[3]{y}-8}{2} = x$$

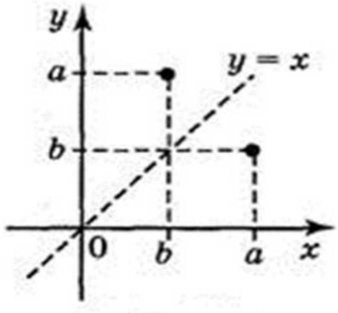
$$f^{-1}(y) = \frac{\sqrt[3]{y}-8}{2}.$$

Графіки даної функції і оберненої до даної симетричні відносно прямої $y = x$.

Якщо точка $(a; b)$ належить графіку даної функції, то точка $(b; a)$належить графіку оберненої функції, а ці дві точки симетричні відносно прямої $y = x$.

Якщо функція $y=f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона оборотна. Обернена функція до даної, визначена області значень функції $y=f(x)$, і також є зростаючою (спадною).

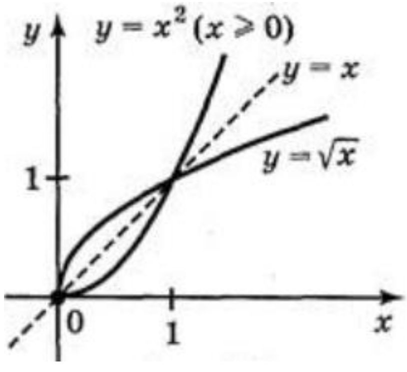
Функція, яка набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення, називається **оборотною,** наприклад функція $y = 2x+1$ — оборотна, а функція $y = x^2$ (визначена на всій числовій осі) не є оборотною.



Якщо рівняння $f(x)=y$ відносно x має більше ніж один корінь, то функція $y=f(x)$ не має оберненої функції.

Тригонометричні функції $y=cosx$, $y=sinx$, не є монотонними у всій області їх визначення. Тому для утворення обернених функцій виділяють інтервали монотонності.

Функція $y = x^2$ не є оборотною в області визначення. Проте функція $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$зростає на цьому проміжку, тому має обернену. Оберненою функцію є функція $y = \sqrt{x}$.

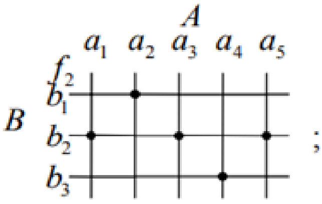


1.5.3.Відображення

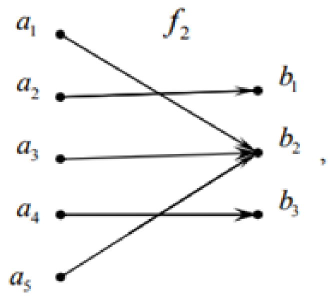
Якщо відношення водночас є функціональним та всюди визначеним на множені A, то воно називається **відображенням** множини A у множину B: f:

$A \to B$. При стрілочному зображенні відображення f з кожної точки повинна виходити лише одна стрілка.

Приклад 1.59. Довизначемо відношення f_1, поклавши $\boldsymbol{a_4 f_1 b_3}$, тоді здобудемо функціональне відношення f_2**:**



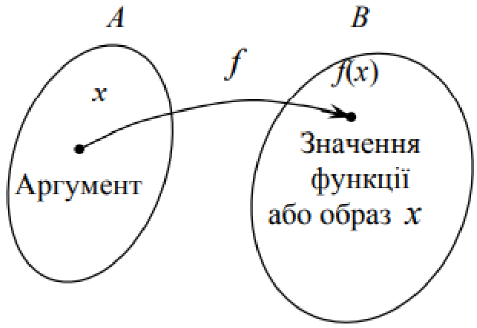
; або



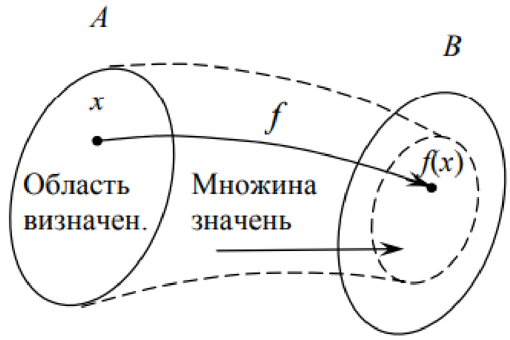
,

яке вже є відображенням.

Нехай fє відображенням множини A на множину B. Переріз $f(x)$ множини f по $x \in A$є образом елемента x для функції fі позначається як $y=f(x)$.Елемент x називають **аргументом**, $f(x)$ – **значенням функції.** Переріз $f^{-1}(y)$- множини B по $y \in B$ є прообразом елемента y для функції f.



Значення або образ функції f



Відображення f множини A у множину B

1.5.4. Типи відображень

Відображення f називається сюр’єктивним, або просто сюр’єкцією, якщо область значень f збігається з усією множиною B або $f(A)=B$, тобто якщо кожний елемент з множини B є образом хоча б одного елемента з множини A.

Тобто, f: $A \to B$, $\forall b \in B\ \exists a \in A : b=f(a)$.

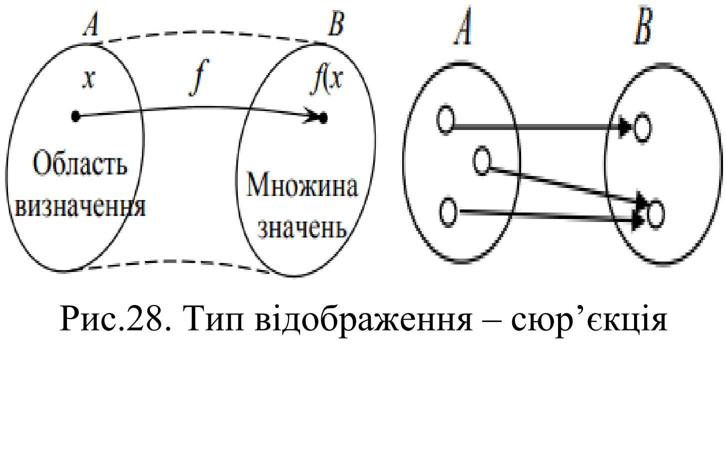
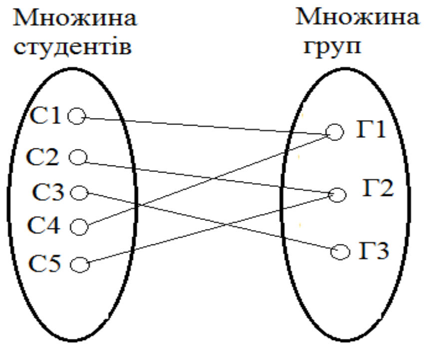
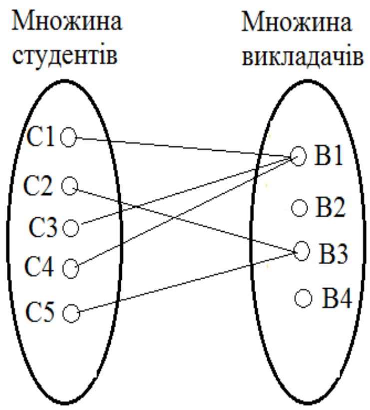


Рис.28. Тип відображення – сюр’єкція

Приклад 1.60. Відповідність між множиною всіх студентів університету і множиною груп. Це відношення сюр'єктивне, оскільки кожній групі відповідає хоча б один студент.



Приклад 1.61. Відповідність між множиною студентів 2 курсу університету і множиною викладачів. Це відношення не сюр'єктивне, оскільки на другому курсі викладають не всі викладачі.



Відображення f називається ін'єктивним, або просто **ін'єкцією,** якщо відношення f^{-1} є функціональне, тобто різні елементи множини A переводяться в різні елементи множинни B. У цьому разі кожний елемент з області значень f має єдиний прообраз, тобто $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

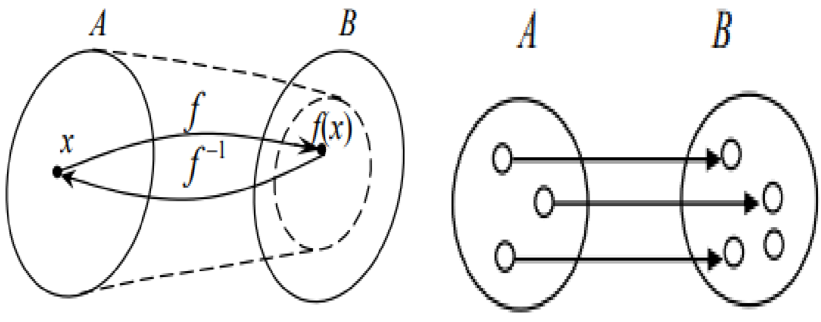
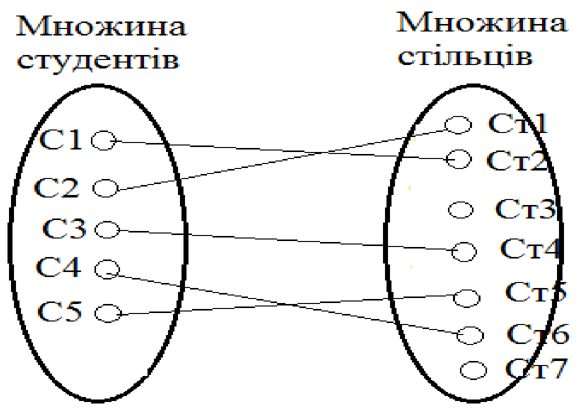
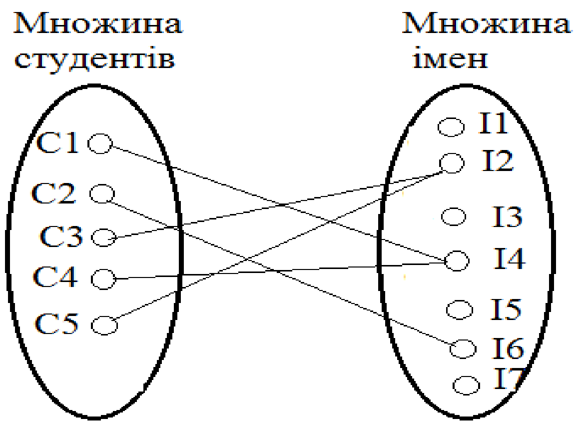


Рис. 29. Тип відображення – ін'єкція

Приклад 1.62. Відповідність між множиною студентів і стільців в аудиторії. Це відношення ін'єктивне, оскільки різні студенти сидять на різних стільцях.



Приклад 1.63. Відображення множини студентів університету на множину імен. Це відношення не ін'єктивне, оскільки є студенти з однаковими іменами.



Відображення називається взаємнооднозначним, або бієктивним, або просто **бієкцією**, якщо воно є сюр'єктивне й ін'єктивне, інакше кажучи, якщо обернене відношення є відображенням.

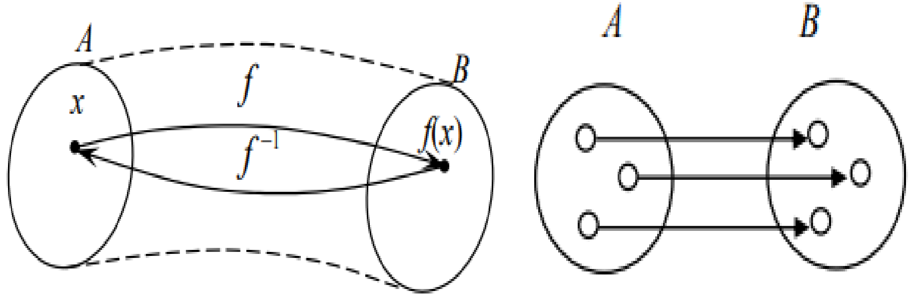
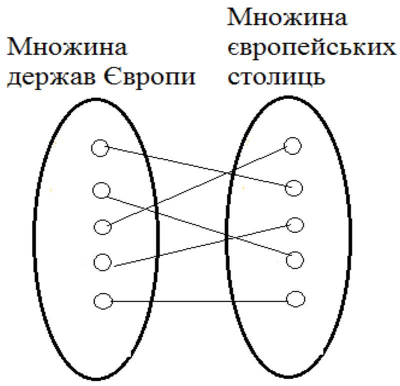


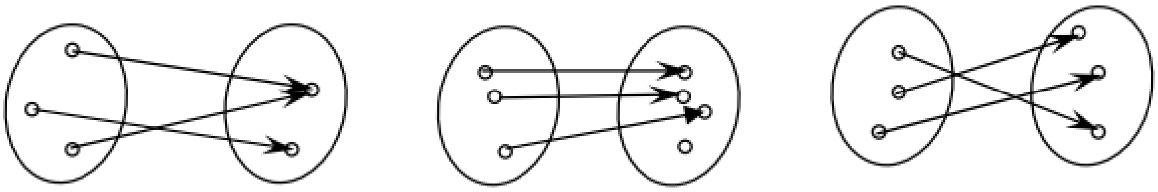
Рис.30. Тип відображення – бієкція

Приклад 1.64.



- Список студентів в журналі (номер→прізвище)
- Нумерація сторінок в книзі (сторінка →номер)

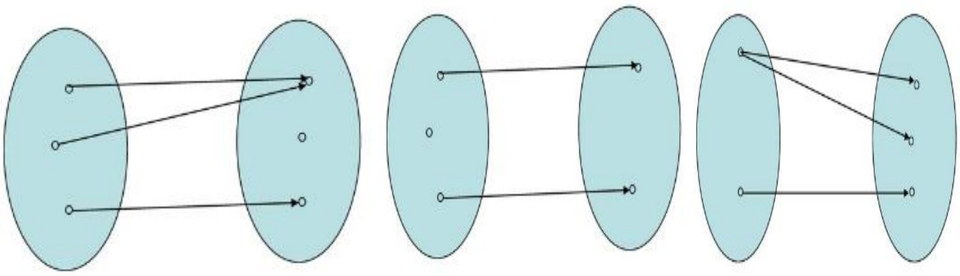
Приклади відношень



Сюр'єкція, не ін'єкція

Ін'єкція, не сюр'єкція

Бієкція



Не ін'єкція, не сюр'єкція

Не відображення

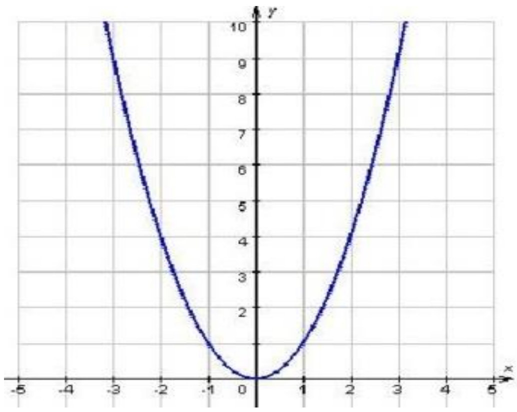
Не відображення

Приклад 1.65. Визначити множини на яких відображення є бієкцією. $f(x) = x^2$.

а) R→RНе ін'єкція,не сюр'єкція (не використовуються від'ємні значення y, і для двох різних x одне значення y);

б) R→[0;+∞) Не ін'єкція,сюр'єкція (використовуються всі значення x та y, і для двох різних x одне значення y);

в) [0;+∞) → [0;+∞) Ін'єкція,сюр'єкція – бієкція (для кожного x одне значення y)



Приклад 1.66. Нехай R − множина дійсних чисел, + R − множина дійсних додатних чисел, а функція f : A→B.
1) Якщо A = B = R, то функція f: x→ x^2 задає відображення A у B (не сюр'єктивне, тому що від'ємні числа не є образами).
2) Якщо A = B = R, то функція f: x →$4x$ − 3 задає відображення A на B (сюр'єктивне).
3) Якщо A = R, B = R+ , то функція f: x →3^x − ін'єктивне відображення, тому що воно є взаємнооднозначне:f^{-1}: x→$log_3 x$.

Зауваження: 1. Якщо функція f: A→B є бієкцією, то функція f^{-1}: B→Aтакож буде бієкцією $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. Бієкція скінченної множини А на себе називається **підстановкою**. Якщо множина має n елементів, то можна розглядати множину n! всіх підстановок, пов'язаних з даною множиноюА.

Визначення. Елемент x називається нерухомою точкою відображення f, якщо $f(x) = x$.

Зауваження. Оскільки функція є окремим випадком відношення, це означає, що для функцій є також визначена композиція, яка в цьому разі називається суперпозицією функцій.
Нехай f − функція, визначене на множині A зі значеннями в множині B, g − функція, визначене на множині B зі значеннями в множині C, тоді композиція $g \circ f$ є функція, яка діє з множини A в множину C. Таким чином суперпозиція функцій знову є функцією. З означення суперпозиції маємо $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Приклад 1.67. Нехай задано функції

$$f=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ l & m & n & l \end{bmatrix} \text{ та } g=\begin{bmatrix} l & m & n \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

$$gf=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 \end{bmatrix}.$$

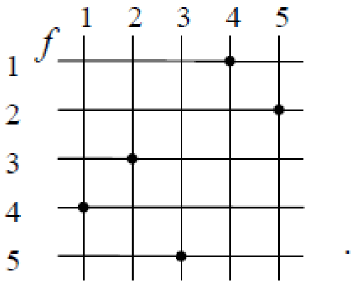
Зауваження. Для відображень g і f справедлива формула. $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. Нехай задано множину $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Визначення. ***Тотожним*** відображенням називається відображення, яке кожному елементові $a \in A$ ставить у відповідність цей же самий елемент (позначається символом 1_A). Таким чином:

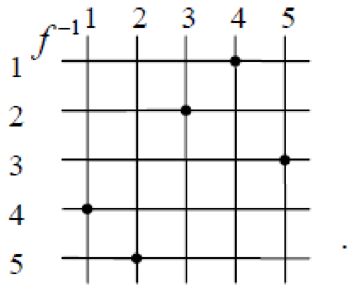
$$1_A = \begin{bmatrix} a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \\ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \end{bmatrix}.$$

Визначення. Якщо f та f^{-1} − відображення, визначені на множині A зі значеннями в цій же самій множині A, то відображення f називається ***відображенням на себе*** (бієкцією на себе) і мають місце рівності: $1_A \circ f = f \circ 1_A = f$; $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_A$.

Приклад 1.68. Нехай відображення f задано таблицею



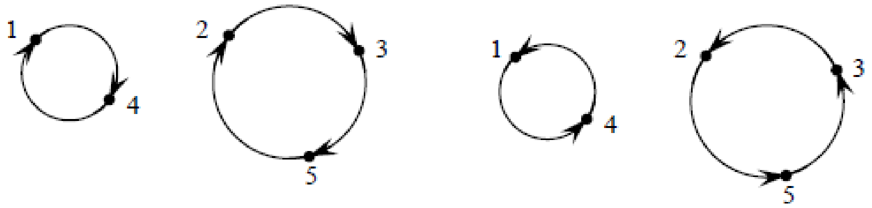
Тоді відображення $f^{-1} \subset A \times A$ визначається таблицею



Функції f і f^{-1} запишемо у вигляді:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad f^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Зображення відображень f й f^{-1} стрілками складається з циклів:



Перевіримо виконання умови:

$$1_A \cdot f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = f; \quad f \cdot 1_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = f.$$

Звідси випливає, що відображення 1_Aє тотожним. Знайдемо композицію відображень f та f^{-1}:

$$f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 1_A.$$

Визначення. Функція $f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \rightarrow B (f: A^n \rightarrow B)$ називається ***функцією n аргументів.*** Така функція відображає кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$у елемент $b \in B$.

<u>Обов`язкові завдання</u>

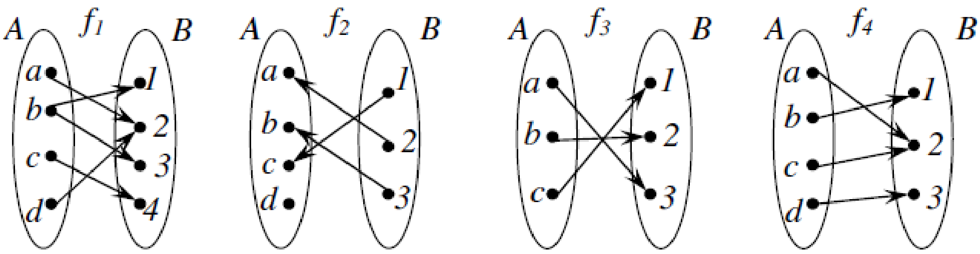
1. Нехай задано такі відношення між множинами $A = \{a, b, c, d, e\}$і $B = \{1,2,3,4,5\}$

$$C_1 = \{(a, 2), (a, 5(, (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\};$$
$$C_2 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\};$$
$$C_3 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\};$$
$$C_4 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\};$$
$$C_5 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$$

Визначити, які з цих відношень

(а) всюди визначені; б) функціональні; (в) ін`єктивні; (г) сюр`активні; (д) бієктивні (взаємнооднозначні).

2. Для бінарного відношення ρ між елементами множин A = {1, 2, 3, 4, 5}, B= {{1}, {1,2}, {2,5}, {3}}, $a\rho X \Leftrightarrow a \notin X$ знайдіть область визначення $D\rho$ і область значень $R\rho$?
3. Які з відношень, графіки яких зображені на рис., є функціями? Знайдіть для кожної функції її область визначення і область значення. Які з відношень, є ін`єктивними, сюр`єктивними, бієктивними функціями?



1.6. Алгебраїчні структури

1.6.1. Алгебраїчні операції

Алгебра вивчає множини, для елементів яких введено відношення, які називаються алгебраїчними операціями. Під n-арною алгебраїчною операцією (внутрішнім законом композиції) на множині M розуміють відображення множини $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n}$ в M.

Поняття n-арної алгебраїчної операції є рівносильним до поняття відношення R: $(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in R$, якщо $(a_1, a_2, \dots, a_n) \to b$.

Під бінарною операцією на множині M розумітимемо закон, за яким кожним двом елементам a та b множини M ставиться у відповідність певний елемент d цієї множини: $(a, b) \to d$.

Для запису композиції елементів a та b їх позначають спеціальним знаком. Закон композиції, який позначається знаком «+», переважно називають додаванням і стверджують, що для нього прийнято адитивне позначення. Закон композиції, який позначається знаком «•», переважно називають множенням і стверджують, що для нього прийнято мультиплікативне позначення.

При вивченні загальних властивостей бінарних операцій використовують символ «*».

Прикладом бінарної операції є операція векторного множення векторів.

Операція скалярного добутку векторів не є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки скалярний добуток є число, а не вектор.

Для задання бінарної алгебраїчної операції складають таблицю операції (**таблицю Келлі**), рядки і стовпці якої позначають елементами множини M, а на перетинанні рядка і стовпця ставиться відповідний результат операції:

*	a_1	a_2	…	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	…	$a_1 * a_n$
…	…	…	…	…
a_n	$a_n * a_1$	…	…	$a_n * a_n$

Кількість бінарних операцій на множині з n елементів можна визначити в такий спосіб: маючи n^2 клітинок таблиці, до кожної з них слід записати будь-який з n елементів множини M. Звідси випливає, що кількість бінарних операцій на множині з n елементів дорівнює n^{n^2}. Якщо множина складається з елементів a і b, то існує $2^{2^2} = 16$ операцій.

*	a	b
a	b	a
b	a	b

Використання таблиць має велике значення, оскільки деякі операції в комп'ютерній математиці не придатні для словесного завдання.

Множина, в якій введено бінарну алгебраїчну операцію, називається ***групоїдом.***

1.6.2.Властивості алгебраїчних операцій

Бінарна операція називається ***асоціативною***, якщо для будь-яких елементів a, b, c множини M

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Прикладом асоціативної операції є операція множення матриць.

Прикладом неасоціативної операції є операція векторного добутку векторів, тому що, наприклад, $(i \times j) \times j \neq i \times (j \times j)$.

Множина, для якої введена асоціативна операція, називається ***півгрупою.***

Бінарна операція називається ***комутативною***, якщо для будь-яких елементів множини M. $a * b = b * a$.

Прикладом комутативної операції є операція додавання матриць, а прикладом некомутативної операції є операція множення матриць.

Векторний добуток векторів є антикомутативною операцією: $a \times b = -b \times a$.

Бінарна операція * називається ***дистрибутивною зліва*** відносно операції $\circ$, якщо для будь-яких елементів a, b, c.

$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$.

Операція називається **дистрибутивною справа**, якщо $(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$.

Операція множення чисел є дистрибутивною відносно додавання чисел: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Але операція додавання не є дистрибутивною відносно множення:
$a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$.

Операції перерізу й об'єднання множин є дистрибутивною відносно одна одної і зліва, і справа.

Елемент e називається ***нейтральним елементом*** відносно операції $\circ$, якщо для кожного елемента a

$a \circ e = a$ і $e \circ a = a$.

Нейтральний елемент є єдиний, оскільки, якщо e' − інший нейтральний елемент, то $e = e \circ e' = e'$.

Нейтральний елемент відносно операції додавання називається ***нульовим*** елементом і позначається символом 0.

Нейтральний елемент відносно операції множення називається ***одиничним*** елементом і позначається символом 1.

Елемент a'називається симетричним елементу a у групоїді з нейтральним елементом e, якщо $a \circ a' = a' \circ a = e$.

Елемент a', симетричний до a відносно операції додавання, називається протилежним до a і позначається символом $-a$.

Елемент a', симетричний до a відносно операції множення, називається оберненим до елемента a і позначається символом a^{-1}.

1.6.3. Алгебраїчні структури

Алгебраїчною структурою називається множина M разом із заданими Q операціями, визначеними і замкненими на цій множині. M – носій алгебраїчної структури.

Рис. 31. Алгебраїчні структури

1.6.3.1.Група

Визначення. Групою називається множина з визначеною на ній бінарною асоціативною операцією, для якої існує обернена операція.

Група називається **скінченною**, якщо вона містить скінчену множину елементів.

Число елементів скінченної групи називається **порядком** групи.

У теорії груп зазвичай використовується мультиплікативна термінологія (тобто групова операція називається множенням, нейтральний елемент − одиничним, симетричний елемент − оберненим).

З визначення випливає, що в кожній групі існує одиничний (нейтральний) елемент і для кожного елемента групи існує обернений елемент.

З іншого боку, можна показати, що якщо асоціативна операція гарантує існування нейтрального та оберненого елементів, то множина з такою операцією є групою. В зв'язку з цим часто користуються іншим визначенням групи, рівносильним до першого.

Визначення. Непорожня множина G, на якій визначена бінарна операція, називається **групою**, якщо виконуються такі умови:

1) операція асоціативна;
2) в G існує нейтральний елемент;
3) для кожного елемента a існує обернений елемент a^{-1}.

Група називається **комутативною**, або **абелевою**, якщо вона має наступні властивості:

1) **Замкнутість**. Якщо a і b — елементи G, то $c = a * b$ — також елемент G.

2) **Асоціативність**. Якщо a і b — елементи G, то $(a * b) * c = a * (b * c)$

3) **Комутативність**. Для всіх a і b в G маємо $a * b = b * a$.

4) **Існування нейтрального елемента**. Для всіх елементів в G існує елемент e, такий, що $e * a = a * e = a$.

5) **Існування інверсії**. Для кожного а в G існує елемент a', такий, що $a * a' = a' * a = e$.

Приклад 1.69. Множина цілих чисел є абелевою групою відносно операції додавання.

1. Результатом додавання двох цілих чисел є ціле число.
2. Асоціативність: 4+(5+6)=(4+5)+6.
3. Комутативність: 4+5=5+4.
4. Нейтральним елементом групи є число 0.
5. Симетричним елементом для числа n є число $-n$ $(4, -4)$.

Дана група називається адитивною групою цілих чисел і позначається $G = \langle Z_n, + \rangle$.

Розглянемо групу $(Z_5;\oplus_5)$. Побудуємо для операції таблицю Келлі:

$\oplus_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Нейтральним елементом відносно операції $\oplus_5$ e=0, таблиця симетрична відносно діагоналі – операція комутативна, існують обернені елементи x=1; $x' = 4$; y=2; $y' = 3$; x=3; $x' = 2$. ..

1.6.3.2. Кільце

Визначення. Кільцем (R,+,$\times$) називається множина R, на якій визначені дві бінарні алгебраїчні операції (додавання та множення), при цьому відносно однієї з цих операцій множина є абелевою групою, а друга операція є дистрибутивна відносно першої.

Кільце називається **комутативним**, якщо друга операція є комутативна, і **асоціативним**, якщо вона є асоціативна.

1.6.3.3. Поле

Визначення. Ненульові елементи кільця можуть утворювати групу відносно операції множення.

Таке кільце називається **кільцем з діленням**, або **тілом**. Комутативне тіло називається **полем**.

Поле являє собою єдність двох абелевих груп – адитивної та мультиплікативної. В криптографії використовують тільки снінчені поля.

Скінчене поле — це поле зі скінченою кількістю елементів. Галуа показав що скінчені поля повинні мати кількість елементів p^n, де p — просте, а n — додатнє ціле число. Скінчені поля називають **полями Галуа** і позначають *GF* (p^n).

Приклад 1.70. Розглянемо алгебраїчну структуру $(Z_n;\otimes_n;\oplus_n)$, $n = 8$. Побудуємо таблиці Келлі:

$\oplus_8$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

$\otimes_8$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

Існують випадки, коли добуток ненульових членів дорівнює 0, а саме (2;4), (4;6), (4;4)…, отже $(Z_n;\otimes_n;\oplus_n)$ не є полем, а є комутативним кільцем з нейтральним елементом 0.

Алгебраїчна структура	**Операції**	**Набори цілих чисел**
Група	(+ -) або (× /)	Z_n або $Z^*{}_n$
Кільце	(+ -) та (×)	Z
Поле	(+ -) та (× /)	Z_p

<u>Обов`язкові завдання</u>

1. З'ясувати замкнутість L відносно операцій алгебри $A = \langle N, \{+,\times\}\rangle$, якщо L- це множина:

а) парних чисел; д) чисел виду n^2, де $n \in N$;

б) непарних чисел; е) чисел, більших ніж 1000;

в) чисел, кратних k; є) чисел, менших ніж 1000;

г) чисел виду 2^k, $k \in N$;

2. Які з множин L з попередньої задачі є носіями систем $B = \langle L, \{+,\times\}\rangle$, що утворюють під алгебри алгебри $A = \langle N, \{+,\times\}\rangle$?

3. Написати таблиці Келлі додавання та множення алгебри остач $A = \langle N_{(p)}, \{\otimes,\oplus\}\rangle$ для таких значень p:

а) p=3; б) p=4; в) p=7; г) p=2.

4. Чи є операції $\oplus,\otimes$ алгебри остача:

а) асоціативними;

б) комутативними;

в) дистрибутивними одна відносно одної?

5. З'ясувати, чи є операція конкатенації слів:

а) асоціативною; б) комутативною?

Розділ 2. Комбінаторика

2.1. Теоретичні основи комбінаторики

2.1.1. Вступ в комбінаторику

Комбінаторика – це розділ математики,який вивчає питання вибору або розміщення елементів множин у відповідності з заданим правилом.

У вузькому сенсі комбінаторика – це підрахунок будь-яких комбінацій, які можна скласти з деякої множини дискретних об`єктів. Під об`єктами розуміють будь-які окремі предмети або живі істоти – люди, звірі, гриби, рослини, комахи і т.д.При цьому комбінаторику зовсім не хвилює, що множина складається з тарілки манної каші, паяльнику чи болотної жаби. Принципово важливим є одне – ці об`єкти піддаються лічбі – їх три (дискретність) і істотним є те, що серед них немає однакових.

Комбінаторика походить від слова **combina**, що в перекладі **сполучати**, **з'єднувати.**

Методи розв'язування задач комбінаторики називають **методами комбінаторного аналізу.** Оскільки комбінаторика має справу зі скінченими множинами, на природу об'єктів яких ніяких обмежень не накладають, то її часто називають **теорією скінчених множин.**

Комбінаторика виникла в XVI сторіччі, коли в житті верхнів прошарків суспільства важливе місце займали азартні ігри (карти, кості, пасьянси, лотереї). Це стало рушійною силою для розвитку комбінаторики і теорії ймовірностей.

Ряд перших комбінаторних задач розв’язали такі відомі математики як Пасекаль, Ферма, Ейлер, Бернуллі, Лейбніц.

Г.В. Лейбніц у 1666 рой і захистив дисертацію «Про комбінаторне мистецтво» і ввів термін «комбінаторика»

Комбінаторика сьогодні

Комбінаторика або комбінаторний аналіз або комбінаторна математика – це галузь математики, яка вивчає способи побудови підмножин деякої скінченної множини, причому таких, які відповідають заданим обмеженням.

Згадані підмножини часто називають комбінаторними конфігураціями або вибірками. Якщо, наприклад, враховувати порядок розміщення об’єктів, то одержимо різні комбінаторні конфігурації, як показано на рис. 2.1.

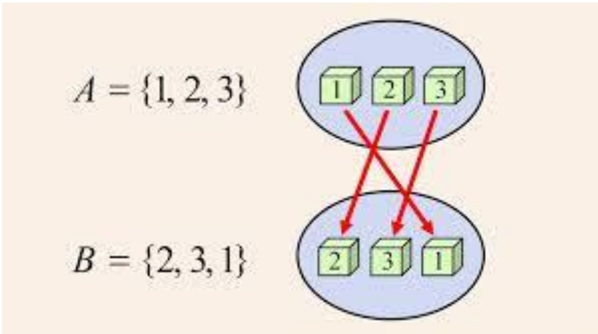


Рис.32.Формування комбінаторної конфігурації

Комбінаторні методи лежать в основі розв’язку багатьох задач теорії ймовірностей і її додатків.

Комбінаторика вивчає такі види задач:

1. Підрахунок числа комбінаторних конфігурацій.

Приклад 2.1. При зміні порядку кольорових кульок у стовпцях одержимо скінченну кількість різних стовпців. Кожний стовпець відповідатиме одній комбінаторній конфігурації, як показано на рис. 33.

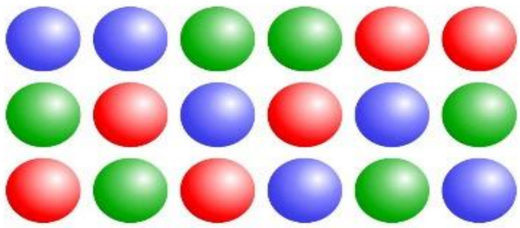


Рис. 33. Задача визначення кількості відмінних стовпців кульок

2. Знаходження умов існування комбінаторної конфігурації.

Приклад 2.2. Задача знаходження умов існування комбінаторної комбінації виникає при визначенні можливості існування певного розфарбування кубика Рубіка (рис. 34)

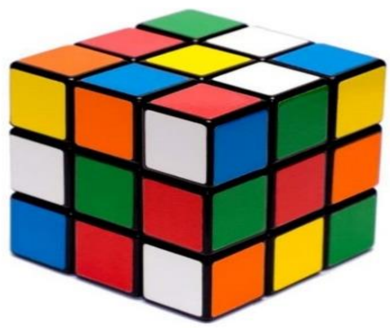


Рис. 34. Задача існування заданого розфарбування

3. Розробка алгоритмів побудови комбінаторних конфігурацій.

Приклад 2.3. Алгоритм побудови транспортних маршрутів, яківідповідають заданим параметрам трафіку, дозволяє гнучко розподілятитранспортні потоки.

Рис. 35. Задача перерозподілу транспортних потоків

4. Розв’язування оптимізаційних задач (екстремальних комбінаторних задач).

Приклад 2.4. Перебір та порівняння варіантів вирішення задачі є одним із способів розв’язування оптимізаційної задачі. Така задача може виникнути при оптимізації WEB-сайту.

Рис. 36. Задача оптимізації технічного рішення

Підрахунок кількості комбінаторних конфігурацій часто зустрічається в програмних засобах. Такі задачі є предметом вивчення рахункової комбінаторики.

2.1.2. Основні поняття комбінаторики

У комбінаториці прийнято говорити про множину, вказуючи кількість її елементів. Наприклад, якщо є множина , яка складається з n елементів, то в цьому випадку її називають n -множиною A.

Визначення. Множину B називають **підмножиною** множини A і позначають, якщо всі елементи множини B є також елементами множини A.

Визначення. Якщо множина C має кілька екземплярів одного і тогосамого елемента, то таку множину називають **мультимножиною.**

Вибірка

Визначення. Вибіркою називають довільну мультимножину, елементи якої вибирають з елементів множини А, тобто таку множину, яка, у загальному випадку, може містити кілька екземплярів одного і того самого елементамножини А, як показано на рис.37.

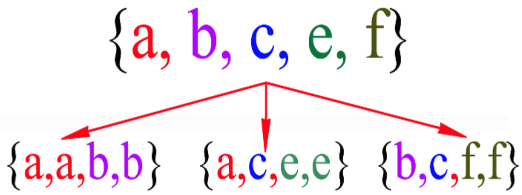


Рис. 37. Приклади 4-вибірок з 5-множини

Обсяг вибірки. Кількість елементів r у вибірці (таку вибірку називаютьтакож r -вибіркою) визначають як її **обсяг**.

Інший зміст поняття «вибірка». Поняття «вибірка» використовують також для позначення **самого процесу відбору** елементів підмножини з початкової множини.

Упорядкована вибірка

Визначення. Вибірку називають **упорядкованою**, якщо порядок слідування елементів в ній заданий. Дві впорядковані вибірки, які різняться лише порядком проходження елементів, вважають різними.

Визначення. Нехай – множина з n елементів. Впорядкованою вибіркою обсягом r з n−множини називають будь-яку впорядковану підмножину з r її елементів, як показано на рис. 2.7.

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b,c\}\{b,a,c\}\{c,b,a\}\{b,c,a\}$$

Рис. 38. Упорядковані 3-вибірки з 4-множини

Висновок. Упорядковані вибірки відрізняються порядком слідування одних і тих самих елементів.

Неупорядкована вибірка

Якщо порядок слідування елементів не є істотним, то таку вибірку називають **неупорядкованою**. Приклад такої вибірки показаний на рис. 39.

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$$

Рис. 39. Приклад неупорядкованої 3-вибірки з 4-множини

Висновок. Неупорядковані вибірки відрізняються елементами, а непорядком їх слідування.

Вибірки з повтореннями та без повторень

Визначення. Вибірки з повтореннями – це вибірки, які допускають повторення елементів. Приклад вибірки з повтореннями показаний на рис. 40.

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,a,b\}\{b,b,c\}\{c,c,d\}\{d,d,a\}$$

Рис. 40. Приклад 3-вибірок з повтореннями з 4-множини

Визначення. Вибірки без повторень – це вибірки, які не допускаютьповторення елементів. Приклад вибірки без повторень показаний на рис. 41.

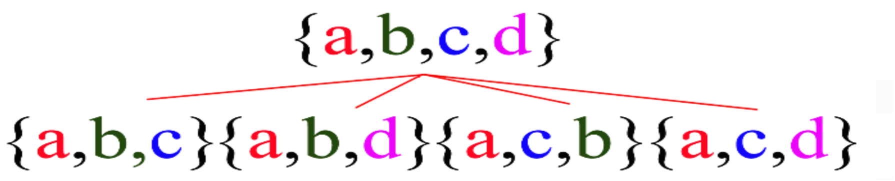


Рис. 41. Приклад 3-вибірок без повторень з 4-множини

Загальноприйняті назви вибірок

1. **Розміщення** (A_n^k- без повторень, $\overline{A_n^k}$– без повторень) (упорядкована вибірка з повтореннями або без повторень). Набір елементів $\{x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_k}\}$ з множини $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ називають i –ю вибіркою обсягом k з n елементів k <n або, інакше, (n,k)–розміщенням.

Наприклад: {1,2, 3, 4}⇒{1,1,2},{2,1,1},{1,2, 3}...

{1,2,3, 4}⇒{1,2, 3},{1,2, 4},{4,2,1}...

Поєднання (комбінація) (C_n^mбез повторень, $\overline{C_n^m}$з повтореннями) (неупорядкована вибірка з повтореннями або без повторень).

Визначення. Вибірки, в яких не враховуються порядок запису елементів і які відрізняються між собою хоча б одним елементом, називають **поєднанням або комбінаціями**.

Наприклад: {1,2, 3, 4} ⇒ {1,2, 3}, {1,2, 4}, {2, 3, 4} ...

{1,2,3, 4} ⇒ {1,1, 3}, {1,1, 4}, {4,2,1} ...

Перестановка (P_nбез повторень, $P(k_1, \ldots, k_m)$з повтореннями) (упорядкована повна вибірка без повторень та з повтореннями)

Визначення. Вибірки, у які складаються з одних і тих самих елементів і які відрізняються тільки порядком їх слідування, називають **перестановками**.
Наприклад: {1,2, 3}⇒{1,2, 3},{1, 3,2},{3,2,1}...

{1,2,3}⇒{1,1, 3},{3,1,1},{3, 3,1}...

<u>**Обов`язкові завдання**</u>

1. В студентській групі 23 студенти. Скількома способами можна обрати старосту і його заступника?

2.Скількома способами з колоди в 36 карт можна вибрати 3 карти?

3. У мами 2 яблука і 3 груші. Кожен день протягом 5 днів підряд вона видає по одному фрукту. Скільком способами це можна зробити?

4. Підприємство може надати роботу за однією спеціальністю 4 жінкам, за іншою – 6 чоловікам, за третьою – 3 робітникам незалежно від статі. Скількома способами можна закрити вакансії, якщо є 14 претендентів: 6 жінок і 8 чоловіків?
5. В пасажирському потязі 9 вагонів. Скількома способами можна розсадити в потягу 4 людини, за умовою, що всі вони повинні їхати в окремих вагонах?
6. В групі 9 людей. Скільки можна скласти різних підгруп за умовою, що в підгрупу входить не менше, ніж 2 людини?

2.1.3. Основні правила комбінаторики

Комбінаторика – це наука про те, як можна комбінувати різні об'єкти, як можна їх сполучати. Це з однієї сторони наука про те, як порахувати кількість комбінацій визначеного типу, а з іншої сторони, наука про те, як знайти якусь екстремальну комбінацію з якимись оптимальними властивостями. Комбінувати можна що завгодно, наприклад, з групи студентів факультету автоматизації і інформаційних технологій можна вибрати групу студентів, що будуть займатися інформаційними технологіями або групу, що будуть займатися кібербезпекою.

Описані задачі – комбінаторні.Можна комбінувати символи деякого алфавіту, і в цьому випадку проявляється зв'язок з такими об'єктами, як ДНК послідовності і т.д.

Розглянемо два основні правила, які використовують при розв'язуваннікомбінаторних задач.

Правило суми

Визначення. Якщо елементи множини A можна вибрати n способами, а елементи множини B можна вибрати m способами, то за умови, що $A \cap B = \varnothing$, загальне число вибірок становить $n + m$.

Дані правила дуже нагадують **алгебру подій.** Знак«плюс» слід розуміти і читати як АБО.

На рис. 42. показано умови застосування правила суми, у випадку, колимножини не перетинаються.

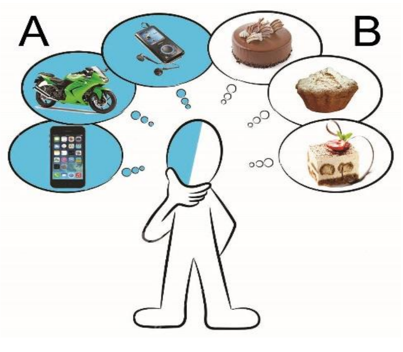


Рис. 42. Демонстрація правила суми

Приклад 2.5. На лекції з дискретної математики присутні 20 студентів. Квитки на концерт Лари Фабіан купило 15 студентів. Скільки всього студентів відвідали лекцію й концерт за умови, що вони відбуваються одночасно?

Розв'язок. Позначимо через X множину студентів, які були присутні на лекції, а через Y– множину студентів, які відвідали концерт. Оскільки$n = |X| = 20$, $m = |Y| = 15$і $X \cap Y = \emptyset$, то за правилом суми: $m + n = 20 + 15 = 35$.

Приклад 2.6. Студентська група складається з 23 людей, серед яких 10 хлопців і 13 дівчат. Скількома способами можна обрати двох людей однієї статі?

Розв'язок. В даному випадку підрахунок C_{23}^2 не підходить, тому, що загальна кількість поєднань вміщує і різностатеві пари.

Умова «обрати двох людей однієї статі» передбачає, що необхідно обрати двох хлопців **або** двох дівчат, і вже саме формулювання вказує на вірний шлях вирішення:

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ способами можна обрати 2 хлопців;

$C_{13}^2 = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ способами можна обрати 2 дівчат.

Таким чином, двох людей однієї статі (не має різниці – хлопців **або** дівчат) можна обрати: $C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123$ способами.

Відповідь: 123

Правило добутку комбінацій

Визначення. Кількість способів вибору елементів множини $A \cdot B$ дорівнює $n \cdot m$.

Знак «помножити» слід розуміти і читати як **І**. Розглянемо ту ж саму студентську групу, яка пішла на танці. Скількома способами можна скласти пару з хлопця і дівчини?

$C_{10}^1 = 10$ способами можна обрати 1 хлопця; $C_{13}^1 = 13$ способами можна обрати 1 дівчину.

Таким чином, одного хлопця і одну дівчину можна обрати: $C_{10}^1 \cdot C_{13}^1 = 10 \cdot 13 = 130$ способами.

Коли з кожної множини обирають по 1 об`єкту, то справедливий наступний принцип підрахунку комбінацій: «**кожен** об`єкт з однієї множини може скласти пару з кожним об`єктом іншої множини». Тобто, Олег може запросити на танок будь-яку з 13 дівчат Євген – теж будь-яку з 13, і аналогічний вибір є у всіх інших хлопців. Отже: $10 \cdot 13 = 130$ можливих пар.

Слід зазначити, що в даному прикладі не має значення «історія» створення пари; однак, якщо прийняти до уваги ініціативу, то кількість комбінацій необхідно подвоїти, тому, що кожна з 13 дівчат теж може запросити до танцю будь-якого хлопця. Все залежить від умови тієї чи іншої задачі!

Схожий принцип справедливий і для більш складних комбінацій, наприклад: скількома способами можна обрати двох хлопців **і** двох дівчат для участі в одному епізоді КВК?

Союз **І** однозначно натякає на те, що комбінації необхідно перемножити: $C_{10}^2 \cdot C_{13}^2 = 45 \cdot 78 = 3510$ можливих груп артистів.

Іншими словами, **кожна** пара хлопців (45 унікальних пар) може виступати з **будь-якою** парою дівчат (78 унікальних пар). А якщо розглянути розподіл ролей між учасниками, то комбінацій буде ще більше.

Правило множення комбінацій розповсюджується і на більшу кількість множників.

Приклад 2.6. Скільки існує тризначних чисел, які діляться на 5?

Розв'язок. Для наочності позначимо дане число трьома зірочками: ******* Комбінації будемо рахувати по розрядах – *зліва направо*:

В *розряд сотен* можна записати будь-яку з $C_9^1 = 9$ цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 або 9). Нуль не підходить, так як число перестає бути тризначним. А ось в *розряд десятків* («посередині») можна вибрати будь-яку з 10 цифр: $C_{10}^1 = 10$. За умовою, число повинно ділитися на 5, якщо воно закінчується на 5 або на 0. Таким чином, в молодшому розряді нас влаштовують 2 цифри.

Отже, існує: $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2 = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ тризначних чисел, що діляться на 5. При цьому добуток $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2$ розшифровується так: «9 способами можна вибрати цифру в *розряд сотен* **і** 10 способами вибрати цифру в *розряд десятків* **і** 2 способами в *розряд одиниць*». Або ще простіше: «**кожна з** 9 цифр в *розряді сотен* комбінується **з кожною** з 10 цифр *розряду десятків* **і з кожною** з двох цифр в *розряді одиниць*».

Відповідь: 180

А тепер… згадаємо задачу з попереднього заняття, в якій Борі, Дімі і Володі можна здати по одній карті $C_{36}^3 \cdot P_3 = 7140 \cdot 6 = 42840$ способами. Множення тут має той самий сенс: $C_{36}^3 = 7140$ способами можна взяти 3 карти з колоди **І в кожній** вибірці представити їх $P_3 = 3! = 6$ способами.

Приклад 2.7. У Васі вдома живуть 4 кота.
а) скількома способами можна розсадити котів по куткам кімнати?
б) скількома способами можна відпустити котів погуляти?
в) скількома способами Вася може взяти на руки двох котів (одного на ліву, іншого – на праву)?

*Розв'язок.*По-перше, слід звернути увагу на те, що в задачі мова йде про **різні** об`єкти (навіть якщо коти – однояйцеві близнюки). Це дуже важлива умова!
а) ~~Мовчання котів~~. Даній екзекуції піддаються відразу всі коти + важливе їх розташування, тому тут мають місце перестановки: $P_4 = 4! = 24$ способами можна розсадити котів по кутках кімнати. Ще раз повторюю, що при перестановках значення має лише кількість різних об`єктів і їх взаємне розташування. В залежності від настрою Вася може розсаджувати котів полу колом на дивані, в ряд на підвіконні т.д. – перестановок у всіх випадках буде 24. Бажаючі, для зручності, можуть уявити, що коти різнокольорові (наприклад, білий, чорний рудий і смугастий) і перерахувати всі можливі комбінації.
б) Скількома способами можна відпустити котів погуляти?

Передбачається, що коти ходять гуляти тільки через двері, при цьому не має значення кількість тварин – на прогулянку можуть вийти 1,2,3 і всі 4 коти.

Рахуємо можливі комбінації:

$C_4^1 = 4$ способами можна відпустити гуляти одного кота (будь-якого з чотирьох);

$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ способами можна відпустити гуляти двох котів (варіанти перерахуйте самостійно);

$C_4^3 = 4$ способами можна відпустити гуляти трьох котів (будь-який один з чотирьох сидить вдома);

$C_4^4 = 1$ способом можна випустити всіх котів.

Мабуть, ви здогадалися, що отримані значення слід скласти: $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ способами можна відпустити гуляти котів.

Ентузіастам пропоную ускладнену версію задачі – коли будь-який кіт в будь-якій вибірці випадковим чином може вийти на вулицю, як через двері, так і через вікно. Комбінацій значно збільшиться!
в) Скількома способами Вася може взяти на руки двох котів?

Ситуація передбачає не тільки вибір 2 тварин, але й їх розташування на руках: $A_4^2 = 3 \cdot 4 = 12$ способами можна взяти на руки 2 котів. Другий варіант вирішення: $C_4^2 = 6$ способами можна вибрати двох котів і $P_2 = 2! = 2$ способами посадити **кожну** пару на руки: $C_4^2 \cdot P_2 = 6 \cdot 2 = 12$

Відповідь: а) 24, б) 15, в) 12

І для очищення совісті що-небудь конкретніше на множення комбінацій …. Нехай у Васі додатково живуть 5 кішок. Скількома способами можна відпустити погуляти 2 котів і 1 кішку?

$$C_4^2 \cdot C_5^1 = 6 \cdot 5 = 30$$

Тобто, з **кожною** парою котів можна відпустити **кожну** кішку.

Правило включень і виключень для двох множин

Визначення. Нехай A і B– скінченні множини. Визначимо, чому дорівнює $|A \cup B|$, якщо відомі потужності $|A|$ і $|B|$.

Дотримуючись визначення операції об'єднання: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Пояснення. Сума $|A| + |B|$ включає всі елементи множини A й множини B. При цьому, загальні елементи множин A і B, а їх буде $|A \cap B|$, включаються в суму двічі. Тому для одержання суми об'єднання необхідно відняти один набір спільних елементів. В результаті одержуємо: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Правило включень і виключень для трьох множин

$$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})| =$$

Застосували правило включень і виключень для трьох множин A і $(B \cup C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap (B \cup C)| =$$

Застосували правило включень і виключень для множин $(B \cup C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| =$$

Застосували дистрибутивний закон

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B| \cap (A \cap C)|) =$$

Правило включень і виключень для множин $(A \cap B)$ і $(A \cap C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Розкрили дужки

Правило включень і виключень у загальному вигляді

Розглянемо правило включень і виключень при застосуванні до n множин.

Нехай маємо $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ - деякі множини. Тоді формула для визначення потужності множини об'єднання даних множин має такий вигляд: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_n| - \ldots$

$$+(-1)^{n-1} \cdot \sum_{1 \le i < j < k .. < l \le n} \left| A_i \cap A_j \cap \ldots A_k \cap \ldots A_l \cap A_n \right|$$

Правило підрахунку за даною формулою полягає в послідовному виконанні операцій додавання і віднімання, які чергуються між собою.

Звідси випливає назва: **правило включень і виключень**.

Приклад 2. 8. Обчислення за правилом включень і виключень

Нехай дані множини $A = \{1,2,3,4,9\}$, $B = \{3,4,5,6,9\}$і $C = \{5,6,7,8,9\}$. Обчислити:

1) $|A \cup B|$; 2) $|B \cup C|$; 3) $|A \cup C|$; 4) $|A \cup B \cup C|$.

Розв'язок. Попередньо обчислимо об'єднання трьох множин $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7.8.9\}$

1) $A \cap B = \{3,4,9\}$; $|A \cap B| = 3$.
   Тому $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 5 - 3 = 7$;
2) $B \cap C = \{5,6,9\}$; $|B \cap C| = 3$.
   Тому $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = 5 + 5 - 3 = 7$;
3) $A \cap C = \{9\}$; $|A \cap C| = 1$.
   Тому $|A \cup C| = |A| + |C| = 5 + 5 - 1 = 9$;
4) $(A \cap B \cap C) = \{9\}$; $|A \cap B \cap C| = 1$;
   $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$
   $= 5 + 5 + 5 - 3 - 1 - 3 + 1 = 9$

Приклад 2.9. Записати правило включень і виключень для множин *A*,*B*,*C*,*D*

Розв'язок. Скористаємося загальною формулою:

Перепишемо дану формулу, враховуючи, що *n*=4/D. В результаті одержимо:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| +$$
$$+ |A \cap B \cap C| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$$

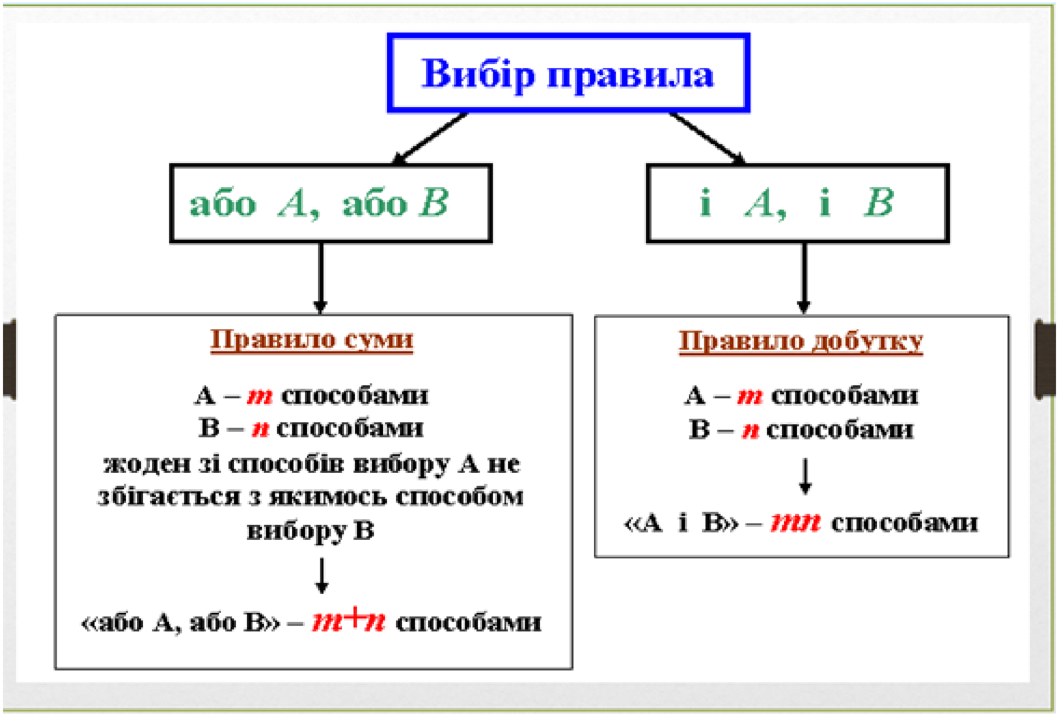


Рис.43. Схема вибору правила комбінаторики

2.1.4. Принцип Діріхле

Дуже часто буває так, що при розв'язуванні складних математичних задач використовують різний інструментарій, уже відомі методи, прийоми, принципи, теорії тощо. Завдяки цьому деякі класи задач стають алгоритмічними, а їхні розв'язки – доступними широкому загалу. Жартома цей принцип формулюється так: «Якщо п'ятьох зайців розсадити в чотири клітки,то принаймні в одній із них опиняться два зайці».

В україномовній математичній літературі цей принцип називають **принципом Діріхле** на честь відомого німецького математика Петера Лежена Діріхле (1805-1859), який перший за допомогою такого простого твердження отримав глибокі результати про наближення ірраціональних чисел до раціональних (вангломовній літературі цей принцип більше відомий як **pigeonhole principle** –«принцип голубника»). Зауважимо, що задачі цього розділу не претендують на оригінальність, більшість із них уже стала математичним «фольклором», і вже зараз складно встановити їх авторів.

Розглянемо кілька елементарних задач.

Приклад 2.10. У мішку лежать кульки двох різних кольорів – чорного і білого. Яку найменшу кількість кульок потрібно вийняти з мішка, щоб серед них точно дві кульки виявились одного кольору?

Розв'язок. Зрозуміло: узявши три кульки, ми виявимо, що дві з них одного кольору. У даному випадку роль зайців відіграють кульки, а роль кліток –чорний та білий кольори.

Приклад 2.11. У лісі росте мільйон ялинок. Відомо, що на кожній із них не більше ніж 800 тисяч голок. Доведіть, що в лісі знайдуться дві ялинки з однаковою кількістю голок.

Доведення. Припустімо, що в лісі всі ялинки мають різну кількість голок (на деякій ялинці голок могло не бути зовсім). Тоді в лісі не більше ніж 800 001ялинка, що суперечить умові. Тут у ролі зайців були ялинки, а в ролі кліток –усі можливі варіанти кількості голок на них.

Приклад 2.12. На 5 поличках книжкової шафи 160 книг, причому на одній із них – 3 книги. Доведіть, що знайдеться поличка, на якій не менше ніж 40 книг.

Доведення. Припустімо, що на кожній із решти 4 поличок не більше ніж 39книг. Тоді на всіх 5 поличках не більше ніж 3+4·39=159 книг, що суперечитьумові. Отже, на одній із поличок не менше ніж 40 книг.

Проте найчастіше принцип Діріхле використовують в узагальненому формулюванні.

Узагальнений принцип Діріхле. Якщо nk+1 предмет розкладено в n ящиків, то принаймні в одному з ящиків знаходиться не менше ніж k+1 предмет.

Доведення. Нехай x_i (i=1, ..., n) — кількість предметів, що знаходяться в i-му ящику. За умовою $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nk + 1$. Припустімо, що для кожного i виконується $x_i < k$. Тоді $x_1 + x_2 + \ldots + x_n < nk$, що суперечить умові. Отже, наше припущення було хибним, тобто в одному з ящиків є принаймні k+1 предмет. Цей спосіб доведення надалі спрощено також називатимемо принципом Діріхле.

Приклад 2.13. У місті більше ніж 8 мільйонів жителів. Науковці вважають, що в кожної людини менш ніж 200 000 волосин на голові. Доведіть, що є принаймні 41 житель з однаковою кількістю волосин на голові.

Доведення. Оскільки 40–200000=8000000 (кількість волосин у людини коливається від 0 до 199 999, всього 200 000 варіантів), то згідно з принципом Діріхле знайдеться принаймні 41 житель, котрий має однакову кількість волосин на голові. Тут роль предметів відіграють жителі, а роль ящиків – усі можливі варіанти кількості волосин на голові.

Приклад 2.14. Дано два многочлени від однієї змінної, кожен із яких – сума 9 членів парного степеня, не більшого за 36. Доведіть, що в добутку обов’язково знайдуться три подібних члени.

Доведення. Якщо ми перемножимо два даних многочлени, то отримаємо новий многочлен степеня, не більшого за 72, кожний із 81 одночлена якого має парний степінь. Оскільки парних чисел від 0 до 72 є 37, то, згідно з принципом Діріхле, знайдуться принаймні три подібних члени.

Приклад 2.15. Доведіть, що серед 82 кубиків, кожен із яких помальовано певним кольором, існує 10 кубиків різного кольору або 10 кубиків одного кольору.

Доведення. Якщо для розмалювання 82 кубиків використано не менше ніж 10 кольорів, то зрозуміло, що знайдеться 10 кубиків різного кольору. Якщо ж для розмалювання 82 кубиків використано не більше ніж 9 різних кольорів, то, згідно з принципом Діріхле, знайдеться принаймні 10 кубиків одного кольору.

Тут у ролі предметів виступають кубики, а в ролі ящиків – кольори.

Приклад 2.16. Цифри 1, 2, ..., 9 розбили на три групи. Довести, що добуток цифр в одній із груп не менший за 72.

Доведення. Оскільки $9!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 9=(8\cdot 9)\cdot(3\cdot 4\cdot 6)\cdot(7\cdot 5\cdot 2)=70\cdot 722=(712–1)(71+1)=713+712–71–1>713$, то, згідно з принципом Діріхле, добуток цифр в одній із груп не менший за 72.

Приклад 2.17.15 хлопчиків зібрали 100 грибів. Доведіть, що принаймні двоє з них зібрали однакову кількість.

Доведення. Припустімо, що твердження задачі неправильне. Тоді 15 хлопчиків зібрали щонайменше $0+1+2+\ldots+14=14\cdot 15:2=105$ грибів. Це суперечить умові.

Узагальнений принцип Діріхле

Інколи буває корисним ще таке переформулювання принципу Діріхле: Якщо одне з кількох чисел більше від їх середнього арифметичного, то серед цих чисел знайдеться інше, що є меншим від їх середнього арифметичного.

Приклад 2.18. У бригаді 7 чоловік і їх сумарний вік складає 322 роки. Доведіть, що з них можна вибрати трьох осіб, сумарний вік яких не менший за 138 років.

Доведення. Оскільки середній вік членів бригади складає 46 років, то сумарний вік трьох найстарших людей не менший за $3\cdot 46=138$ років.

Принцип Діріхле можна також сформулювати зовсім «по-науковому», не використовуючи кліток і зайців.

Нехай A і B – скінчені множини, причому m – кількість елементів множини A, а n – кількість елементів множини B ($m>n$). Тоді при будь-якому відображенні множини A в множину B знайдуться два елементи множини A, що мають той самий образ.

Принцип Діріхле допускає також інші переформулювання та узагальнення. Але нас надалі більше цікавитимуть різні способи його застосування. Розглянемо кілька задач про знайомства, зустрічі тощо.

Приклад 2.19. Кілька футбольних команд проводять турнір в одне коло. Доведіть, що в будь-який момент турніру знайдуться дві команди, що зіграли до цього моменту однакову кількість матчів.

Доведення. Нехай n – кількість команд, що проводять турнір. Розгляньмо два випадки:
1) у даний момент турніру знайдеться команда, що не провела жодної гри;
2) протилежний.
Припустімо, що у випадку 1) така команда одна. Якби їх було дві, то все доведено. Тому у випадку 1) не буде жодної команди, що зіграла n–1 матч доданого моменту. Тоді, згідно з принципом Діріхле, серед n–1 команд (крім тієї, що не зіграла жодного матчу) можна вибрати дві, що зіграли однакову кількість матчів. Тут у ролі зайців виступають n–1 команд, а в ролі кліток – можливі кількості матчів від 1 до n–2, які вони зіграли. У випадку 2) кількість матчів, що провели команди до даного моменту, змінюється від 1 до n–1. І тому знову, за принципом Діріхле, серед n команд знайдуться дві, що зіграли однакову кількість матчів.

Приклад 2.20. 10 друзів відправили один одному святкові листівки. Кожний із них відправив 5 листівок. Доведіть, що якісь двоє друзів відправили листівки один одному.

Доведення. Обчислімо, скільки всього пар людей можна утворити з 10 друзів:10·9:2=45. Оскільки всього було відправлено 10·5=50 листівок, то, згідно з принципом Діріхле, на якусь пару друзів припадає дві листівки.

Приклад 2.21. У роботі деякого засідання брали участь 200 чоловік, причому кожен із них був знайомий не менше ніж зі 100 присутніми. Доведіть, що за круглий стіл для 4 осіб можна посадити 4 із присутніх так, щоб кожен із них сидів між своїми знайомими.

Доведення. Припустімо, що серед присутніх є двоє незнайомих A і B, інакше все доведено. Оскільки кожен із A і B знайомий не менше ніж зі 100присутніми, то вони матимуть принаймні двох спільних знайомих (200>198). Тоді ці двоє спільних знайомих разом з A і B утворюватимуть шукану четвірку осіб.

Приклад 2.22. У конгресі брали участь 2000 вчених, одні з них були раніше знайомі один з одним, інші – ні. При цьому виявилося: кожні двоє вчених, які мають однакову кількість знайомих, не мають спільних знайомих. Доведіть, що серед присутніх на конгресі вчених знайдеться вчений, знайомий лише з одним учасником конгресу.

Доведення. Нехай A — це вчений, який має найбільшу кількість знайомих серед присутніх (або одного з них, якщо їх кілька). Усіх знайомих A позначимо

$A_1, A_2, ..., A_k$. Згідно з умовою задачі, усі A_i (i=1, ..., k) мають різну кількість знайомих, що змінюється від 1 до k. Тоді знайдеться такий учений, котрий має рівно одного знайомого.

Приклад 2.23. Уздовж круглого столу рівномірно розміщено таблички з прізвищами дипломатів, які беруть участь у перемовинах. Після початку перемовин виявилося, що жоден із дипломатів не сидить напроти своєї таблички. Чи можна повернути стіл так, щоб принаймні двоє дипломатів сиділи напроти своїх табличок?

Розв'язок. Зауважмо, що серед усіх можливих n положень столу завжди можна вибрати одне, коли якийсь дипломат сидить напроти своєї таблички.Тоді за умови, що при такому положенні столу такого дипломата немає, згідно з принципом Діріхле, можна повернути стіл так, щоб принаймні двоє дипломатів сиділи напроти своїх табличок. Часто при розв'язуванні задач, де застосовують принцип Діріхле, потрібно не лише показати, що чисел, які задовольняють певну властивість, є не більше від деякого k, але й онструктивно вказати множину з k елементів, що таку властивість має.

Приклад 2.24. Картки пронумеровані послідовно цілими числами від 1 до $2n+1$. Яку найбільшу кількість карток можна вибрати так, щоб жоден із номерів не дорівнював сумі якихось двох інших номерів карток?

Розв'язок. Припустімо, що таких карток існує не менше ніж $n+2$. Розташувавши вибрані картки за порядком зростання їх номерів, віднімемо від усіх номерів найменший номер картки. Отримаємо $n+1$ різних чисел, відмінних від 0. Тоді, згідно з принципом Діріхле, отримана множина має принаймні один спільний із початковою номер (без картки з найменшим номером), тобто умови задачі не виконуються. Легко перевірити, що для $n+1$ картки з непарними номерами $\{1, 3, 5, ..., 2n+1\}$ умови задачі вже виконуються.

<u>Обов`язкові завдання</u>

1. Скільки існує виграшних комбінацій з 2 карт при грі в «очко»?

Для тих, хто не знає: виграє комбінація 10 + ТУЗ (11 очок) = 21 очко і, давайте будемо вважати виграшною комбінацію з двох тузів.*(порядок карт в будь-який парі не має значення).* До речі, не треба вважати приклад примітивним. Блекджек – це мало не єдина гра, для якої існує математично обґрунтований алгоритм, який дозволяє вигравати у казино.

2. В ліфт 12-поверхового дому сіли 3 пасажири. Кожний незалежно від інших з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому (починаючи з 2-го) поверху.Скількома способами:

1) пасажири можуть вийти на одному і тому самому поверсі (порядок виходу не має значення);
2) дві людини можуть вийти на одному поверсі, а третій - на другому;
3) люди можуть вийти на різних поверхах;
4) пасажири можуть вийти з ліфту?
І тут часто перепитують, поточнюю: якщо 2 або 3 людини виходять на одному поверсі, то порядок виходу значення не має. ДУМАЙТЕ, використовуйте формули і правила додавання/добутку комбінацій. У випадку складностей корисно надати пасажирам імена і поміркувати, в яких комбінаціях вони можуть вийти з ліфту. Не треба засмучуватися, якщо щось не виходить, так, наприклад, пункт № 2 достатньо підступний.

3. Олексій займається спортом, причому 4 дні на тиждень – легкою атлетикою, 2 дні – силовими вправами і 1 день відпочиває. Скількома способами він може скласти собі графік занять на тиждень?

Формула тут не придатна, оскільки враховує перестановки, що співпадають (наприклад, коли міняються місцями силові вправи в середу з силовими вправами в четвер). І знову – по факту ті ж 2 силові тренування можуть сильно відрізнятися одне від іншого, але згідно умови задачі (з точки зору розкладу) вони вважаються однаковими елементами.

4. В гаманці знаходиться досить велика кількість 1-, 2-, 5- і 10-копійчаних монет. Скількома способами можна дістати три монети з гаманця? З метою самоконтролю дайте відповідь на пару простих запитань:
1) Чи можуть всі монети у вибірці бути різними?
2) Назвіть саму «дешеву» і саму «дорогу» комбінацію монет.

5. Автомобільний номерний знак складається з 3 цифр і 3 літер. При цьому не допустимим є номер з трьома нулями, а літери обираються з набору А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х (використовуються тільки ті літери кирилиці, написання яких збігається з латинськими літерами). Скільки різних номерних знаків можна скласти для регіонів?

6. У мішку лежать 5 чорних і 5 білих кульок. Яку найменшу кількість кульок потрібно взяти з мішка, щоб серед них точно виявилося 3 кульки одного кольору?

7. Учені дослідили, що кількість голок у їжака не перевищує 200 тисяч.Доведіть, що із 250 тисяч їжаків можна вибрати принаймні двох, що мають однакову кількість голок.

8. У Верховну Раду обрано 336 народних депутатів, причому серед них 123 жінки, і 245 особи – представники правих сил. Доведіть, що серед правих є не менше ніж 32 жінки.

9. У школі 30 класів і 1000 учнів. Доведіть, що у школі є клас, у якому не менше ніж 34 учнів.

10. На Землі більше ніж 4 мільярди людей, вік яких не перевищує 100 років.Доведіть, що на Землі є двоє людей, що народилися тієї самої секунди.

11. Яку найменшу кількість карток спортлото «6 із 49» потрібно купити, щоб на одній із них обов’язково було вгадано хоча б один номер?

12. У магазин завезли 25 ящиків із трьома різними сортами яблук (в кожному ящику яблука лише одного сорту). Доведіть, що серед них є принаймні 9ящиків одного сорту яблук.

13. У школі навчається 962 учні. Доведіть, що принаймні у двох учнів збігаються ініціали.

14. У темній коморі лежать черевики одного розміру: 10 пар чорних і 10 пар коричневих. Яку найменшу кількість черевиків потрібно взяти з комори, щоб серед них точно можна було вибрати одну пару одного кольору (у темряві не можна відрізнити не тільки колір черевика, але й лівий від правого)?

15. Із повного набору доміно викинули всі кісточки з шістками. Чи можна викласти в ланцюг усі кісточки, що залишилися?

16. У похід пішли 12 туристів. Наймолодшому з них – 20 років, а найстаршому– 30. Чи є серед них однолітки?

17. У школі навчаються 400 учнів. Доведіть, що принаймні двоє з них народилися в один день.

18. Хлопчик мав 100 табличок із числами 1, 2, ..., 100, але загубив 79 із них. Чи обов’язково серед решти табличок знайдуться чотири такі, що сума чисел на двох із них дорівнюватиме сумі чисел на двох інших?

19. Доведіть, що серед будь-яких шести цілих чисел знайдуться два числа, різниця яких буде кратною 5.

20. У сьомому класі навчаються 30 учнів. У диктанті один учень припустився 12 помилок, а решта – менше. Довести, що принаймні троє учнів припустилися однакової кількості помилок.

21. Дано 12 довільних двоцифрових чисел. Доведіть, що серед них є два, різниця яких дорівнює двоцифровому числу, записаному однаковими цифрами.

2.1.5. Комбінаторні схеми

Нехай $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - множина об’єктів, число $k \leq n$ (k може бути нулем). Як можна вибрати з множини A рівно k об’єктів? Можна вибрати ці об’єкти послідовно без повернення, один за другим k разів;

1) вибирати з поверненням, а саме, вибирати один об’єкт з множини A, повернути назад, вибрати наступний об’єкт, повернути назад і т.д. k разів;
2) вибрати без повернення одразу всі k об’єктів однією купою без повторів (невпорядковано);
3) вибрати невпорядковано k об’єктів, які можуть повторюватися.

Прикладом такого вибору може бути наступна задача: нехай в магазині є безкінечна кількість лимонів, яблук і груш. Розглянемо множину $A = \{лимон, яблуко, груша\}$. Ми хочемо купити 5 фруктів. Якою кількістю способів ми зберемо в авоську 5 фруктів? Так як порядок неважливий, то ця кількість буде дорівнювати кількості способів вилучити 5 фруктів невпорядковано з множини $A = \{лимон, яблуко, груша\}$ з повтореннями.

Розберемо їх більш детально. Попередньо зазначимо, що $\emptyset$ - позначає порожню множину і вважається (тут $n!$ читається n-факторіал):
0!=1, 1!=1, $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$,

Відповідно чотирьом типам вибірок введемо позначення:

1) число k-розміщень без повторень з n об’єктів позначається, як A_n^k (читається A з n по k);
2) число k-розміщень з повтореннями з n об’єктів позначається $\overline{A_n^k}$;
3) число k-комбінацій без повторень з n об’єктів позначається C_n^k (читається C з nпо k, це позначення придумав Паскаль в 17 сторіччі, але зараз в англомовному світі прийнято позначення $\binom{n}{k} = C_n^k$;
4) число k-комбінацій з повтореннями з nоб’єктів позначається $\overline{C_n^k}$;

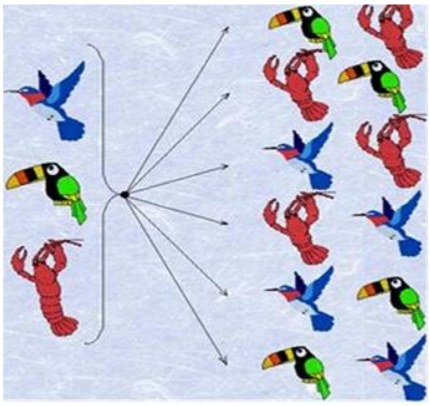
2.1.5.1. Розміщення без повторень

Вибірки, у яких всі елементи різні, а їх порядок у вибірці є суттєвим, називають **розміщеннями без повторень.**

В цьому визначенні виділимо такі характеристичні ознаки розміщень без повторень:

1) Елементи вибірки різні;
2) Порядок елементів важливий;
3) $\mathbf{0 \leq k \leq n}$.

Приклад 2.25. З трьохелементної множини можна скласти шість двохелементних вибірок. Кожна така вибірка не містить однакових елементів. Порядок елементів у вибірці є суттєвим, оскільки, наприклад, перша і друга вибірки вважаються різними, хоча складаються з однакових елементів. Отже, кожна така вибірка є розміщенням без повторень з 3-х елементів по 2.



Розв'язок. Кількість розміщень без повторень із n елементів по K елементів позначають через A_n^k.

Після введення позначення, ми можемо записати, що нам треба знайти A_3^2. Скількома способами ми могли б обрати одного представника живої природи? Оскільки всі вони різні, то трьома різними способами (обравши або першого, або другого, або третього з них). Тому $A_3^1 = 3$. Після нашого вибору першого представника, залишилося 2 необраних. З них 2-х ми обираємо когось на роль другого у вибірці. Скількома різними способами це можна зробити? Так, двома, адже, кожний з двох ще необраних може стати другим у вибірці. За правилом добутку кількість способів вибору двох представників дорівнює 3×2, тобто $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$

Приклад 2.26. Скількома способами можна скласти розклад занять з 5 різних уроків, якщо у класі вивчається 10 різних предметів?

Розв'язок. Кожний розклад – це вибір 5 різних предметів із списку, в якому 10 предметів. Нам важливий лише набір з 5 предметів, а і їх порядок. Отже, кожен розклад – це впорядкована підмножина з 5 різних елементів множини з 10 елементів, тобто розміщення без повторень з 10 елементів по 5. Нам треба підрахувати кількість таких множин, тобто A_{10}^5.

Скількома способами ми могли б скласти розклад з одного предмету? Оскільки всі вони різні, то 10-ма різними способами (обравши або перший, або другий, або…, або десятий предмет). Тому $A_{10}^1 = 10$. Після нашого вибору першого предмету у розкладі, у списку залишилося 9 предметів. З цих 9-ти ми обираємо будь-який предмет на роль другого у розкладі. Скількома різними способами це можна зробити? Так, 9-ма, адже, кожний з 9-ти ще не обраних предметів може стати другим у розкладі. За правилом добутку кількість способів вибору у розклад двох перших предметів дорівнює 10×9**,** тобто $A_{10}^2 = 10 \times 9$. Тобто, аналогічно міркуючи, можемо підрахувати кількість способів вибору у розклад перших трьох і чотирьох предметів Це $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8$ і $A_{10}^4 =$

$10 \times 9 \times 8 \times 7$ відповідно. Тоді, кількість способів скласти розклад з 5 різних предметів буде дорівнювати $A_{10}^{5} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$.

2.1.5.2. Розміщення з повтореннями

Вибірки, в яких елементи можуть бути однаковими і порядок їх розташування є суттєвим (тобто вибірки будуть різними, навіть, якщо вони відрізняються тільки порядком розташування в них елементів) називають **розміщенням з повтореннями.** В цьому визначенні виділимо такі характеристичні ознаки розміщень з повтореннями:

1) Елементи можуть бути однаковими;
2) Порядок елементів важливий.

Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k елементів позначають через $\overline{A_n^k}$, і обчислюють за формулою $\overline{A_n^k} = n^k$. Це випливає із узагальненого правила добутку: на першому місці може бути будь-який з n даних елементів, на другому – також будь-який з n елементів, …, на k-тому місці – також будь-який з n даних елементів.

Приклад 2.27. Скільки чотирилітерних слів можна скласти з літер М і А? Випишіть ці слова і перевірте отриманий результат.

Розв'язок. Складемо декілька таких «слів»: ММMA, MAMA, MAAA… Бачимо, що склад вибірки змінюється, порядок елементів у вибірці істотний. Значить – це розміщення з повтореннями з 2 літер М і А по 4. $\overline{A_2^4} = 2^4 = 16$. Випишемо всі ці 16 «слів»: MMMA, MMAA, MAAA, MAMA, AAAM, AAMM, AMMM, AMAM, AMMA, MAAM, AAMA, AMAA, MMAM, MAMM, MMMM, AAAA.

Відповідь: 16.

Приклад 2.28. Вздовж дороги розташовані 6 світлофорів, кожен з них має 3 стани: «червоний», «жовтий», «зелений». Скільки може бути різних ситуацій на дорозі, що спричинені станами світлофорів?

Розв'язок. Випишемо декілька комбінацій: ЧЧЖЗЗЧ, ЖЖЖЖЖЖ, ЗЖЖЗЧЧ…. МИ бачимо, що склад вибірки змінюється і порядок елементів істотний (адже, якщо, наприклад, у вибірці ЧЧЖЗЗЧ поміняти місцяит Ж і З, ситуація на дорозі буде іншою). Тому застосовуємо формулу розміщень з повтореннями з 3 по 6:$\overline{A_3^6} = 3^6 = 729$.

Відповідь: 729.

2.1.5.3. Поєднання (комбінація)

(C_n^kбез повторень, $\overline{C_n^k}$з повтореннями) (неупорядкована вибірка з повтореннями або без повторень).

Поєднання (комбінація) без повторень

В підручниках надається лаконічне і не дуже зрозуміле визначення поєднання, тому моє формулювання буде не дуже раціональним, але, сподіваюсь, зрозумілою:

Поєднаннями називають різні комбінації з k об`єктів, які вибрані з множини $n$ різних об`єктів, які відрізняються один від одного хоча б одним об`єктом. Іншими словами, окреме поєднання – це унікальна вибірка з k елементів, в якій не важливий їх порядок (розташування). Загальна ж кількість таких унікальних поєднань розраховується за формулою$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.

Кількість сполук без повторень з n елементів по k визначають виходячи з числа розміщень без повторень A_n^kз урахуванням того, що різних неупорядкованих вибірок (підмножин вихідної множини) буде менше в число раз, яке дорівнює перестановці без повторень з kелементів P_k: $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.

Приклад 2.29. В ящику знаходиться 15 деталей.Скількома способами можна взяти 4 деталі?

*Розв'язок.*По-перше,знову звертаю увагу на те, що за логікою умови, деталі вважаються **різними -** навіть якщо вони насправді однотипні і візуально однакові *(в цьому випадку їх можна, наприклад, пронумерувати)*.
В задачі мова йде про вибірку з 4 деталей, в які не має значення їх «подальша доля» – грубо кажучи, «просто обрали 4 штуки і все». Таким чином, маємо поєднання деталей. Рахуємо їх кількість:

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)!\cdot 4!} = \frac{15!}{11!\cdot 4!} = (*)$$

Тут, звісно ж, не треба обраховувати такі великі числа $11! = 39916800, \quad 15! = 1307674368000$.

В схожій ситуації я пропоную використовувати наступний прийом: в знаменнику обираємо найбільший з **факторіалі**в в даному випадку 11! і скорочуємо на нього дріб. Для цього чисельник необхідно представити у вигляді$15!=11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15$. Розпишу дуже детально:

$$(*) = \frac{11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{11!\cdot 4!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{4!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{24} = 1365$$

способами можна взяти 4 деталі з ящику.

Ще раз: що це означає? Це означає, що з набору 15 різних деталей можна скласти *одну тисячу триста шістдесят п`ять* **унікальних** поєднань з 4 деталей. Тобто, кожна така комбінація з чотирьох деталей буде відрізнятися від інших комбінацій хоча б однією деталлю.

Відповідь: 1365 способами.

Формулі $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ необхідно приділити особливу увагу, оскільки вона є «хітом» комбінаторики. При цьому корисно розуміти і без будь-яких обчислень записувати «крайні» значення: $C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^{n-1} = n, \quad C_n^n = 1$.

Стосовно розібраної задачі: $C_{15}^0 = 1$ – тільки одним способом можна не обрати жодної деталі;

$C_{15}^1 = 15$ способами можна взяти 1 деталь (будь-яку з п`ятнадцяти);

$C_{15}^{14} = 15$ способами можна взяти 14 деталей (при цьому якась одна з 15 залишиться в ящику);

$C_{15}^{15} = 1$ – тільки одним способом можна обрати всі п`ятнадцять деталей.

Рекомендую уважно ознайомитися **з біномом Ньютона і трикутником Паскаля**, по якому, до речі, дуже зручно виконувати перевірку обчислень C_n^m при невеликих значеннях «*n*».

Приклад 2.30. В шаховому турнірі приймає участь *k* людей і кожен з кожним грає тільки по одній партії. Скільки всього партій зіграно в турнірі?

Одразу ж зорієнтуємось за турнірною таблицею розміром $k \cdot k$ клітинок, в якій результат кожної партії враховується двічі і, окрім того, закреслюються клітинки «головної діагоналі» *(так як учасники не грають самі з собою)*. Виходячи з приведених міркувань, загальна кількість зіграних партій розраховується за формулою $n = \frac{k \cdot k - k}{2}$. Таке рішення цілком коректне, але колись один зі студентів помітив, що насправді тут можна керуватися самими банальними поєднаннями:

$C_k^2 = \frac{k!}{(k-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)(k-1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2) \cdot 2} = \frac{(k-1)k}{2}$ різних пар можна скласти з *k* суперників*(хто грає білими, хто чорними – неважливо)*.

Еквівалентною є задача про рукостискання: у відділі працюють *k* чоловіків і кожний з кожним вітаються за руку, скільки рукостискань вони здійснюють?

Ну а висновків тут два:

– по-перше,не все очевидне - очевидно;

– і по-друге, не бійтеся вирішувати задачі «нестандартно»!

Поєднання (комбінації) з повтореннями

Суму k кратностей усіх елементів називають порядком сполуки. Сполуку з повтореннями k-го порядку, що складена з множини, яка містить n елементів, називають також комбінацією з повторенням з n елементів по k. Якщо $k_1, k_2, \dots, k_n$– кратності елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$, то за визначенням $k_1 + k_2 + \dots + k_n$є порядок комбінації

$$\overbrace{a_1 a_1 a_1 \dots a_1}^{k_1} \overbrace{a_2 a_2 a_2 \dots a_2}^{k_2} \dots \overbrace{a_n a_n a_n \dots a_n}^{k_n}$$

Кількість вибірок з повтореннями з n елементів по k виражають формулою:

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Характерна особливість цього виду комбінацій полягає в тому, що вибірка проводиться з декількох груп, кожна з яких складається з однакових об`єктів.

Приклад 2.31. В студентській столовій продають сосиски в тісті, ватрушки і пончики. Скількома способами можна купити 5 пиріжків?

*Розв'язок***.** Одразу зверніть увагу на типовий критерій поєднань з повтореннями – за умовою на вибір запропонована ні множина об`єктів як така, а **різні види** об`єктів; при цьому мається на увазі, що в продажу є не менше, ніж 5 хот-догів, 5 ватрушок і 5 пончиків. Пиріжки в кожній групі, зрозуміло, відрізняються – бо абсолютно ідентичні пончики можна змоделювати хіба, що на комп`ютері. Однак фізичні характеристики пиріжків за умовою задачі не суттєві, і хот-доги / ватрушки / пончиків своїх групах вважаються однаковими.

Що може бути у вибірці? По-перше, слід зазначити, що у вибірціобов`язково будуть однакові пиріжки (так як обираємо 5 штук, а на вибір запропоновано 3 види). Варіанти тут на будь-який смак: 5 хот-догів, 5 ватрушок, 5 пончиків, 3 хот-доги + 2 ватрушки, 1 хот-дог + 2 ватрушки + 2 пончики і т.д. Як і при «звичайних» поєднаннях, порядок вибору і розміщення не мають значення – просто обрали 5 штук пиріжків і все.

Застосуємо формулу $C_{n(\text{повт})}^{m} = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)! \cdot m!}$ кількості поєднань з повтореннями: $C_{3(\text{повт})}^{5} = C_{3+5-1}^{5} = C_7^5 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2!} = 21$ способом можна купити 5 пиріжків.

Відповідь: 21

Який висновок можна зробити з багатьох комбінаторних задач? Найскладніше – це розібратися в умові задачі.

Ще декілька задач цього типу:

Приклад 2.32.. У магазині продають 4 сорти тістечок: заварне, білкове, «Грибок», «Нічка». Скількома способами можна купити 8 тістечок?

*Розв'язок.*Розглянемо множину $S = \{$**з,** б, **г,**н$\}$, в якій кожен елемент кодує назву тістечка по першій літері. Будь-який вибір 8 тістечок породжує комбінацію елементів множини S, при цьому порядок запису елементів немає значення. Наприклад, вибравши 2 заварних тістечка, 4 білкових і по одному тістечку інших сортів, маємо комбінацію *ззббббгн,* що є поєднанням з повтореннями з 4 по 8. Навпаки, будь-яке таке поєднання однозначно дасть деякий набір тістечок. Значить, число способів купити вказане число тістечок одне $C^8_{4(повт)} = C^8_{4+8-1} = C^8_{11} = \frac{11!}{3!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11}{6} = \frac{3\cdot 10\cdot 11}{2} = 3\cdot 5\cdot 11 = 165.$

Відзначимо, що можна було зробити підрахунок не по формулі, а безпосередньо, застосувавши процедуру, описану при виведенні цієї формули. Кожен набір з 8 тістечок можна закодувати послідовністю з 8 нулів і 3 одиниць. Наприклад, набору *ззббббгн* відповідає послідовність 11011110101, а набору *ггггнннн* послідовність 00111101111 (заварних і білкових тістечок не обрали жодного). Послідовність 11110011011 однозначно визначає наступний набір тістечок: заварних - 4 штуки, «Грибків»2 штуки, «Нічка» - 2 штуки, білкових немає. Отже, 8 тістечок можна вибрати, (8,3) = 165 числом способів.

Відповідь: 165 способами.

Приклад 2.33. В умовах попереднього прикладу знайдемо, скількома способами можна купити 8 тістечок при додатковій умові: потрібно купити хоча б по одному тістечку кожного сорту.

Розв'язок. Додаткова умова означає,що у вибірці елементів множини S свідомо повинні бути елементи з, б, г, *н.* Приберемо з вибірки по одному елементу кожного типу. Після цього отримаємо поєднання, що містить тільки 4 елементи з тих же 4 сортів. Число таких поєднань$C^3_7 = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35$

Ототожнення набору об'єктів з послідовністю з нулів і одиниць є важливою ідеєю при вирішенні комбінаторних завдань. Цей прийом часто називають***0-1 кодуванням.***

Приклад 2.34.Скількома способами шість однакових олівців можна розподілити між трьома дітьми?

Розв'язок. Так як олівці однакові, то різні способи розподілу олівців між дітьми будуть відрізнятися лише кількістю олівців у кожної дитини. Застосуємо ідею 0-1 кодування. Зобразимо кожен олівець цифрою 1. Отримаємо набір з 6 одиниць. Для того щоб розподілити їх між трьома дітьми, додамо в набір дві цифри 0, що розіб'є 6 одиниць на три групи. Отриманий набір взаємно однозначно розподіляє олівці між дітьми. Наприклад, набір 11101011 означає, що перша дитина отримала три олівця, друга - один олівець, а третя - два олівця. Залишилося порахувати число наборів з двох нулів і шести одиниць, число яких дорівнює Pg (2,6) або C_8^2, тобто 28.

Відповідь: 28.

У всіх розглянутих вище прикладах завдань даного пункту потрібно порахувати число поєднань з повтореннями. Як було доведено, це число можна знайти за формулою поєднань з повтореннями. Проте замість того, щоб переводити завдання на мову поєднань, можна безпосередньо скористатися ідеєю 0-1 кодування, що було продемонстровано в ряді прикладів. У деяких випадках завдання можна вирішити, не вдаючись до ідеї кодування або за формулою.

Приклад 2.35. Серед азартних ігор поширена гра в доміно. Кістка доміно являє собою комбінацію двох чисел, утворену з 7 елементів: 0, 1,2, 3, 4, 5, 6. Комбінації чисел невпорядковані (1: 2 і 2: 1 - це одна і та ж кістка), при цьому можливі повторення чисел (0: 0, 1: 1, 2: 2, ... - так звані дублі). Порахуємо, скільки всього існує кісток доміно.

Розв'язок. Неважко бачити, що кістка – це поєднання з повтореннями з 7 по 2. Їх число можна знайти за формулою $C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 8}{2} 28$.

Знайдемо це число іншим способом. Спочатку переберемо все дублі: їх7. Порахуємо кількість кісток, які не є дублями. Їх число дорівнює числу сполучень (без повторень) з 7 по 2, тобто = 21. Всього маємо 7 + 21 = 28 кісток доміно.

Відповідь: 28 кісток.

З мого особистого досвіду, можу сказати, що поєднання з повтореннями – найбільш рідкісний гість на практиці, чого не скажеш про наступний вид комбінацій:

2.1.5.4. Перестановка (P_n без повторень, $P(k_1, \ldots, k_m)$ з повтореннями) (упорядкована повна вибірка без повторень та з повтореннями).

Перестановка без повторень

Розглянемо задачу упорядкування n -елементної множини A (формування впорядкованої вибірки довжини n , складеної з n -елементної множини).Отримані при цьому вибірки будуть відрізнятися лише порядком слідування елементів. Такі вибірки називають **перестановками без повторень** із n елементів.

Число перестановок без повторень із n елементів позначається P_n. До перестановок без повторень можна прийти, вважаючи, що здійснюється розміщення без повторень із n елементів по n.

Іншими словами**, перестановками** називають комбінації, що складаються з одних тих самих n **різних** об`єктів, які відрізняються тільки порядком їх розташування. Кількість всіх можливих перестановок виражається формулою $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

Відмінною рисою перестановок є те, що в кожній з них приймає участь **вся** множина, тобто **всі** n об`єктів. Наприклад, дружня родина:

Приклад 2.36. Скількома способами можна розсадити 5 людей за столом?

*Розв'язок***.**використаємо формулу кількості перестановок: $P_5 = 5! = 120$

Відповідь: 120 способами

Неймовірно, але факт. Зверніть увагу на те, якої форми стіл або взагалі всі люди сіли ~~встали полягали~~ на на лавку вздовж стіни – важлива лише кількість об`єктів і їх взаємне розташування.

Приклад 2.37. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з чотирьох картокз цифрами 0, 5, 7, 9? Для того, щоб скласти чотиризначне число необхідно застосувати всі чотири картки*(цифри на яких **різні!**)*, і це дуже важливо усвідомити для застосування формули $P_n = n!$ Вочевидь, що, переставляючи картки, ми будемо отримувати різні чотиризначні числа, … стоп, а тут все в порядку? ;-) Взагалі, це характерна риса комбінаторних і ймовірнісних задач – в них **необхідно думати**. І часто думати по-життєвому. Ні, звісно, я не пропоную тупо пророблятиінші розділи математики, але й інтеграли можна навчитися вирішувати механічно.

*Розв'язок***.** знайдемо кількість всіх можливих перестановок 4 карток:

Коли картка з нулем опиняється на 1-му місці, то число стає тризначним, тому дані комбінації слід виключити. Якщо нуль знаходиться на 1-му місці, тоді 3 цифри, що залишилися в молодших розрядах, можна переставити способами:

0579

0597

0759

0795

0957

0975

Примітка: так як карток небагато, то тут не складно перерахувати всі такі варіанти.

Таким чином, з запропонованого набору можна скласти: 24 – 6 = 18 чотиризначних чисел.

Відповідь: 18

Перестановки з повтореннями

При визначенні **перестановок без повторень** ми розглядали ситуацію, коли
у початковій n -множині A всі елементи унікальні. Однак існують ситуації, коли множина може містити деяку кількістьоднотипних елементів.

Визначення. Число різних перестановок, які можна побудувати з nелементів, серед яких k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другоготипу,…, k_m елементів m -го типу, дорівнює: $P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$

В перестановках з повторенням , як і в «звичайних» перестановках приймає участь **одразу вся множина об`єктів**, але є одне але: в даній множині один або більша кількість елементів (об`єктів) повторюються. Зустрічайте ще один стандарт:

Приклад 2.38. Скільки різник сполучень літер можна отримати перестановкою карток з наступними літерами: К, О, Л, О, К, О, Л, Ь, Ч, И, К?

*Розв'язок***.**В тому випадку, коли всі літери були б різними , то слід було б застосувати банальну формулу P_n, однак зрозуміло, що для запропонованого набору карток деякі маніпуляції будуть спрацьовувати «вхолосту», так, наприклад, якщо поміняти місцями будь-які дві картки з літерами «К» в будь-якому слові, то отримаємо те ж саме слово. Причому, фізично картки можуть сильно відрізнятися одна від одної: одна може бути круглою з надрукованою літерою «К», інша – квадратна з намальованою літерою «К». Але в нашій задачі навіть такі картки **вважаються однаковими**, оскільки за умовою питають про сполучення літер.

Все дуже просто – всього: 11 карток, серед яких літера:

К – повторюється 3 рази;

О – повторюється 3 рази;

Л – повторюється 2 рази;

Ь – повторюється 1 раз;

Ч – повторюється 1 раз;

И – повторюється 1 раз.

Перевірка: 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 11, що потрібно було довести.

За формулою **кількості перестановок з повтореннями**: $P_{11(повт)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{39916800}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 554400$ різних сполучень літер можна отримати. Більше, ніж півмільони!

На практиці вважається припустимим не записувати загальну формулу і, окрім того, опускають одиничні факторіали: $P_{11(повт)} = \frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{39916800}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 554400$

Але попередні коментарі про повторювані літери обов`язкові!

Відповідь: 554400.

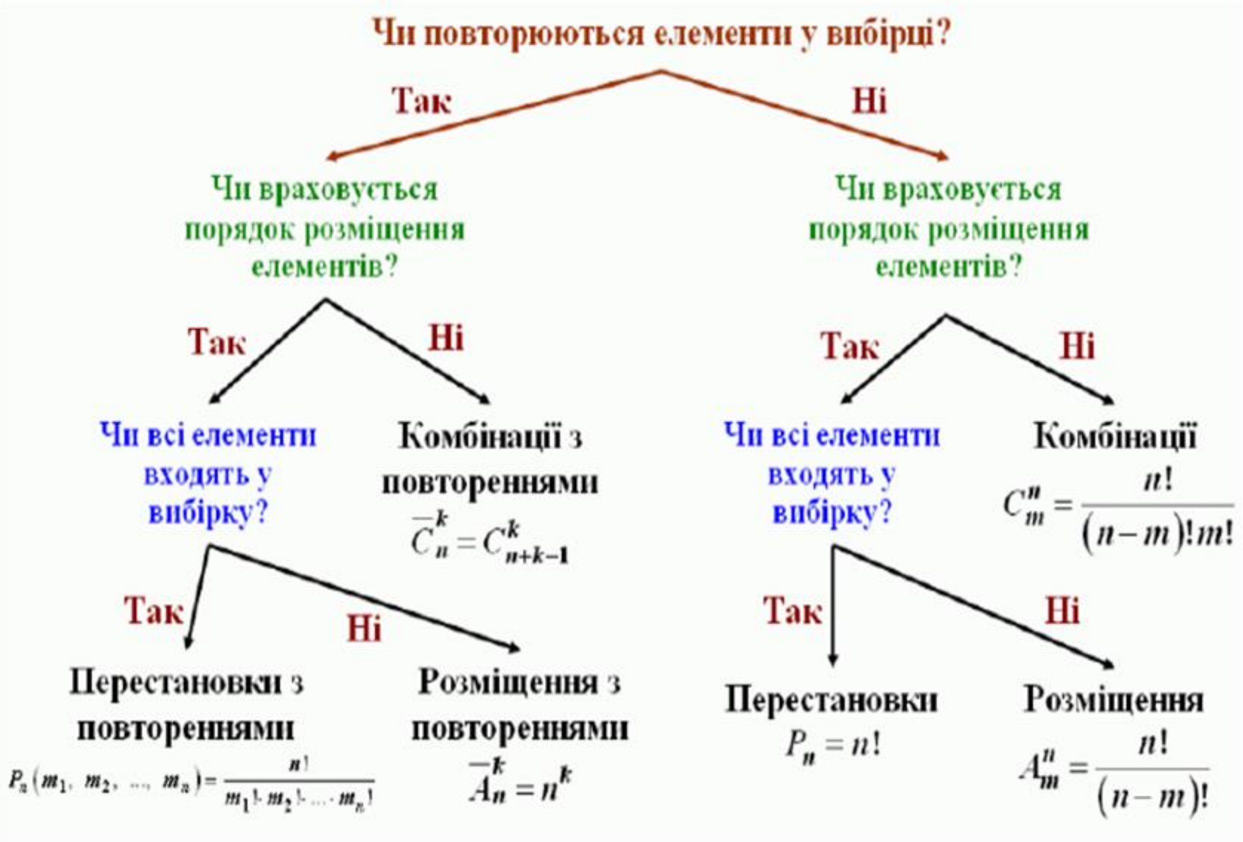


Рис.2.13. Алгоритм вибору комбінаторної схеми

2.1.6. Розбиття множини на підмножини

Нехай дана n -множина A. Говорять, що множина A розбита на k підмножин A_i, де (1, 2, ..., k), якщо:

1. $A_i \neq \emptyset$, $i \in \{1,2,\ldots,k\}$;

2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i,j \in \{1,2,\ldots,k\}$;

3. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$.

Позначимо число елементів у підмножині A_i через $n(A_i) = n_i$. Очевидно, що $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Кількість розбиттів множини на підмножини позначимо: $C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)$

Визначимо кількість розбиттів

Кількість способів вибору елементів підмножини A_1 дорівнює кількостісполук $C_n^{n_1}$.

Кількість способів вибору елементів підмножини 2 Aдорівнює кількості $C_{n-n_1}^{n_2}$.

Кількість способів вибору цих двох підмножин дорівнюєі $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2}$так далі.

Таким чином, кількість вибору всіх розбиттів дорівнює: $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$

$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Порівняємо даний вираз з формулою для перестановок з повтореннями.

$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Порівняємо даний вираз з формулою для перестановок з повтореннями. Можна зробити висновок, що **явище розбиття множини на підмножиний перестановки з повтореннями** – це та сама комбінаторна дія з різноюінтерпретацією.

Приклад 2.39. Із пропорції $C_x^y : C_x^{y-1} : C_x^{y-2} = 3:3:2$знайти x і y.

Розв'язок. Записавши окремо відношення першого члена пропорції до другого й другого до третього, після скорочення одержимо:

$$\frac{x!}{y!\,(x-y)!} : \frac{x!}{(y-1)!\,(x-y+1)!} = \frac{(y-1)!\,(x-y+1)!}{y!\,(x-y)!}$$
$$= \frac{(y-1)!\,(x-y)!\,(x-y+1)}{y!\,(x-y)!} = \frac{(x-y+1)}{y}$$

$$\frac{x!}{(y-1)!\,(x-y+1)!} : \frac{x!}{(y-2)!\,(x-y+2)!} = \frac{(y-2)!\,(x-y+2)!}{(y-1)!\,(x-y+1)!}$$
$$= \frac{(y-2)!\,(x-y+1)!\,(x-y+2)}{(y-2)!\,(y-1)(x-y+1)!} = \frac{(x-y+2)}{y-1}$$

З умови задачі отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{(x-y+1}{y} = 1 \\ \frac{(x-y+2}{(y-1)} = \frac{3}{2} \end{cases}$

Розв'язуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$x - y + 1 = y;\ x = 2y + 1.$
$2x - 2y + 4 = 3y - 3;\ 2x = 5y - 7.$
$4y - 2 = 5y - 7;\ y=5; x=9.$

2.1.7.Тотожності для поєднань (комбінацій)

Основна формула кількості поєднань: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ дозволяє одержати ряд простих тотожностей. Розглянемо деякі з них.

Теорема 2.1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доведення. $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$

Теорема 2.2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Доведення. $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\big(n-1-(k-1)\big)!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)(n-k-1)!} =$$
$$= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)(n-k-1)!} = \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k$$

Теорема 2.3. $C_n^i C_i^k = C_n^k C_{n-k}^{i-k}$.

Доведення. $C_n^i C_i^k = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} = \frac{n!}{k!(i-k)!(n-i)!} =$

$$= \frac{n!(n-k)!}{k!(i-k)!(n-i)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} = C_n^k \cdot C_{n-k}^{i-k}.$$

Теорема 2.4. Біном Ньютона: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.

$(x + y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^k x^{n-k} y^k + \ldots + C_n^k y^k$,

або $(x + y)^n = x^n + n x^{n-1} y + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} x^{n-k} y^k + \ldots + y_n$, де n – натуральне число і $C_n^k x^{n-k} y^k = T_{k+1}$ є $(k + 1)$-й член в розкладі біному $(k = 0,1,2, \ldots, n)$.

Наслідок 1. Сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Наслідок 2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

Теорема 2.5. $\sum_{k0}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$.

Теорема 2.6. $C_{n+k}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_k^{k-i}$

Приклад 2.40. Команда деякої ЕОМ записується у вигляді набору з восьми цифрових знаків – нулів і одиниць.Яка максимальна кількість різних команд?
*Розв'язок.*Так як для кожного набору можливі лише два значення (0 або 1), то максимальна кількість різних команд є $\underbrace{2\cdot 2 ... \cdot 2} = 256$. Можна розмірковувати інакше. Розглянути всі двійкові числа від 00000000 до 11111111. Таких чисел текож буде 256.

Приклад 2.41. В розкладі $(1+x^n)$четвертий член дорівнює 0,96. Знайти значення x іn, якщо сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює1024.
Розв'язок. Так як сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n, а
$1024 = 2^{10}$, то n=10. Четвертий член рзкладу $T_4 = C_n^3 x^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 = 120x^3$.
Згідно з умовою, $120x^3 = 0{,}96$,
Звідки $x^3 = 0{,}008$, тобто x=0,2.

Приклад 2.42. При яких значеннях x і yможлива рівність $C_y^x : C_{y+2}^x : A_y^x = 1:3:24$?
Розв'язок. Застосовуючи формули маємо: $\frac{y!}{x!(y-x)!} : \frac{(y+2)!}{x!(y-x+2)!} = \frac{1}{3}; C_y^x : \left(x! \cdot C_y^x\right) = 1:24$

З другого рівняння, отримаємо $x! = 24$, тобто x=4, оскільки (24=1*2*3*4), а з першого рівняння знаходимо $\frac{(y-x+1)(y-x+2)}{(y+1)(y+2)} = \frac{1}{3}$.
Так як x=4, то $y^2 - 9y + 8 = 0$, звідки y=1 і y=8. y=1не задовольняє умові ($y > x = 4$). Отже x=4; y=8.

Приклад 2.43. Довести тотожність: $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$
Розв'язок. Маємо $P_{n-1} = (n-1)!; P_{n-2} = (n-2)!$ Таким чином $(n-1)\big((n-1)! + (n-2)!\big) = (n-1)(n-2)!\,(n-1+1) = n! = P_n$

Приклад 2.44. Довести тотожність: $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$.
Розв'язок. Ліва частина шуканої тотожності$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$ а права частина $\frac{\boldsymbol{m}!}{\boldsymbol{k}!(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{k})!} \cdot \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{m}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})!} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{k})!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})!}$ **.** Отже тотожність доведено.

Приклад 2.45. При якому значенні x четвертий доданок розкладу $\left(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$в 20 разів більший за m, якщо біноміальний коефіцієнт 4-го доданку відноситься до біноміального коефіцієнту 2-го доданку, як 5:1?

Розв'язок. Біноміальні коефіцієнти 4-го і 2-го доданків дорівнюють відповідно C_m^3 і m. Отже, $\frac{m(m-1)(m-2)}{3!m} = 5$, або $(m-1)(m-2) = 30$. Звідки m=7. Тоді 4-й доданок розкладу має вигляд $T_4 C_3^7 2^{2(x-1)x\frac{1}{2^x}}$ і приходимо до рівняння $C_7^3 2^{x-2} = 140$, звідки знаходимо $\frac{7\cdot6\cdot5}{6}2^{x-2} = 140;\ 2^{x-2} = 4$; x=4

Приклад 2.46. Вирішити рівняння $\frac{A_{x+1}^{y+1}P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72.$

*Розв'язок.*Маємо$A_{x+1}^{y+1} = (x+1)!\,(x-y)!$; $P_{x-y} = (x-y)!$; $P_{x-1} = (x-1)!$ звідки$\frac{(x+1)!(x-y)!}{(x-y)!(x-1)!} = 72$ або $x(x+1) = 72$, тобто x=8. Враховуючи, що $x-y > 0$ і y – ціле число, отримуємо y=0, y=1,…,y=7.

Приклад 2.47.Вирішити систему рівнянь $\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$,

Розв'язок. З другого рівняння маємо: (x+1)!=720. Так як 720=6!, то x=5. Враховуючи, що $C_y^{y-x} = C_y^x$ перепишемо перше рівняння таким чином: $A_y^5 : P_4 + C_y^5 = 126$. Але $A_y^5 : P_4 = 5C_y^5$звідки $6C_y^5 = 126$або $y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4) = 21\cdot120$. Далі маємо $21\cdot120 = 2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7 = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$, тобто y=7.

Приклад 2.48. Довести тотожність $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Розв'язок. Перетворимо ліву частину рівності

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)$$
$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$$

Але $C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$ і тотожність доведено.

Приклад 2.49. Знайти найбільший біноміальний коефіцієнт розкладу $\left(n + \frac{1}{n}\right)^n$ якщо добуток 4-го від початку і 4-го з кінця доданків дорівнює 14400.

Розв'язок. Четвертий доданок спочатку має вигляд $T_4 = C_n^3 n^{n-3}\frac{1}{n^3}$, а 4-й доданок від кінця – вид $T_{n-2} = C_n^{n-3} n^3 \frac{1}{n-3}$. Відповідно $T_4 T_{n-2} = (C_n^3)^2 = 14400$, звідки $C_n^3 = 120$. Далі маємо $n(n-1)(n-2) = 720$; $n(n-1)(n-2) = 10\cdot9\cdot8$; n=10. Отже, найбільший біноміальний коефіцієнт, що входить в доданок, однаково віддалений від кінців розкладу є $C_{10}^5 = 252$.

Приклад 2.50. Сума третього від початку і третього від кінця біноміальних членів розкладу$\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4}$дорівнює 9900. Скільки раціональних членів містить цей розклад?

Розв'язок. Вказані в умові коефіцієнти дорівнюють C_n^2. Маємо $\frac{2\cdot n(n-1)}{2}=$ 9900або $n(n-1)=100\cdot 99$, звідки *n*=100. Тоді $T_{k+1}=C_{100}^k 3^{(100-k)/4}4^{k/3}$; згідно з умовою *k*/3 і $(100-k)$: 4 - цілі числа, тобто *k* ділиться на 12. Для *n*=100 таких чисел є $\left[\frac{100}{12}\right]+1=9$.

Рішення комбінаторних рівнянь

Приклад 2.51. $A_x^2=42$

Розв'язок. ОДЗ: $x\in N; x\geq 2$ $\frac{x!}{(x-2)!}=42$ $\frac{(x-2)!(x-1)x}{(x-2)!}=42$

$$x^2-x-42=0$$

$x_1=-6$ (виключити – не входить в ОДЗ); $x_2=7$

Відповідь: 7.

Приклад 2.52. $5C_x^3=C_{x+2}^4$;

*Розв'язок.*ОДЗ:$\begin{cases}x\geq 3\\ x+2\geq 4\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 3\\ x\geq 4-2\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 3\\ x\geq 2\end{cases}$ $x\geq 3$

$C_x^3=\frac{x!}{3!(x-3)!}$ $C_{x+2}^4=\frac{(x+2)!}{4!(x-2)!}$;

$$\frac{5(x-3)!\,(x-2)(x-1)x}{3!\,(x-3)!}=\frac{(x-2)!\,(x-1)x(x+1)(x+2)}{4!\,(x-2)!}$$

$$\frac{5(x-2)(x-1)x}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$20(x-2)(x-1)x=(x-1)x(x+1)(x+2)$$

$$20(x-2)=(x+1)(x+2)$$

$$20x-40=x^2+3x+2$$

$x^2-17x+42=0$; $x_1=0$; $x_2=1$ - корені 0 і 1 не входятьдо ОДЗ; $x_3=3$; $x_4=14$

Відповідь: 3; 14.

Приклад 2.53.$\begin{cases}A_x^y:A_x^{y-1}=10\\ C_x^y:C_x^{y-1}=\frac{5}{3}\end{cases}$ ОДЗ:$\begin{cases}x\geq y\\ y\geq N\\ x\in N\end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} : \dfrac{x!}{(x-y+1)!} = 10 \\ \dfrac{x!}{(x-y)!\,y!} : \dfrac{x!}{(y-1)!\,(x-y+1)!} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} \cdot \dfrac{(x-y+1)!}{x!} = 10 \\ \dfrac{x!}{(x-y)!\,y!} \cdot \dfrac{(y-1)!\,(x-y+1)!}{x!} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-y)!\,(x-y+1)}{(x-y)!} = 10 \\ \dfrac{(y-1)!\,(x-y+1)!}{(x-y)!\,y!} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1 = 10 \\ \dfrac{x-y+1}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 9 \\ 3x-8y = -3 \end{cases}$$

$\begin{cases} -3x+3y = -27 \\ 3x-8y = -3 \end{cases}$ вирішуємо методом додавання $-5y = -30$; y=6; x-6=9; x=15.

Відповідь: (15; 6).

Приклад 2.54. $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x \\ C_{x-1}^{y} = 10 \end{cases}$ ОДЗ:$\begin{cases} x > y+1 \\ x-1 > y \\ x > 0, y > 0, x > 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x!}{(x-(y+1))!\,(y+1)!} = 2{,}5 \\ \dfrac{(x-1)!}{\big(x-(y+1)\big)!\,y!} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-1)!}{\big(x-(y+1)\big)!\,(y+1)y!} = 2{,}5x \\ \dfrac{(x-1)!}{\big(x-(y+1)\big)!\,y!} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+1} = 0{,}25x \\ \dfrac{(x-1)!}{\big(x-(y+1)\big)!\,y!} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = 4 \\ \dfrac{(x-1)!}{\big(x-(y+1)\big)!\,y!} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{(x-1)!}{(x-4)!\,3!} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{(x-4)!\,(x-3)(x-2)(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (x-4)!} = 10 \end{cases}$$

(x-3)(x-2)(x-1) = 60

(x-3)(x-2)(x-1) = 3· 4 · 5

x-3 = 3; x=6

Відповідь: (6;3)

Приклад 2.55. $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 8 \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1{,}6 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} : \dfrac{x!}{\big(x-(y-1)\big)!} = 8 \\ \dfrac{x!}{(x-y)!\,y!} : \dfrac{x!}{(y-1)!\big(x-(y-1)\big)!} = 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} \cdot \dfrac{\big(x-(y-1)\big)!}{x!} = 8 \\ \dfrac{x!}{(x-y)!\,y(y-1)!} \cdot \dfrac{(y-1)!\big(x-(y-1)\big)!}{x!} = 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-(y-1) = 8 \\ \dfrac{(x-y)!\big(x-(y-1)\big)}{(x-y)!\,y} = 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+1 = 8 \\ \dfrac{8}{y} = 1{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 7 \\ y = 8:1{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7+5 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \end{cases}$$

Відповідь: (12;5)

Ще декілька прикладів знаходження коефіцієнтів розкладу многочлену за формулою бінома Ньютона:

Приклад 2.56. Написати розкладза формулою бінома Ньютона іспростити $(a+b)^4$.

Розв'язок:$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0\, b^4 =$ $\frac{4!}{0!4!} a^4 + \frac{4!}{1!3!} a^3 b + \frac{4!}{2!2!} a^2 b^2 + \frac{4!}{3!1!} a b^3 +$

$$+\frac{4!}{4!\,0!} b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Прикад 2.57. Знайти алгебраїчну суму коефіцієнтів многочлену відносно x, який отриманий розкладом бінома Ньютона $(3x-4)^{17}$.

Розв'язок.

$$(3x-4)^{17} = C_{17}^0 (3x)^{17}(-4)^0 + C_{17}^1 (3x)^{16}(-4)^1 + C_{17}^2 (3x)^{15}(-4)^2 + C_{17}^3 (3x)^{14}(-4)^3 + \ldots + C_{17}^{17}(3x)^0(-4)^{17}.$$

Ця рівністьистинна при будь-якихзначеннях x.

При $x = 1$ ліва частинадорівнює $(3-4)^{17} = (-1)^{17} = -1$, а в правій частині отримуємо алгебраїчну суму коефіцієнтів: $C_{17}^{0}3^{17}(1)^{17} + C_{17}^{1}3^{16}1^{16}(-4)^{1} + C_{17}^{2}3^{15}1^{15}(-4)^{2} + \ldots + C_{17}^{17}(-4)^{17} =$
$= C_{17}^{0}3^{17} - 4\cdot 3^{16}C_{17}^{1} + 16\cdot 3^{15}C_{17}^{2} + \ldots + (-4)^{17}\cdot C_{17}^{17}$

Отже алгебраїчна сума коефіцієнтів даного многочленудорівнює –1.

Приклад 2.58. Знайти 13-й член розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{15}$.

Розв'язок. Згідно з формулоюзагального члену розкладу бінома,

$$T_{13} = T_{12+1} = C_{15}^{12}\left(\sqrt[3]{3}\right)^{3}\left(\sqrt{2}\right)^{12} = C_{5}^{3}\cdot 3\cdot 2^{6} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3\cdot 2^{6} = 87360$$

Приклад 2.59. Знайти номер члена розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{16}$, що не містить x.

Розв'язок. Для загального члена розкладу маємо $T_{m+1} = C_{16}^{m}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-m}\left(\frac{1}{x}\right)^{m} = C_{16}^{m}x^{\frac{16-m}{3}}x^{-m} = C_{16}^{m}x^{\frac{16-4m}{3}}$.

Член розкладу не залежить від x; це означає, що показник степені x дорівнює 0, тількитоді, коли $\frac{16-4m}{3} = 0,$ $16 - 4m = 0$, $m = 4$. Отже, п`ятий член даного розкладу не залежитьвід x.

Приклад 2.60. Побудувати трикутник Паскаля для знаходження коефіцієнтів розкладу бінома Ньютона $(a+b)^7$.

Розв'язок.

n	C_n^m
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

7	1 7 21 35 35 21 7 1
	C_7^0 C_7^1 C_7^2 C_7^3 C_7^4 C_7^5 C_7^6

Приклад 2.61. Знайти найбільший член розкладу $\left(\sqrt{\mathbf{5}}+\sqrt{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{20}}$.

Розв'язок. За умовою маємо: $T_{m+1} > T_m$ і $T_{m+1} > T_{m+2}$, тобто

$$\begin{cases} C_{20}^m \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{20-m} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^m > C_{20}^{m-1} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{20-m+1} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{m-1} \\ C_{20}^m \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{20-m} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^m > C_{20}^{m+1} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{20-m-1} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{20!}{m!\,(20-m)!} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^{20}}{\left(\sqrt{5}\right)^m} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^m > \dfrac{20!}{(m-1)!\,(20-m+1)!} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^{21}}{\left(\sqrt{5}\right)^m} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^m}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{20!}{m!\,(20-m)!} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^{20}}{\left(\sqrt{5}\right)^m} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^m > \dfrac{20!}{(m+1)!\,(20-m-1)!} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^{19}}{\left(\sqrt{5}\right)^m} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\mathbf{20\sqrt{2}-\sqrt{5}}}{\mathbf{\sqrt{5}+\sqrt{2}}} < m < \dfrac{\mathbf{21\sqrt{2}}}{\mathbf{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$, 7,1<*m*<8,1

Відповідь: m=8. Тоді $T_{m+1} = T_9 = C_{20}^8 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{12} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^8 = \frac{20!}{8!2!} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{12} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^8 = 314925 \cdot 10^5$- 9-й член розкладу.

Приклад 2.62. При яких значеннях *х* найбільшим членом розкладу $(\mathbf{5}+\mathbf{3x})^{\mathbf{10}}$є четвертий?

Розв'язок. За умовою маємо: $\begin{cases} T_4 > T_3 \\ T_4 > T_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^3 \cdot 5^7 \cdot (3x)^3 > C_{10}^2 \cdot 5^8 \cdot (3x)^2 \\ C_{10}^3 \cdot 5^7 \cdot (3x)^3 > C_{10}^4 \cdot 5^6 \cdot (3x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} \cdot 5^7 \cdot (3x)^3 > \dfrac{10!}{4!\cdot 6!} \cdot 5^6 \cdot (3x)^4 \\ \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} \cdot 5^7 \cdot (3x)^3 > \dfrac{10!}{2!\cdot 8!} \cdot 5^8 \cdot (3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{7} > \dfrac{3}{4}x \\ x > \dfrac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{20}{21} \\ x > \dfrac{5}{8} \end{cases}.$$

Відповідь: $\frac{5}{8} < x < \frac{20}{21}$**.**

<u>Обов'язкові завдання</u>

1.Вирішити рівняння $\frac{P_{x+3}}{A_x^5 P_{x-5}} = 720$.

2. Вирішити систему рівнянь:$\begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 90 \\ A_x^y - 2C_x^y = 40 \end{cases}$.

3. Знайти *x* і *y*, якщо

а) $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6:5:2$;

б) $C_x^{y-1} : \left(C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}\right) : C_x^{y+1} = 3:5:5$

4. Різниця між третім біноміальним членом розкладів$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}$і$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$дорівнює 225. Знайти кількість раціональних членів розкладу$\left(\sqrt[5]{\boldsymbol{x}}+\sqrt[9]{\boldsymbol{y}}\right)^{\boldsymbol{n}}$.