

Виберіть форму подання навчального матеріалу

✓ Докладне подання

[Скорочене подання](#)

8. Ферми

Зміст глави

[8.1. Особливості кінематичного аналізу ферм](#)

[8.2. Розрахунок ферм](#)

[8.2.1. Загальний спосіб розрахунку](#)

[8.2.2. Способи визначення зусиль у стержнях](#)

[Спосіб вирізання вузлів](#)

[Окремі випадки рівноваги вузлів ферми](#)

[Спосіб наскрізних перерізів](#)

[Спосіб сумісних перерізів](#)

[Особливість розрахунку ферм Полонсо](#)

[Особливість розрахунку ферм Шухова](#)

[8.3. Приклади визначення внутрішніх зусиль у стержнях ферм](#)

[Запитання для самоперевірки](#)

8.1. Особливості кінематичного аналізу ферм

Фермою називається стержнева система, що складається із прямолінійних стержнів, які з'єднуються між собою у вузлах за допомогою наскрізних шарнірів.

Розглянемо основні терміни, які прийнято вживати щодо елементів ферми. Вони запозичені з конструкцій кроквяних ферм, що є найбільш поширеними у практиці будівництва. Стержні ферми поділяються (рис.8.1) на верхній і нижній пояси та грати. Грати складаються з похилих стержнів –

розкосів та вертикальних – стійок. Розтягнуті стійки іноді називають підвісками. Стійки та розкоси, які розташовані біля опори, називають опорними.

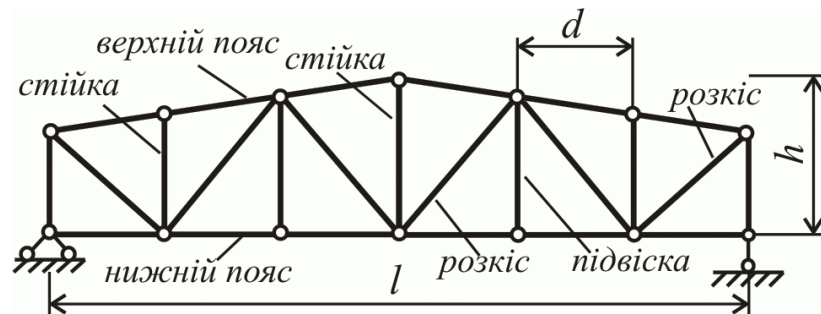


Рис.8.1

Горизонтальна проекція відстані між опорами ферми l називається її прогоном. Горизонтальна проекція d відстані між суміжними вузлами верхнього або нижнього поясів називається відповідно верхньою або нижньою панеллю. Найбільша відстань h між вузлами верхнього і нижнього поясів називається висотою ферми.

Ферми вельми поширені в будівництві. Вони використовуються як основна несуча конструкція в покрівлях промислових і цивільних споруд великого прогону, підкранових балках, залізничних і автодорожніх мостах, потужних кранах тощо. На рис.8.2 зображено кілька розрахункових схем ферм.

З-поміж них за характером опорних закріплень розрізняються балкові (рис.8.2,а,в), консольні (рис.8.2,г), консольно-балкові (рис. 8.2,в), багатопрогонові консольно-балкові (рис.8.2,д), розпірні (рис. 8.2,б) ферми.

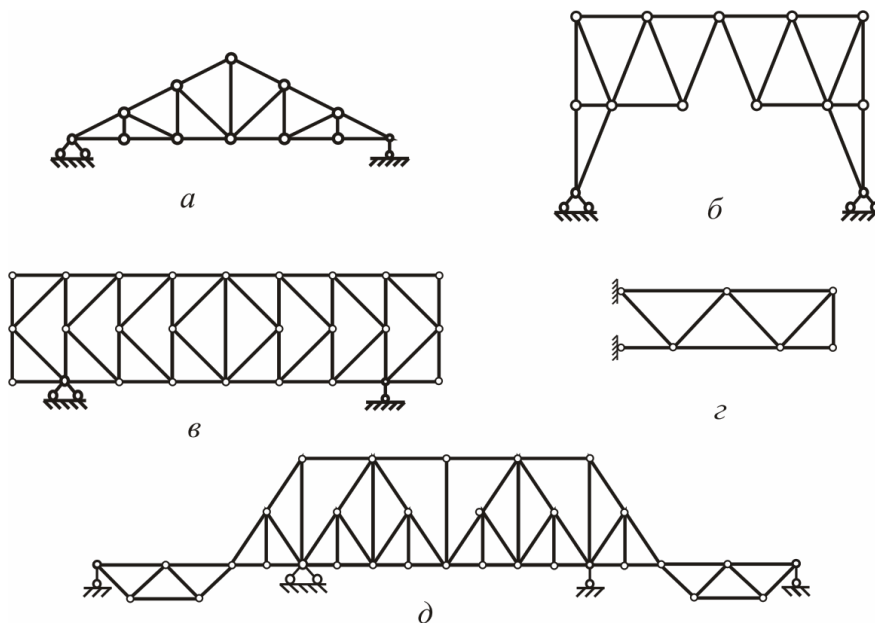


Рис.8.2

Насправді, стержні у вузлах ферм з'єднуються жорстко, за допомогою зварювання, на заклепках чи болтах. Але через велику гнучкість стержнів урахування жорсткості їхнього

з'єднання неістотно позначається на розподілі зусиль у стержнях ферми, значною мірою збільшуючи трудомісткість їхнього розрахунку, оскільки система стає в такому разі статично невизначуваною. Тому в розрахунковій схемі ферми покладають, що в усіх її вузлах встановлені ідеальні наскрізні шарніри, а зовнішні навантаження прикладаються до вузлів.

Якщо на відокремлений від конструкції стержень з двома шарнірами на кінцях не діють зовнішні сили, він перебуває у стані рівноваги під дією двох сил взаємодії із рештою конструкції. Така система сил може бути зрівноваженою тільки в тому випадку, коли обидві сили розташовані на одній прямій. Отже, на не завантажений стержень ферми діють сили, спрямовані вздовж прямої, що з'єднує її кінці. Таким чином, у прямолінійних стержнях ферми, які не мають місцевого поперечного навантаження, можуть виникати лише поздовжні зусилля. Згинальні моменти та поперечні сили відсутні. Відсутність згину стержнів дозволяє обирати менші розміри їх поперечного перерізу, порівняно зі стержнями, що згинаються.

При використанні ферми як несучого елемента споруди необхідно застосовувати конструктивні заходи, які забезпечують навантаження ферм лише у вузлах, щоб уникнути дії на стержні місцевих сил. Тоді у стержнях виникають тільки притаманні ним поздовжні зусилля, що приводить до істотної економічності ферм порівняно з балками.

Ферма складається з прямолінійних стержнів, які з'єднуються між собою наскрізними шарнірами. Тому при виконанні кінематичного аналізу стержні ферми можуть розглядатись як кінематичні в'язі, а шарнірні вузли – як вузли в'язей. Якщо ферма прикріплена до землі, у формулі Чебишова (2.1) маємо $D=1$. В такому випадку для прикріпленої до землі ферми формула Чебишова набуває спрощеного вигляду

$$G = 2B - C. \quad (8.1)$$

Отже, для прикріпленої до землі геометрично незмінюваної статично визначуваної ферми ($G=0$), звідки

$$C = 2B \quad (8.2)$$

Тут C – загальна кількість стержнів, B – кількість вузлів ферми.

При виконанні якісного етапу кінематичного аналізу ферми доцільно, прийнявши якийсь її стержень як перший диск, намагатись надалі приєднувати вузли за допомогою способу “діади” і тільки в разі неможливості на якомусь етапі застосувати цей спосіб переходити до інших способів. Означений прийом дозволяє класифікувати статично визначувані ферми за способом їх утворення і надалі обирати раціональний шлях їх розрахунку.

Так, ферми, повністю створені за способом “діади”, належать до класу, так званих,

найпростіших. Ферми, укрупнені диски в яких створені за способом “діади” і з’єднуються за способами Полонсо чи Шухова, належать до класів ферм Полонсо чи Шухова відповідно.

8.2. Розрахунок ферм

Розрахунок ферми полягає у визначенні зусиль в її стержнях. Він може виконуватись статичним або кінематичним методом.

Визначення зусиль у стержнях ферми статичним методом виконується за допомогою модифікацій загального методу перерізів: способів вирізання вузлів, наскрізних перерізів і сумісних перерізів.

Вибір способу визначення зусиль має забезпечувати найменшу трудомісткість обчислень.

8.2.1. Загальний спосіб розрахунку

За цим способом замкненим перерізом вирізається будь-який вузол k ферми. До відокремленого k -го вузла (рис.8.3) прикладаються зусилля в розрізаних стержнях, тобто сили N_{ik} взаємодії вузла з рештою ферми, і проекції P_{kx} і P_{ky} на осі OX і OY зовнішніх зосереджених сил, прикладених в цьому вузлі.

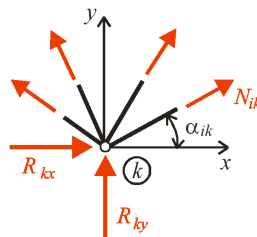


Рис.8.3

Зусилля N_{ik} доцільно спрямовувати в додатному напрямі, щоб вони розтягували стержень, тобто були направлені від вузла.

Для прикладеної до вузла збіжної системи сил можна скласти два рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad \sum N_{ik} \cos \alpha_{ik} + P_{kx} = 0; \\ \sum F_y = 0; & \quad \sum N_{ik} \sin \alpha_{ik} + P_{ky} = 0, \end{aligned} \quad (8.3)$$

де α_{ik} – кут між додатними напрямками зусиль N_{ik} і осі ox в k -му вузлі, а кількість доданків під знаком суми збігається із кількістю стержнів, що приєднуються до k -го вузла.

Якщо скласти рівняння (8.3) рівноваги всіх B вузлів ферми, до яких поряд із зусиллями в стержнях ввійдуть також реакції в опорних пристроях, буде отримано $2B$ рівнянь, що дорівнює (ф-ла 8.2) кількості її стержнів. Таким чином може бути одержана система сумісних лінійних рівнянь, розв’язання якої дає змогу визначити зусилля в стержнях ферми.

Подавши системи рівнянь (8.3) для всіх вузлів у матричному записі, дістанемо раніше наведені (ф-ла 4.14) рівняння рівноваги ферми:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{F}}, \quad (8.4)$$

де $\bar{\mathbf{S}}$ – вектор зусиль N_1, N_2, \dots, N_n у стержнях ферми, включаючи опорні стержні (n – кількість всіх стержнів ферми); $\bar{\mathbf{F}}$ – вектор складових вузлових сил $P_{1x}, P_{1y}, P_{2x}, P_{2y}, \dots, P_{mx}, P_{my}$ (m – кількість всіх вузлів ферми, $m = n/2$); \mathbf{A} – матриця розміром $n \times n$, коефіцієнти якої дорівнюють $\cos \alpha_{ik}$, $\sin \alpha_{ik}$ або нулю.

Матриця \mathbf{A} рівноваги для геометрично незмінюваної ферми не є особливою, тобто $\det \mathbf{A} \neq 0$, тому зусилля в стержнях ферми можна визначити з системи рівнянь (8.4):

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{F}}, \quad (8.5)$$

де \mathbf{A}^{-1} – матриця, обернена до матриці рівноваги \mathbf{A} .

Нагадаємо, що результат $\det \mathbf{A} = 0$ (тобто матриця \mathbf{A} є особливою) свідчить про геометричну змінюваність, якщо не виконується умова (8.2), або миттєву змінюваність ферми у тих випадках, коли (8.2) виконано.

У переважній більшості випадків розв'язання сумісної системи рівнянь (8.4) пов'язано з трудомісткими обчислювальними роботами. Тому викладений спосіб найчастіше застосовується при виконанні розрахунків із використанням комп'ютерів.

8.2.2. Способи визначення зусиль у стержнях

Розрахунок переважної більшості ферм можна досить швидко та просто виконати без застосування комп'ютера, скориставшись звичайним калькулятором.

У цьому випадку починати розрахунок слід із визначення реакцій опор, а потім обчислювати зусилля в стержнях ферми. Головне завдання полягає в уникненні необхідності розв'язувати системи сумісних рівнянь. Цієї мети можна досягти за допомогою традиційних способів розрахунку, вибираючи для кожного стержня найзручніший спосіб.

Спосіб вирізання вузлів. За цим способом замкненим перерізом вирізається вузол ферми. Але, на відміну від загального способу розрахунку, вирізати треба тільки такий вузол, в якому збігається не більш як два стержні, зусилля в яких ще не відомі. Це пов'язано з тим, що прикладені до вузла зусилля в перерізаних стержнях і зовнішня зосереджена сила становлять збіжну систему сил, для якої можна скласти два рівняння рівноваги. Для того щоб зусилля в кожному з двох стержнів обчислювались з окремих незалежних рівнянь, рівняння рівноваги вузла слід складати у

вигляді суми проекцій на вісі, перпендикулярні до іншого стержня з невідомим зусиллям. Наприклад, для зображеного на рис.8.4 вузла зусилля N_1 і N_2 можна визначити з рівнянь

$$\sum F_{y1} = 0; \quad \sum F_{y2} = 0,$$

де вісь y_1 перпендикулярна до зусилля N_1 , а вісь y_2 – до зусилля N_2 .

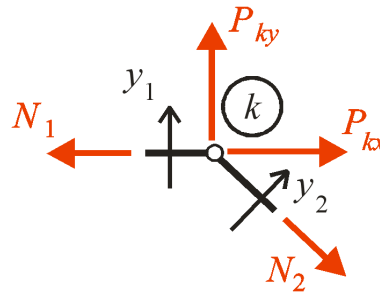


Рис.8.4

Якщо почати визначення зусиль з вузла, в якому з'єднуються тільки два стержні, а потім послідовно переходити до вирізання вузлів, в яких залишилися невідомими лише два зусилля, а решту зусиль, що вже визначені при дослідженні попередніх вузлів, прикладати з їх напрямом і величиною, можна обчислити зусилля в усіх стержнях найпростішої ферми.

Так для ферми, представлені на рис.8.5,а, в першу чергу необхідно знайти опорні реакції V_A, H_A, V_B і прикласти їх до опорних вузлів як зовнішні сили (рис.8.5,б). Нумерація вузлів ферми визначає послідовність вирізання вузлів.

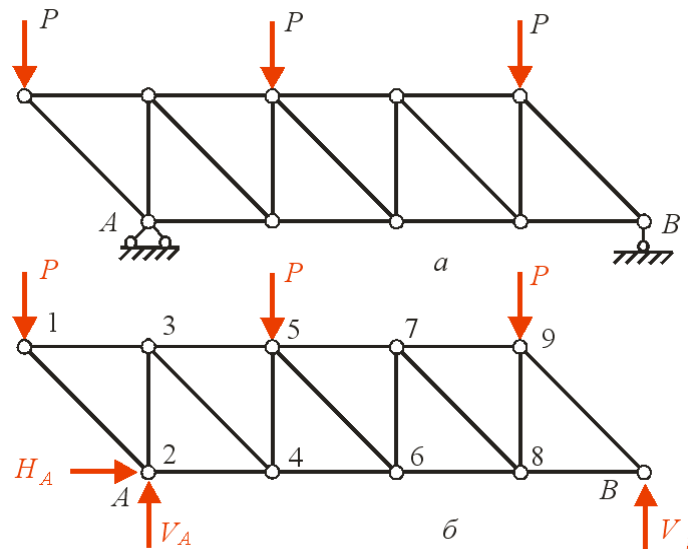


Рис.8.5

Така послідовність розрахунку може призвести до накопичення помилок і похибок заокруглення. А відтак спосіб вирізання вузлів доцільно застосовувати для визначення зусиль

лише в стержнях двостержневих вузлів та стержнях, які збігаються у вузлах, що належать до так званих окремих випадків рівноваги вузлів.

Окремі випадки рівноваги вузлів ферми

1. У незавантаженому вузлі, в якому збігаються два стержні, що не розташовані на одній прямій (рис.8.6,а), зусилля в обох стержнях дорівнюють нулю.

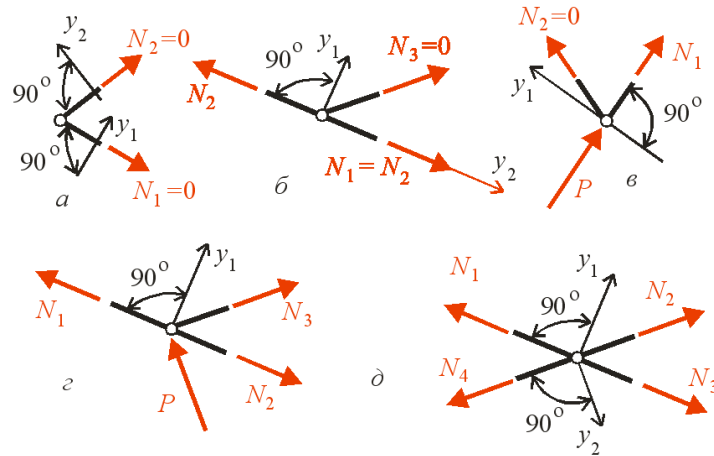


Рис.8.6

Насправді, рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій на вісі, перпендикулярні до кожного з двох стержнів, вміщують лише зусилля в іншому стержні. Тому маємо

$$\sum F_{y_1} = 0; \Rightarrow N_2 = 0;$$

$$\sum F_{y_2} = 0; \Rightarrow N_1 = 0.$$

Стержні, в яких зусилля дорівнюють нулю називаються нульовими.

2. У не завантаженому вузлі, в якому збігаються три стержні, два з яких розташовані на одній прямій (рис.8.6,б), зусилля в цих двох стержнях дорівнюють одне одному, а зусилля у третьому стержні дорівнює нулю, означений стержень є нульовим. Це впливає із розв'язання двох рівнянь рівноваги:

$$\sum F_{y_1} = 0; \Rightarrow N_3 = 0;$$

$$\sum F_{y_2} = 0; \Rightarrow N_1 = N_2.$$

3. Якщо на вузол, в якому збігаються два стержні, діє зосереджена сила, спрямована вздовж одного із стержнів (рис.8.6,в), зусилля в другому стержні дорівнює нулю. Отже, цей стержень є нульовим. Справді, складаючи рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій на вісь, перпендикулярну до сили, маємо:

$$\sum F_{y_1} = 0; \Rightarrow N_2 = 0.$$

4. У завантаженому вузлі, в якому збігаються три стержні, два з яких розташовані на одній прямій (рис.8.6,г), зусилля в третьому стержні можна визначити з рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій на вісь, перпендикулярну до цих двох стержнів:

$$\sum F_{y1} = 0; \Rightarrow N_3.$$

5. У не завантаженому вузлі, в якому збігаються чотири стержні, які парами розташовані вздовж двох прямих (рис.8.6,д), зусилля кожної з цих пар стержнів дорівнюють одне одному. Насправді:

$$\sum F_{y1} = 0; \Rightarrow N_2 = N_4;$$

$$\sum F_{y2} = 0; \Rightarrow N_1 = N_3.$$

Три перші окремі випадки рівноваги вузлів є **ознаками нульових стержнів**. Розрахунок ферми доцільно починати з виявлення нульових стержнів, тобто стержнів, зусилля в яких при заданому навантаженні дорівнюють нулю, за допомогою ознак нульових стержнів. Це може істотно полегшити подальші обчислення та допомагає уникнути деяких помилок.

Розглянемо, наприклад, ферму під дією зовнішніх сил і опорних реакцій рис.8.7,а.

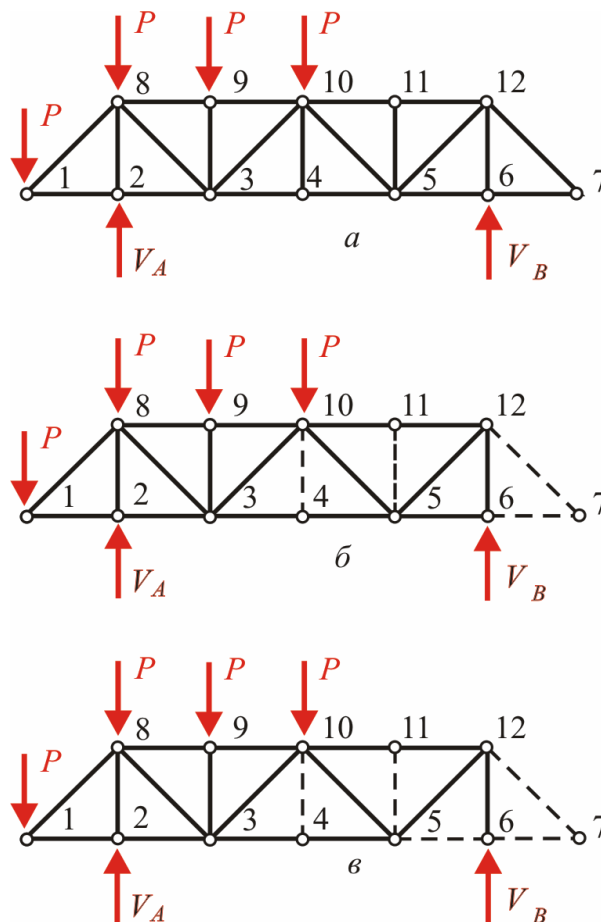


Рис.8.7

Очевидно, що за першою ознакою стержні 7-12 і 6-7, які приєднують вузол 7 до ферми, є нульовими. Нульовим буде й стержень 5-11, що приєднується до вузла 11, в якому з'єднуються три стержня, причому два інші стержня 10-11 та 11-12 розташовані на одній прямій (друга ознака). За цією ж ознакою нульовим є стержень 4-10. Слід звернути увагу, що стержень 4-10 є нульовим, хоча у вузлі 10 прикладена зосереджена сила. Згадані елементи можна умовно вилучити зі схеми ферми. Результат представлено на рис.8.7,б. Аналізуючи схему бачимо, що за третьою ознакою стержень 5-6 також є нульовим. Таким чином, фактично необхідно розраховувати лише ненульові стержні, показані суцільними лініями на рис.8.7,в.

Спосіб наскрізних перерізів. Означений спосіб полягає в тому, що ферма перетинається наскрізним перерізом, який відокремлює одну частину ферми від іншої. Далі розглядається будь-яка з цих частин, на яку діють безпосередньо прикладені до неї зовнішні сили та зусилля в перерізаних стержнях, що замінюють відкинуту частину ферми. На частину ферми, що розглядається, діє довільна система сил, для якої можна скласти три рівняння рівноваги. Отже, наскрізний переріз треба проводити через три стержні, зусилля в яких невідомі.

Для прикладу, перетнувши наскрізним перерізом 1-1 ферму, зображену на рис.8.8,а, розглянемо її праву відокремлену частину (рис.8.8,б). До речі, у даному випадку ліву частину розглядати зручніше за ліву, бо на неї діє менша кількість сил, хоча це й не принципово. Прикладаємо до неї сили P_3 , V_B і зусилля в перерізаних стержнях N_1 , N_2 і N_3 . Ці невідомі зусилля можуть бути визначені з будь-якої системи рівнянь рівноваги отриманої системи сил.

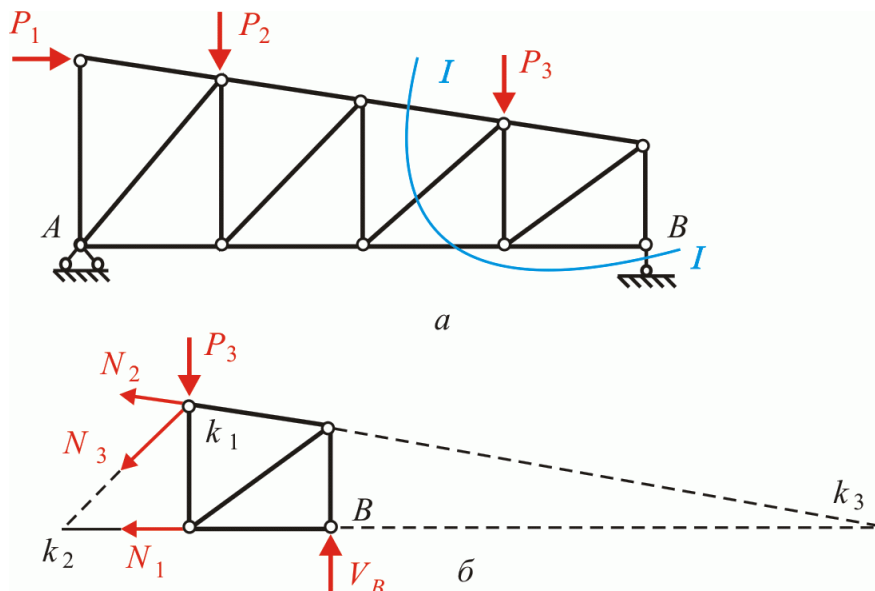


Рис.8.8

Доцільно складати рівняння рівноваги так, щоб з кожного незалежного рівняння одразу визначалось одне з невідомих. Цієї мети можна досягти, складаючи рівняння рівноваги за

способом моментних точок (спосіб Ріттера). Для визначення зусилля у стержні рівняння рівноваги складається у вигляді суми моментів стосовно так званої моментної точки для цього стержня, яка розташована в точці перетину двох інших перерізаних стержнів. Природно, моменти зусиль в цих двох стержнях стосовно моментної точки дорівнюють нулю. Отже, рівняння містить тільки одне невідоме зусилля, яке може бути обчислене з одного незалежного рівняння.

Так, моментна точка k_1 для зусилля N_1 (див. рис.8.8,б) розташована на перетині зусиль N_2 і N_3 , моментна точка k_2 для зусилля N_2 – на перетині зусиль N_1 і N_3 , моментна точка k_3 для зусилля N_3 – на перетині зусиль N_1 і N_2 . Отже невідомі зусилля N_1 , N_2 і N_3 можна визначити з трьох незалежних рівнянь:

$$\sum M_{k_1} = 0; \Rightarrow N_1;$$

$$\sum M_{k_2} = 0; \Rightarrow N_2;$$

$$\sum M_{k_3} = 0; \Rightarrow N_3.$$

У деяких фермах трапляються стержні, для яких при використанні способу наскрізних перерізів моментна точка розташована на нескінченності. Так, якщо розрізати наскрізним перерізом 1-1 ферму (рис.8.9,а) і розглянути рівновагу її лівої відокремленої частини (рис.8.9,б), то для стержня N_1 моментною буде точка k_1 , для N_2 – точка k_2 .

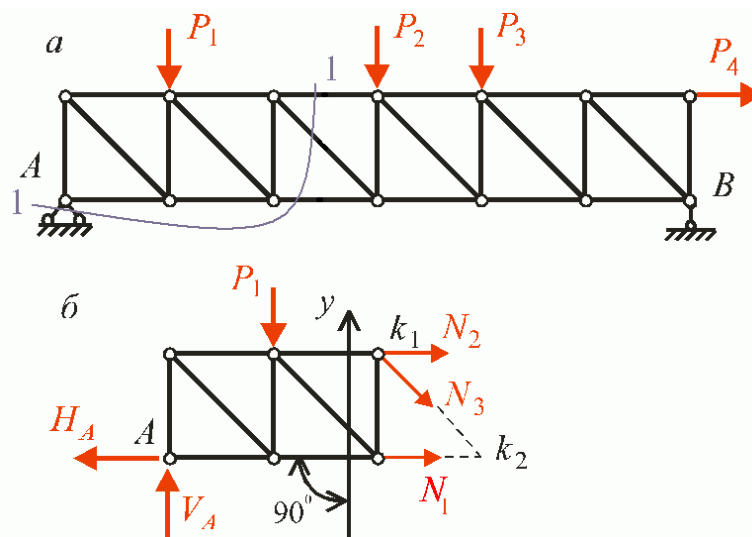


Рис.8.9

Моментна точка для стержня N_3 має знаходитись на перетині стержнів N_1 і N_2 , тобто на нескінченності, бо ті два стержні паралельні між собою. У такому випадку рівняння рівноваги для визначення зусилля N_3 слід складати як суму проекцій на вісь, перпендикулярну до двох взаємно паралельних стержнів N_1 і N_2 .

Зрештою маємо

$$\sum F_y = 0; \Rightarrow N_3.$$

Спосіб сумісних перерізів застосовують для визначення зусиль у стержнях, які неможливо обчислити за способами вирізання вузлів і наскрізних перерізів. Так, у фермі, представленій на рис.8.10,а, в обох вузлах, до яких приєднується середня стійка, збігаються більш ніж два стержні.

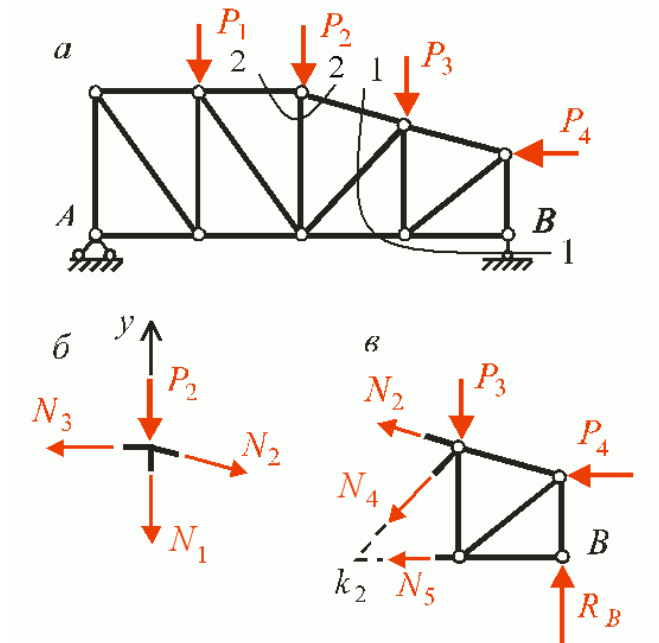


Рис.8.10

Отже, при вирізанні цих вузлів рівнянь рівноваги буде менше, ніж невідомих. Неможливо також провести наскрізний переріз через цю стійку і ще два стержні.

У такому випадку спочатку доцільно вирізати верхній вузол ферми (рис.8.10,б), в якому збігаються три стержні. Склавши одне рівняння рівноваги, можна визначити співвідношення між потрібним N_1 та іншим N_2 зусиллями:

$$\sum F_y = 0; \Rightarrow N_1 = f(N_2).$$

Далі треба виконати наскрізний переріз 1-1 і з рівняння рівноваги однієї з виокремлених частин ферми (рис.8.10,б) обчислити зусилля N_2 :

$$\sum M_{k_2} = 0; \Rightarrow N_2,$$

що дає змогу отримати зусилля N_1 .

Особливість розрахунку ферм Полонсо. Фермами Полонсо називають ферми, створені з двох найпростіших ферм (тобто одержаних за способом “діади”), які з’єднуються між собою шарніром і стержнем, що не проходить через центр цього шарніра.

Визначення зусиль у стержнях такої ферми доцільно починати з визначення зусилля в з'єднувальному стержні. Для цього необхідно провести наскрізний переріз через з'єднувальний шарнір і з'єднувальний стержень та скласти рівняння рівноваги однієї з виокремлених частин ферми у вигляді суми моментів стосовно з'єднувального шарніра. Надалі ферма зображується без з'єднувального стержня, замість якого до неї прикладається визначене зусилля. Зусилля у стержнях такої системи можуть бути визначені за викладеними вище способами.

Наприклад, визначення зусиль у фермі Полонсо (рис.8.11,а) починаємо з виконання перерізу 1-1.

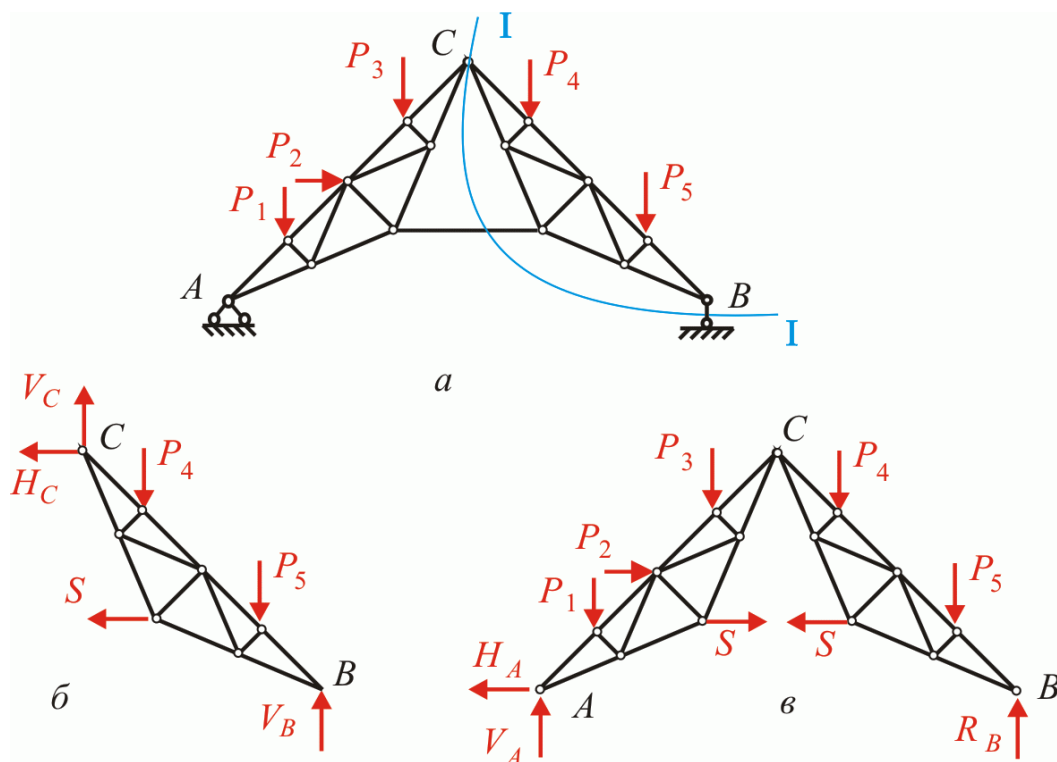


Рис.8.11

Із рівняння рівноваги правої половини ферми (рис.8.11,б) визначаємо зусилля у з'єднувальному стержні:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow S.$$

Зусилля в інших стержнях визначаються з схеми, наведеної на рис.8.11,в.

Особливість розрахунку ферм Шухова. Фермами Шухова називають ферми, створені з двох або більше найпростіших ферм (тобто одержаних за способом “діади”), які з'єднуються між собою попарно трьома стержнями, що не перетинаються в одній точці і не паралельні між собою.

Визначення зусиль у стержнях такої ферми доцільно починати із обчислення зусиль у з'єднувальних стержнях. Для цього необхідно провести наскрізний переріз, що перетинає три

з'єднувальні стержні, і скласти рівняння рівноваги однієї з виокремлених частин ферми. Надалі ферма зображується без з'єднувальних стержнів, замість яких до неї прикладаються визначені зусилля. Зусилля у стержнях такої системи можуть бути визначені за викладеними вище способами.

Наприклад, визначення зусиль у фермі Шухова (рис.8.12,а) починаємо з виконання замкненого перерізу 1-1.

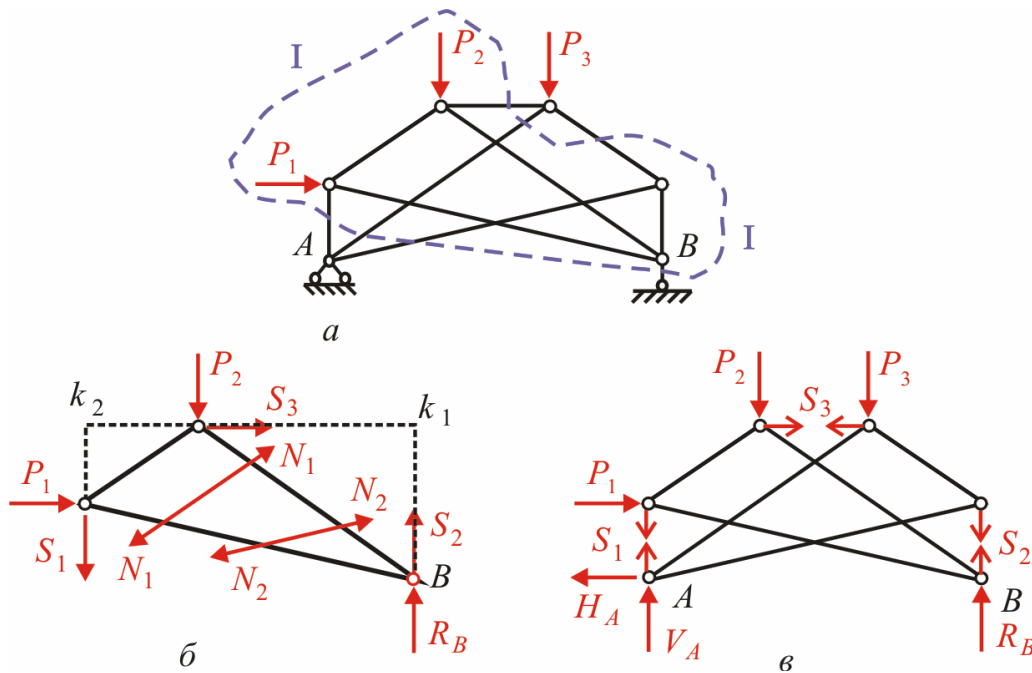


Рис.8.12

З рівнянь рівноваги виокремленої внутрішньої частини ферми (рис.8.12,б) визначаємо зусилля в з'єднувальних стержнях, беручи до уваги, що зусилля N_1 і N_2 в інших стержнях входять у ці рівняння двічі з протилежними знаками і тому взаємно усуваються:

$$\begin{aligned} \sum M_{k_1} &= 0; & \Rightarrow S_1; \\ \sum M_{k_2} &= 0; & \Rightarrow S_2; \\ \sum F_x &= 0; & \Rightarrow S_3. \end{aligned}$$

Зусилля в інших стержнях встановлюються зі схеми, наведеної на рис.8.12,в, де визначені зусилля S_1 , S_2 і S_3 прикладаються як зовнішні сили.

8.3. Приклади визначення внутрішніх зусиль у стержнях ферм

Задача 1.

Дано: розрахункова модель (рис. 8.13).

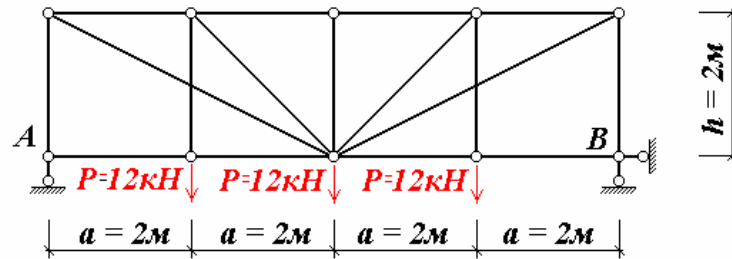


Рис.8.13

Необхідно: Визначити зусилля в стержнях ферми.

Розв'язування:

Розрахункова модель є плоскою простою статично визначуваною фермою, яку можна побудувати методом діад. Диск-ферма приєднується до „землі” методом Полонсо.

Визначення реактивних сил в опорних в'язях (рис.8.14):

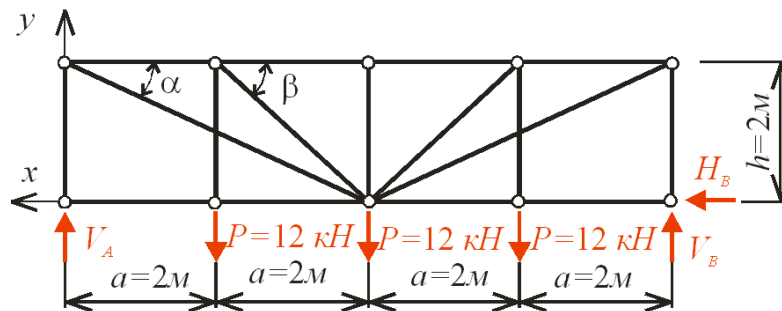


Рис.8.14

$$\sum_{i=1}^4 M_B(\vec{F}_i) = 0: -2P - 4P - 6P + 8V_A = 0; \quad V_A = \frac{12P}{8} = \frac{12 \cdot 12}{8} = 18 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^4 M_A(\vec{F}_i) = 0: 2P + 4P + 6P - 8V_B = 0; \quad V_B = \frac{12P}{8} = \frac{12 \cdot 12}{8} = 18 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^1 F_{xi} = 0: \quad H_B = 0.$$

Перевірка:

$$\sum_{i=1}^5 F_{yi} = V_A - P - P - P + V_B = 18 - 12 - 12 - 12 + 18 = 0.$$

За ознаками нульових стержнів нижній пояс та центральна стійка при заданому навантаженні не працюють (рис.8.15). Тут і у подальшому нульові стержні зображатимуться штриховими лініями.

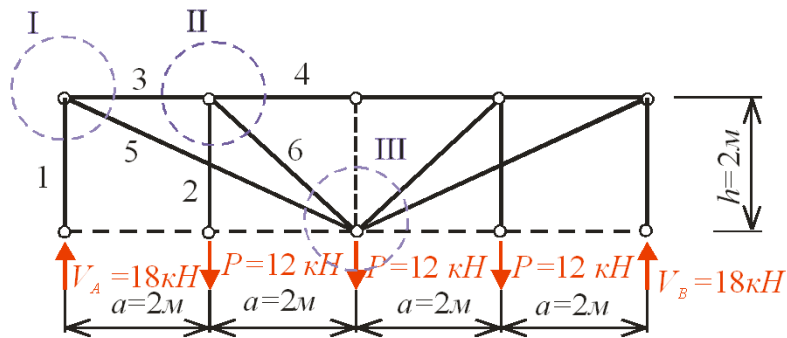


Рис.8.15

В стержнях 1 та 2 поздовжні сили дорівнюють навантаженню вздовж них $N_1 = -18 \text{ кН}$ (знак „-“ свідчить, що стержень стиснутий), $N_2 = 12 \text{ кН}$. Для розрахунку зусиль в інших стержнях по чергово вирізаються вузли I та II, з рівноваги яких обчислюються по дві невідомі величини (рис.8.16).

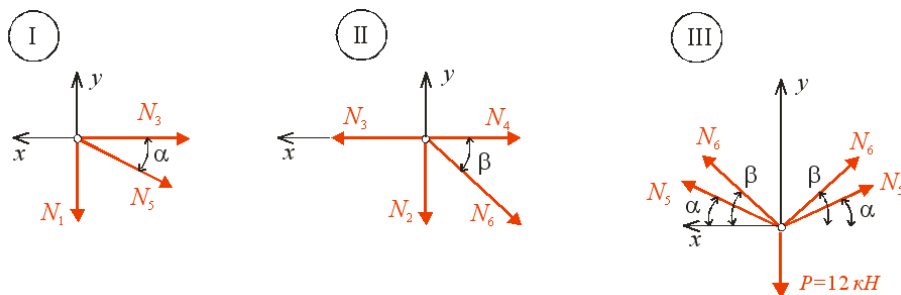


Рис.8.16

Кути α та β визначаються з геометрії ферми:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{4} = 0,5; \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,5 = 26,57^\circ;$$

$$\cos 26,57^\circ = 0,8944; \quad \sin 26,57^\circ = 0,4472.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{2} = 1; \quad \beta = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ; \quad \cos 45^\circ = 0,7071; \quad \sin 45^\circ = 0,7071.$$

Вузол I

$$\sum_{i=1}^2 F_{yi} = 0: \quad -N_1 - N_5 \sin \alpha = 0; \quad N_5 = \frac{-N_1}{\sin \alpha} = \frac{-(-18)}{0,4472} = 40,25 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{xi} = 0: \quad N_3 + N_5 \cos \alpha = 0; \quad N_3 = -N_5 \cos \alpha = -40,25 \cdot 0,8944 = -36 \text{ кН}.$$

Вузол II:

$$\sum_{i=1}^2 F_{yi} = 0: \quad -N_2 - N_6 \sin \beta = 0; \quad N_6 = \frac{-N_2}{\sin \beta} = \frac{-12}{0,7071} = -16,97 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{xi} = 0: \quad N_3 - N_6 \cos \beta - N_4 = 0;$$

$$N_4 = N_3 - N_6 \cos \beta = -36 - 16,97 \cdot 0,7071 = -48 \text{ кН}.$$

Розрахункова схема і навантаження мають вісь симетрії, тому зусилля в симетричних стержнях будуть однакові.

Вузол III, в усіх стержнях якого зусилля знайдені з рівноваги інших вузлів, використовується для перевірки:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 F_{yi} &= -P + 2N_5 \sin \alpha + 2N_6 \sin \beta = \\ &= -12 + 2 \cdot 40,25 \cdot 0,4472 + 2 \cdot (-16,97) \cdot 0,7071 = 36 - 36 = 0; \end{aligned}$$

Сума проєкцій всіх сил на вісь x очевидно дорівнює нулю.

Отже, в стержнях ферми при заданому навантаженні виникають поздовжні сили:

$$\begin{aligned} N_1 &= -18 \text{ кН}; & N_2 &= 12 \text{ кН}; & N_3 &= -36 \text{ кН}; \\ N_4 &= -48 \text{ кН}; & N_5 &= 40,25 \text{ кН}; & N_6 &= -16,97 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Задача 2.

Дано: розрахункова модель (рис.8.17).

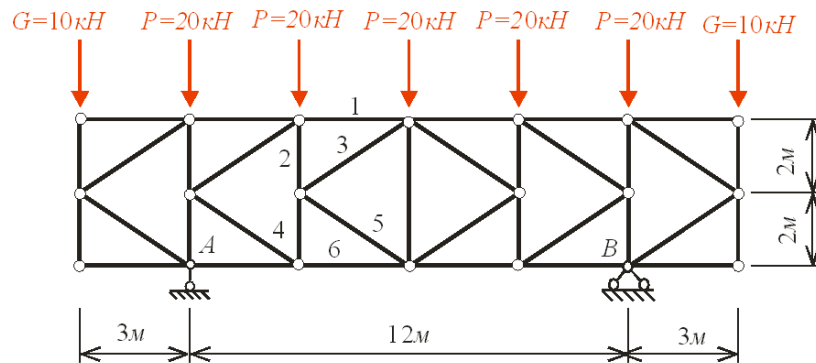


Рис.8.17

Необхідно: Визначити зусилля в стержнях 1 – 6 шарнірно-стержневої системи.

Розв'язування:

Вихідна розрахункова модель відноситься до плоских простих статично визначуваних ферм, які можна створити за допомогою методу діад. Ферма приєднується до диску „земля” способом Полонсо.

Визначення реактивних сил в опорних в'язях (рис.8.18):

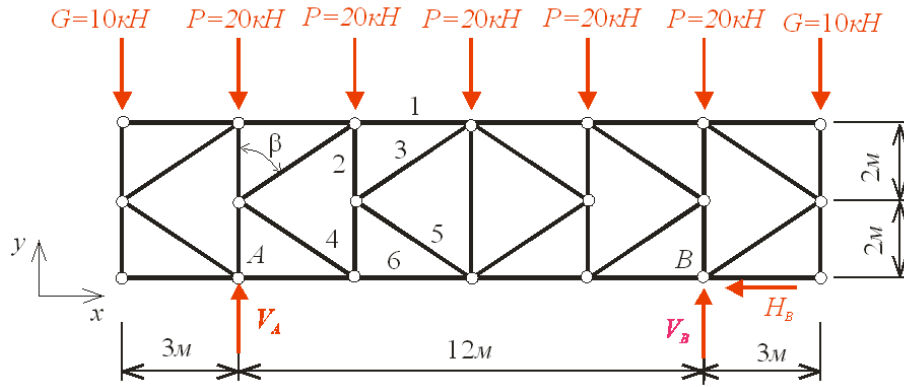


Рис.8.18

$$\sum_{i=1}^7 M_B(\vec{F}_i) = 0: 3G - 3P - 6P - 9P - 12P + 12V_A - 15G = 0;$$

$$V_A = \frac{-3G + 3P + 6P + 9P + 12P + 15G}{12} = \frac{12 \cdot 10 + 30 \cdot 20}{12} = 60 \text{ кН};$$

;

$$\sum_{i=1}^1 F_{xi} = 0: H_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^7 M_A(\vec{F}_i) = 0: 15G + 12P - 12V_B + 9P + 6P + 3P - 3G = 0;$$

$$V_B = \frac{-15G - 12P - 9P - 6P - 3P + 3G}{12} = \frac{-12 \cdot 10 + 30 \cdot 20}{12} = 60 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum_{i=1}^9 F_{yi} = V_A - 5P - 2G + V_B = 0;$$

$$60 - 5 \cdot 20 - 2 \cdot 10 + 60 = 0.$$

За ознаками виявляються стержні із нульовими зусиллями (позначені на рис.8.19 штриховими лініями). Для знаходження величин внутрішніх зусиль у зазначених стержнях виконано два уявних перерізи ферми (рис.8.19) і розглянута умова рівноваги лівих частин ферми від дії зовнішніх активних і невідомих реактивних сил.

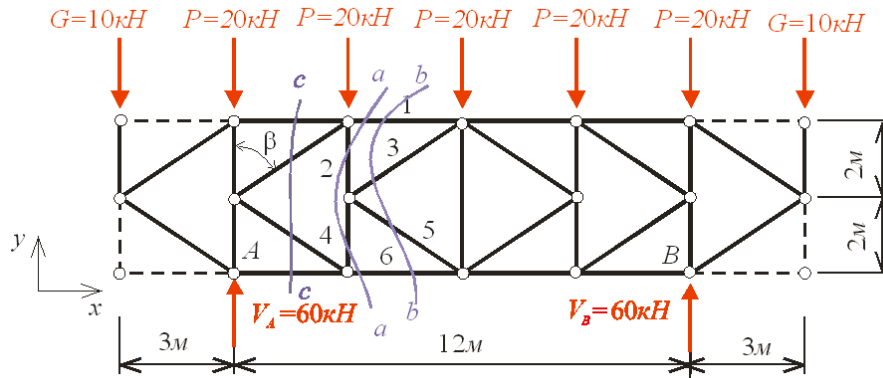


Рис.8.19

З умов рівноваги частини ферми, відрізаної перерізом $a-a$ (рис.8.20,а)

$$\sum_{i=1}^4 M_C(\vec{F}_i) = 0: 6G + 3P - 4N_1 - 3V_A = 0;$$

$$N_1 = \frac{6G + 3P - 3V_A}{4} = \frac{6 \cdot 10 + 3 \cdot 20 - 3 \cdot 60}{4} = -15 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{xi} = 0: N_1 + N_6 = 0; \quad N_6 = -N_1 = -(-15) = 15 \text{ кН}.$$

З умов рівноваги частини ферми, розміщеної ліворуч перерізу $b-b$ (рис.8.20,б)

$$\sum_{i=1}^6 F_{yi} = 0: -G - P - P + V_A + N_3 \cos \beta - N_5 \cos \beta = 0.$$

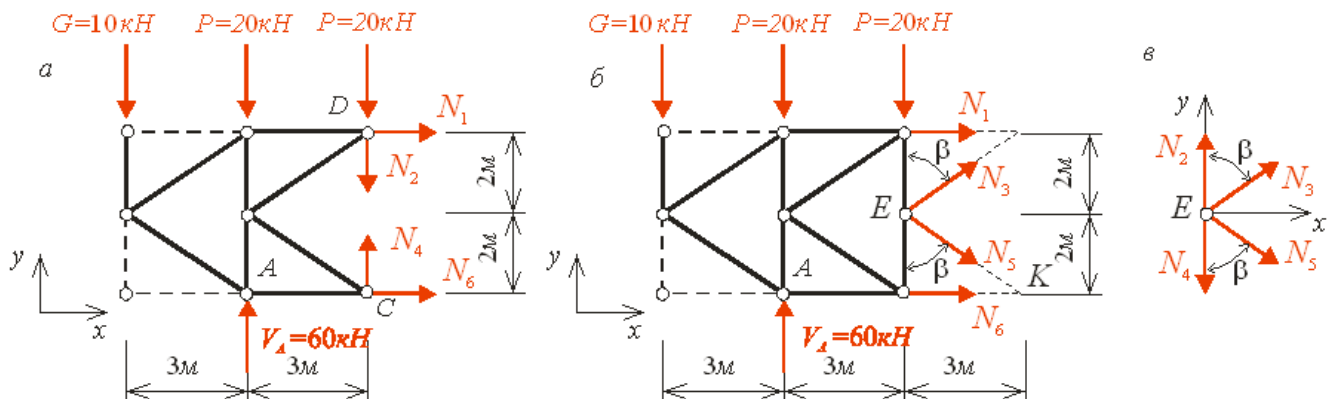


Рис.8.20

$$\text{Тут } \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0,8321, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0,5547.$$

Зв'язок між зусиллями N_3 та N_5 Можна встановити з умови рівноваги вузла E (рис.8.20,в):

$$\sum_{i=1}^2 F_{xi} = 0: N_3 \sin \beta + N_5 \sin \beta = 0; \quad N_5 = -N_3.$$

За цієї умови попереднє рівняння набуває вигляду

$$-G - P - P + V_A + N_3 \cos \beta - (-N_3) \cos \beta = 0,$$

звідки

$$N_3 = \frac{G + P + P - V_A}{2 \cos \beta} = \frac{10 + 20 + 20 - 60}{2 \cdot 0,5547} = -9,01 \text{ кН}.$$

$$N_5 = -N_3 = 9,01 \text{ кН}.$$

В стержнях 2 і 4 (рис.8.19) поздовжні сили діють вздовж однієї прямої, тому визначити їх можна лише окремо з умов рівноваги збіжних систем сил, що діють на вузли C та D . Але в цих системах по три невідомі, тому попередньо розглядається рівновага фрагменту ферми, обмеженого перерізом $c-c$ (рис.8.21,а):

$$\sum_{i=1}^5 F_{yi} = 0: -G - P + V_A + N_7 \cos \beta - N_8 \cos \beta = 0.$$

Зв'язок між зусиллями в розкосах N_7 та N_8 визначаємо з умов рівноваги вузла F (рис.8.21,б):

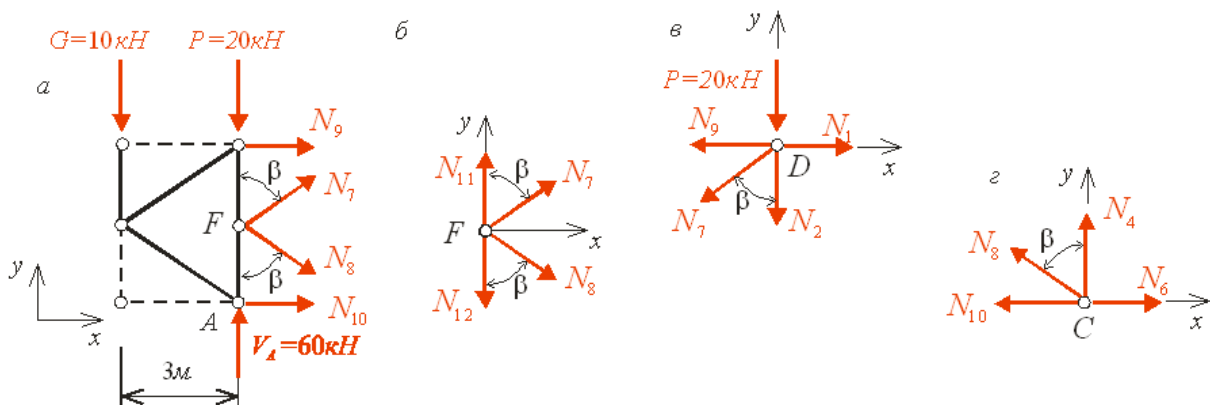


Рис.8.21

$$\sum_{i=1}^2 F_{xi} = 0: N_7 \sin \beta + N_8 \sin \beta = 0; \quad N_8 = -N_7.$$

З урахуванням отриманого співвідношення розв'язуємо попереднє рівняння рівноваги:

$$-G - P + V_A + N_7 \cos \beta - (-N_7) \cos \beta = 0;$$

$$N_7 = \frac{G + P - V_A}{2 \cos \beta} = \frac{10 + 20 - 60}{2 \cdot 0,5547} = -27,04 \text{ кН};$$

$$N_8 = -N_7 = 27,04 \text{ кН.}$$

Зусилля в стержнях 2 і 4 визначаються з рівноваги вузлів відповідно D (рис.8.21,в) і C (рис.8.21,г)

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = 0: \quad -N_2 - N_7 \cos \beta - P = 0;$$

$$N_2 = -N_7 \cos \beta - P = -(-27,04) \cdot 0,5547 - 20 = -5 \text{ кН.}$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{xi} = 0: \quad N_4 + N_8 \cos \beta = 0; \quad N_4 = -N_8 \cos \beta = -27,04 \cdot 0,5547 = -15 \text{ кН.}$$

$$N_4 = -N_8 \cos \beta = 27,04 \cdot 0,5547 = 15 \text{ кН.}$$

Відповідь:

$$\begin{aligned} N_1 &= 15 \text{ кН}, & N_2 &= -5 \text{ кН}, \\ N_3 &= -9,01 \text{ кН}, & N_4 &= -15 \text{ кН}, \\ N_5 &= 9,01 \text{ кН}, & N_6 &= 15 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знак „-” свідчить про те, що стержень стиснутий.

