

Виберіть форму подання навчального матеріалу

✓ [Докладне подання](#)

[Скорочене подання](#)

## 9. Тришарнірні арки

### Зміст глави

[9.1. Основні поняття](#)

[9.2. Розрахунок арки при довільному навантаженні](#)

[9.3. Розрахунок арки при дії вертикального навантаження](#)

[9.4. Розрахунок арки з горизонтальною затяжкою](#)

[9.5. Приклади визначення внутрішніх зусиль в арках](#)

[Запитання для самоперевірки](#)

### 9.1. Основні поняття

Тришарнірною аркою називають плоску геометрично незмінювану систему, що складається з двох кривих стержнів, які з'єднуються між собою та основою трьома шарнірами (рис.9.1).

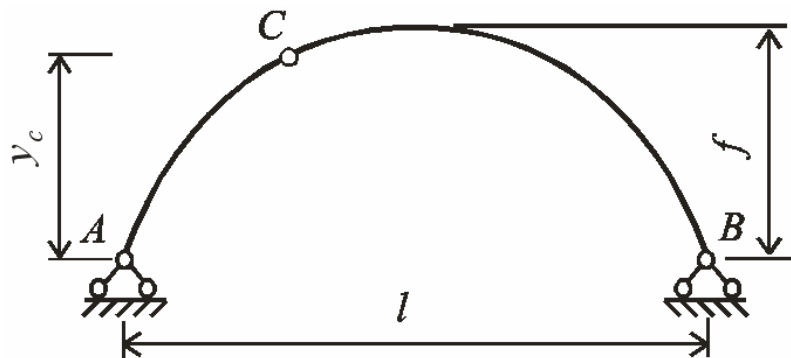


Рис.9.1

Шарнірно-нерухомі опори тришарнірної арки називають **п'ятами**, шарнір  $C$ , що з'єднує між собою піварки – **ключем**. Відстань між центрами п'ят зветься **прогоном арки** ( $l$ ). У переважній більшості випадків ключовий шарнір розташовується в середині прогону, внаслідок чого  $y_c = f$ . Основною геометричною характеристикою тришарнірної арки є відношення стріли підйому до прогону, тобто  $f/l$ .

Найважливіша відміна тришарнірної арки полягає в наявності у шарнірно-нерухомих опорах горизонтальних складових опорних реакцій при вертикальному навантаженні. Ці горизонтальні складові реакції називають **розпором**, а систему, яка при вертикальному навантаженні має розпір, – **розпірною системою**. Отже, тришарнірна арка – це розпірна система.

Наявність розпору може мати негативний вплив на міцність розташованих нижче конструкцій. Тому на практиці часто застосовують арки з **затяжкою**, тобто стержнем, який з'єднує піварки. Затяжка залежно від архітектурних чи технологічних міркувань може бути встановлена на рівні (рис.9.2,а) чи вище рівня опор (рис.9.2,б) або мати складну конфігурацію (рис.9.2,в). Розпір у таких арках сприймається затяжкою і не передається на опори. За наявності затяжки з міркувань статичної визначуваності конструкції одна опора арки береться шарнірно-нерухомою, а друга – шарнірно-рухомою.

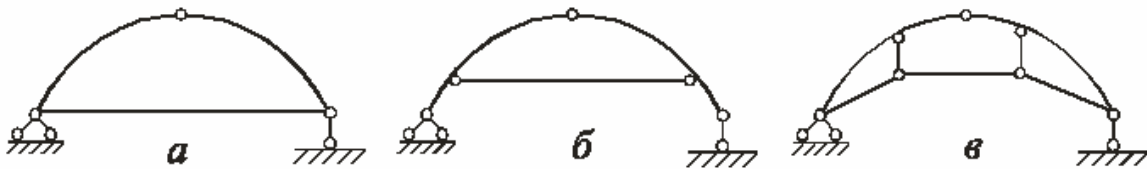


Рис.9.2

Розрахунок тришарнірної арки полягає у визначенні опорних реакцій, зусиль у затяжці та внутрішніх зусиль у перерізах арки.

## 9.2. Розрахунок арки при довільному навантаженні

Як вже зазначалось, реакції шарнірно-нерухомих опор  $A$  і  $B$  тришарнірної арки (рис.9.3) мають по дві складові – вертикальні  $V_A$  і  $V_B$  і горизонтальні  $H_A$  і  $H_B$ .

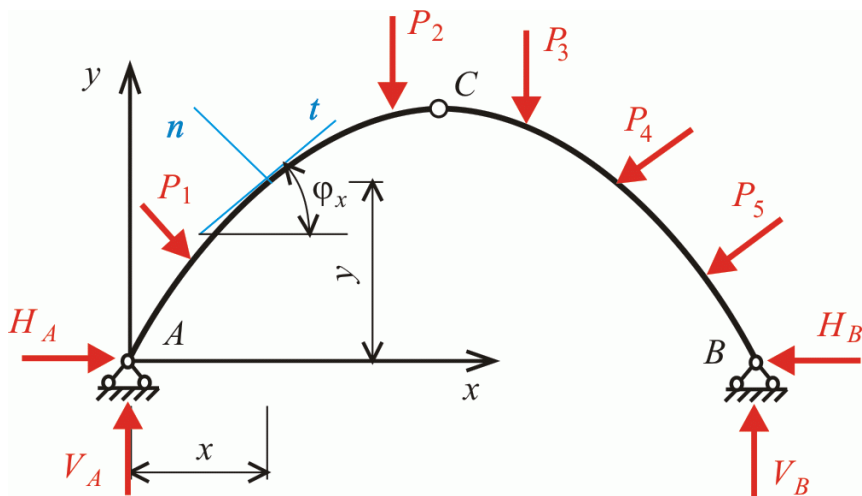


Рис.9.3

Вертикальні складові опорних реакцій можна встановити з рівнянь рівноваги всієї арки:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; \quad \Rightarrow V_B; \\ \sum M_B &= 0; \quad \Rightarrow V_A.\end{aligned}\tag{9.1}$$

Для визначення горизонтальних складових опорних реакцій арку перерізають по ключовому шарніру  $C$  і складаються рівняння рівноваги лівої та правої частин арки:

$$\begin{aligned}\sum M^{лів} &= 0; \quad \Rightarrow H_A; \\ \sum M_C^{прав} &= 0; \quad \Rightarrow H_B.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Обчислені величини складових опорних реакцій можна перевірити, складаючи додаткові рівняння рівноваги для всієї арки:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0.\tag{9.3}$$

Згинальний момент у перерізі арки обчислюється за загальними правилами як алгебраїчна сума моментів сил, розташованих по один бік від перерізу стосовно центра його тяжіння. Згинальні моменти вважаються додатними, якщо вони викликають розтягнення нижніх волокон перерізу арки. При довільному навантаженні згинальний момент у перерізі з координатами  $x, y$  може бути обчислений за однією з наступних формул:

$$\begin{aligned}M_x &= \sum M_x^{лів} = \sum_{i=1}^r Y_i(x - x_i) - \sum_{i=1}^r X_i(y - y_i) + \sum_{j=1}^s \bar{M}_j; \\ M_x &= \sum M_x^{прав} = \sum_{i=m-r+1}^m Y_i(x_i - x) - \sum_{i=m-r+1}^m X_i(y_i - y) - \sum_{j=n-s+1}^n \bar{M}_j,\end{aligned}\tag{9.4}$$

де  $X_i, Y_i$  – проекції на координатні осі  $OX$  і  $OY$  зовнішніх сил, включно з опорними реакціями і рівнодійними розподілених навантажень;  $x_i, y_i$  – координати точок прикладання зовнішніх сил;  $m$  – загальна кількість сил, що діють на арку;  $r$  – кількість сил, прикладених ліворуч від перерізу;  $\bar{M}_j$  – зосереджені моменти (додатні моменти діють у напрямку руху годинникової стрілки);  $n$  – загальна кількість прикладених до арки зосереджених моментів;  $s$  – кількість моментів, прикладених ліворуч від перерізу.

Поперечна та поздовжня сили в перерізі арки являють собою складові головного вектора односторонніх сил.

Поперечна сила обчислюється як сума проекцій сил, розташованих по один бік від перерізу, на нормаль  $n$  до осі арки в цьому перерізі. Поперечна сила додатна, якщо вона повертає частину арки,

що розглядається, у напрямку руху годинникової стрілки. При довільному навантаженні поперечна сила в перерізі з абсцисою  $x$  може бути обчислена за однією з таких формул:

$$Q_x = \sum F_{nx}^{лів.} = \sum_{i=1}^r Y_i \cos \varphi_x - \sum_{i=1}^r X_i \sin \varphi_x;$$

$$Q_x = \sum F_{nx}^{прав.} = - \sum_{i=m-r+1}^m Y_i \cos \varphi_x + \sum_{i=m-r+1}^m X_i \sin \varphi_x,$$
(9.5)

де  $\varphi_x$  – кут між дотичною до осі арки в перерізі з абсцисою  $x$  і віссю  $OX$ ; інші позначення такі самі, як у (9.4).

Поздовжня сила в перерізі арки обчислюється як сума проєкцій сил, розташованих по один бік від перерізу, на дотичну  $t$  до осі арки в цьому перерізі. Поздовжня сила додатна, якщо вона викликає розтягнення перерізу. При довільному навантаженні поздовжня сила в перерізі з абсцисою  $x$  може бути обчислена за однією з наступних формул:

$$N_x = \sum F_{tx}^{лів.} = - \sum_{i=1}^r Y_i \sin \varphi_x - \sum_{i=1}^r X_i \cos \varphi_x;$$

$$N_x = \sum F_{tx}^{прав.} = \sum_{i=m-r+1}^m Y_i \sin \varphi_x + \sum_{i=m-r+1}^m X_i \cos \varphi_x.$$
(9.6)

При обчисленні геометричних характеристик арок можна користуватися такими рівняннями осей:

- квадратна парабола:  $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x)$ ;
- синусоїда:  $y = f \sin \frac{\pi x}{l}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$ ;
- коло:  $y = f - R(1 - \cos \varphi)$ , де  $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$ ,  $\varphi = \arcsin \frac{1}{R} \left( \frac{l}{2f} - x \right)$ .

### 9.3. Розрахунок арки при дії вертикального навантаження

При дії на тришарнірну арку вертикальних зосереджених сил і розподілених навантажень та зосереджених моментів (рис.9.4,а) зовнішні навантаження не мають горизонтальних складових. Тому горизонтальні складові опорних реакцій  $H_A$  і  $H_B$  дорівнюють одна одній. Вони називаються **розпором** і позначаються літерою  $H$ .

Для розрахунку такої арки зручно використовувати так звану еквівалентну балку (рис.9.4,б), що являє собою просту статично визначувану балку на двох опорах, що має однакові з аркою прогон і навантаження.

Неважко помітити, що вертикальні складові опорних реакцій арки  $V_A$  і  $V_B$  в цьому випадку дорівнюють реакціям опор еквівалентної балки  $R_A$  і  $R_B$  завдяки ідентичності сум моментів усіх сил стосовно їхніх опорних шарнірів  $A$  і  $B$ . Отже,

$$V_A = R_A; \quad V_B = R_B. \tag{9.7}$$

Для визначення розпору складемо рівняння рівноваги лівої частини арки:

$$\sum M_C^{лів.} = 0;$$

$$V_A l_C - P_1(l_C - b_1) - P_2(l_C - b_2) - q_1 d_1(l_C - c_1 + \frac{d_1}{2}) + M_1 - H y_C = 0.$$

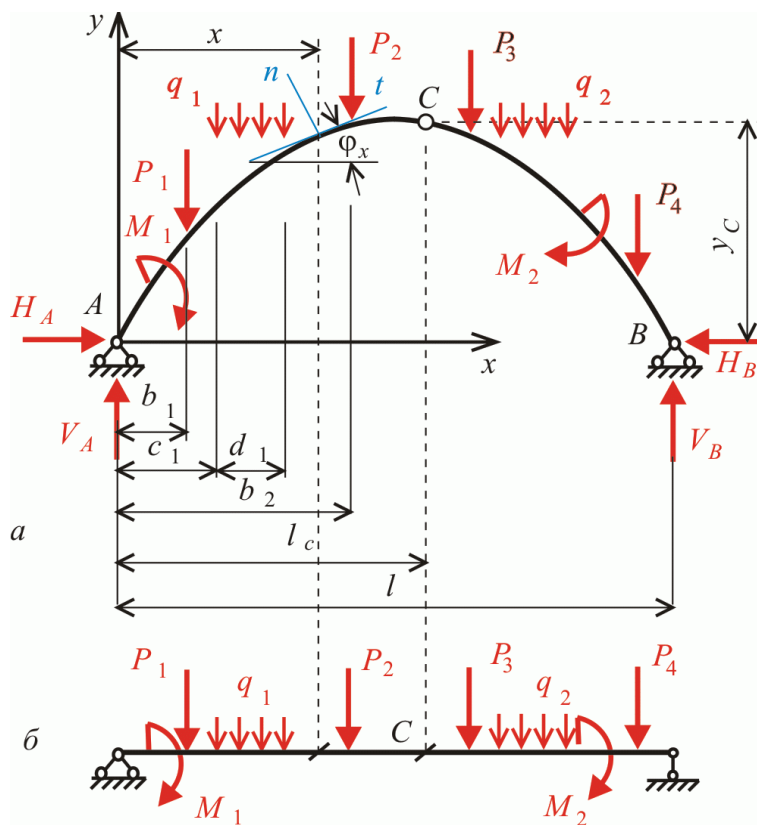


Рис.9.4

Звернувши увагу на те, що згинальний момент у перерізі  $C$  еквівалентної балки, розташованому під шарніром  $C$  тришарнірної арки, дорівнює

$$M_C^{\sigma} = V_A l_C - P_1(l_C - b_1) - P_2(l_C - b_2) - q_1 d_1(l_C - c_1 + \frac{d_1}{2}) + M_1,$$

можна записати

$$M_C^{\bar{o}} - Hy_C = 0,$$

звідки одержимо формулу для визначення розпору тришарнірної арки при вертикальному навантаженні

$$H = \frac{M_C^{\bar{o}}}{y_C}. \quad (9.8)$$

З цієї формули випливає, що величина розпору при вертикальному навантаженні не залежить від обрису осі арки, а залежить тільки від взаємного розташування трьох її шарнірів.

Згинальний момент у перерізі арки з абсцисою  $x$  може бути обчислений за формулою

$$M_x = \sum M_x^{лив.} = V_A x - P_1(x - b_1) - q_1 d_1 \left(x - c_1 + \frac{d_1}{2}\right) + M_1 - Hy_x.$$

Але згинальний момент у перерізі еквівалентної балки з тією самою абсцисою  $x$  дорівнює

$$M_x^{\bar{o}} = V_A x - P_1(x - b_1) - q_1 d_1 \left(x - c_1 + \frac{d_1}{2}\right) + M_1.$$

Отже,

$$M_x = M_x^{\bar{o}} - Hy_x. \quad (9.9)$$

Поперечна сила у перерізі арки з абсцисою  $x$  визначається формулою

$$Q_x = \sum F_n^{лив.} = (V_A - P_1 - q_1 d_1) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x.$$

Беручи до уваги величину поперечної сили у відповідному перерізі еквівалентної балки,

$$Q_x^{\bar{o}} = V_A - P_1 - q_1 d_1,$$

маємо

$$Q_x = Q_x^{\bar{o}} \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x. \quad (9.10)$$

Поздовжня сила у перерізі арки з абсцисою  $x$  визначається формулою

$$N_x = \sum F_t^{лив.} = -(V_A - P_1 - q_1 d_1) \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x,$$

що, як й у попередньому випадку, дозволяє дістати

$$N_x = -(Q_x^{\bar{o}} \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x). \quad (9.11)$$

Із формул (9.8–9.11) випливає, що розрахунок тришарнірної арки на вертикальні навантаження доцільно починати визначенням внутрішніх зусиль у відповідній еквівалентній балці. Ейлора

кожного з внутрішніх зусиль, що виникають в перерізах арки, складається з двох доданків, одним з яких є еюра згинальних моментів або еюра поперечних сил для еквівалентної балки з відповідним множником.

Використання формули (9.9) дозволяє легко одержати еюру згинальних моментів для арки. Насправді, перший її доданок – еюра  $M^b$  будується для простої балки, а другий доданок –  $Hu$  повторює обрис осі арки. Для отримання еюри  $M$  треба відповідно до знаку скласти ці дві еюри. При цьому внаслідок дорівнювання нулю згинального моменту у ключовому шарнірі  $C$  ці дві еюри мають перетинатись під цим шарніром.

Наприклад, для тришарнірної арки (рис.9.5,а) наведено еюру згинальних моментів, яка побудована від горизонтальної бази накладенням двох еюр (рис.9.5,б), і (рис.9.5,в).

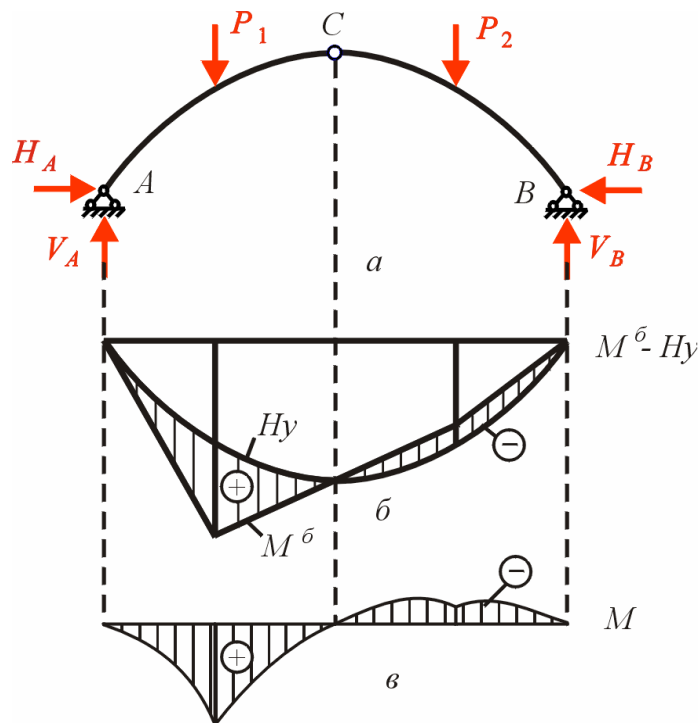


Рис.9.5

#### 9.4. Розрахунок арки з горизонтальною затяжкою

При дії вертикального навантаження в тришарнірній арці із затяжкою виникають лише вертикальні опорні реакції.

Розрахунок тришарнірної арки з горизонтальною затяжкою на рівні опор не відрізняється від розрахунку арки без затяжки, за винятком того, що розпір  $H$  замінюється на зусилля в затяжці  $H_{зат}$ .

Якщо горизонтальна зтяжка розташована вище від рівня опор, зусилля в ній визначаються за формулою

$$H_{зам} = \frac{M_C^{\bar{o}}}{y_C - a}, \quad (9.12)$$

де  $M_C^{\bar{o}}$  – як і в (9.8), згинальний момент у перерізі  $C$  еквівалентної балки, розташованому під шарніром  $C$  тришарнірної арки;  $y_C$  – ордината ключового шарніра  $C$ ;  $a$  – відстань від рівня опор арки до зтяжки.

Зусилля в перерізах арки з горизонтальною зтяжкою, розташованою вище від рівня опор, визначаються через зусилля в еквівалентній балці залежно від розташування перерізу.

Для перерізів, розташованих нижче від зтяжки ( $y < a$ ):

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^{\bar{o}}; \\ Q_x &= Q_x^{\bar{o}} \cos \varphi_x; \\ N_x &= -Q_x^{\bar{o}} \sin \varphi_x. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Для перерізів, розташованих вище від зтяжки ( $y > a$ ):

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^{\bar{o}} - H_{зам} (y - a); \\ Q_x &= Q_x^{\bar{o}} \cos \varphi_x - H_{зам} \sin \varphi_x; \\ N_x &= -(Q_x^{\bar{o}} \sin \varphi_x + H_{зам} \cos \varphi_x). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Тут такі самі позначення, як і в (9.9–9.11).

На рис.9.6 показано побудову епюри згинальних моментів в арці шляхом накладання двох графіків. Перший графік – це епюра згинальних моментів  $M^{\bar{o}}$  в еквівалентній балці, другий – крива в межах зтяжки, яка відповідає обрису осі арки.



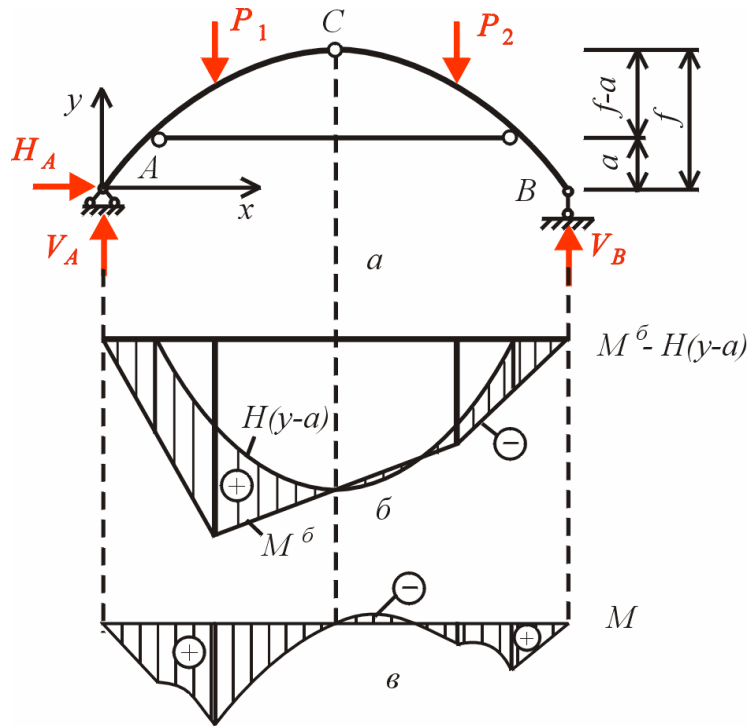


Рис.9.6

### 9.5. Приклади визначення внутрішніх зусиль в арках

#### Задача 1.

Дано: Розрахункова модель (рис.9.7). Вісь арки – парабола.

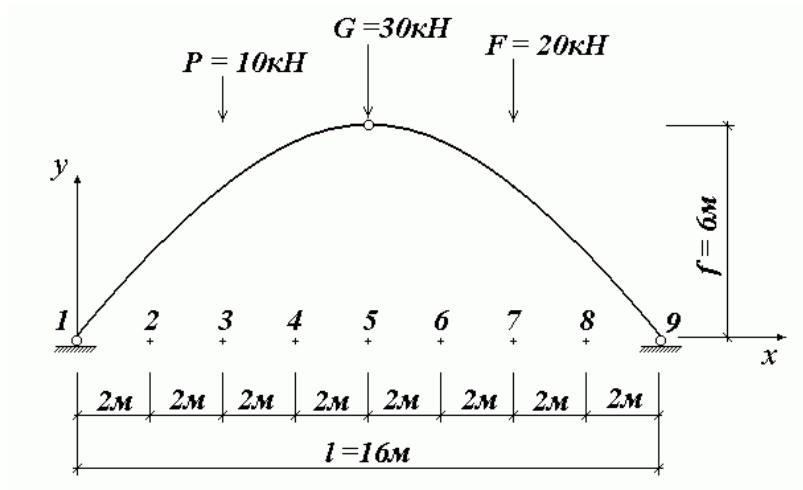


Рис.9.7

**Необхідно:** Побудувати епюр внутрішніх зусиль.

**Розв'язування:**

Геометрія осі арки визначається за формулами

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{4 \cdot 6}{16^2} x(16-x) = 1,5x - 0,09375x^2,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l-2x) = \frac{4 \cdot 6}{16^2}(16-2x) = 1,5 - 0,1875x.$$

Епюри згинальних моментів  $M^b$  і поперечних сил  $Q^b$  в еквівалентній балці побудовано на рис.9.8.

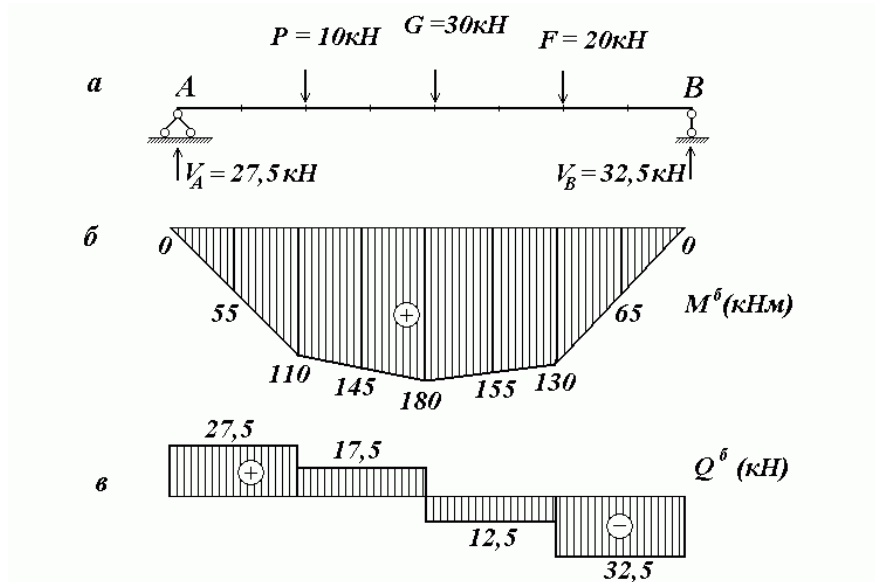


Рис.9.8

Результати обчислень координат точок на осі арки з кроком абсциси 2 м, кутів нахилу дотичної та їх тригонометричних функцій заносяться до табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Переріз	$x$ , м	$y$ , м	$\operatorname{tg}\varphi$	$\varphi$ , град	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
1	0	0	1,50	56,31	0,5547	0,8321
2	2	2,63	1,13	48,37	0,6644	0,7474
3	4	4,50	0,75	36,87	0,8000	0,6000
4	6	5,63	0,38	20,26	0,9363	0,3511
5	8	6,00	0	0	1	0
6	10	5,63	-0,38	-20,26	0,9363	-0,3511
7	12	4,50	-0,75	-36,87	0,8000	-0,6000
8	14	2,63	-1,13	-48,37	0,6644	-0,7474
9	16	0	-1,50	-56,31	0,5547	-0,8321

Обчислення реакцій в опорах еквівалентної балки (рис.9.8,а):

$$\sum_{i=1}^4 M_A(\vec{F}_i) = 0: \quad -4P - 8G - 12F + 16V_B = 0;$$

$$V_B = \frac{4P + 8G + 12F}{16} = \frac{4 \cdot 10 + 8 \cdot 30 + 12 \cdot 20}{16} = 32,5 \text{ кН},$$

$$\sum_{i=1}^1 F_{xi} = 0: H_A = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = 0: V_A - P - G - F + V_B = 0;$$

$$V_A = P + G + F - V_B = 10 + 30 + 20 - 32,5 = 27,5 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum_{i=1}^4 M_B(\vec{F}_i) = 12P + 8G + 4F - 16V_A =$$

$$= 12 \cdot 10 + 8 \cdot 30 + 4 \cdot 20 - 16 \cdot 27,5 = 440 - 440 = 0.$$

Розпір арки визначається як відношення балочного моменту під замком арки (рис.9.8,б) до стріли підйому арки:

$$H = \frac{M_C^0}{6} = \frac{180}{6} = 30 \text{ кН}.$$

Внутрішні зусилля в перерізах арки визначаються через балочні функції (рис.9.8,б,в) за допомогою формул (9.9 – 9.11):

Результати розрахунку занесені до табл. 9.2

Таблиця 9.2

Переріз	$M^0$	$H_y$	$M$	$Q^0$	$Q^0 \cos \varphi$	$H \sin \varphi$	$Q$	$Q^0 \sin \varphi$	$H \cos \varphi$	$N$
1	0	0	0	27,5	15,25	24,96	-9,71	22,88	16,64	-39,52
2	55	78,9	-23,9	27,5	18,27	22,42	-4,15	20,55	19,93	-40,48
3–	110	135,0	-25,0	27,5	22,00	18,00	4,00	16,5	24,00	-40,50
3+	110	135,0	-25,0	17,5	14,00	18,00	-4,00	10,5	24,00	-34,50
4	145	168,9	-23,9	17,5	16,39	10,53	5,86	6,14	28,09	-34,23
5–	180	180,0	0	17,5	17,50	0	17,50	0	30,00	-30,00
5+	180	180,0	0	-12,5	-12,50	0	-12,50	0	30,00	-30,00
6	155	168,9	-13,9	-12,5	-11,70	-10,53	-1,17	4,39	28,09	-32,48
7–	130	135,0	-5,0	-12,5	-10,00	-18,00	8,00	7,50	24,00	-31,50
7+	130	135,0	-5,0	-32,5	-26,00	-18,00	-8,00	19,50	24,00	-43,50
8	65	78,9	-13,9	-32,5	-21,59	-22,42	0,83	24,29	19,93	-44,22
9	0	0	0	-32,5	-18,03	-24,96	6,93	27,04	16,64	-43,68

По результатам розрахунків, виконаних в табл.9.2, побудовано епюри внутрішніх зусиль в перерізах тришарнірної арки (рис.9.9).

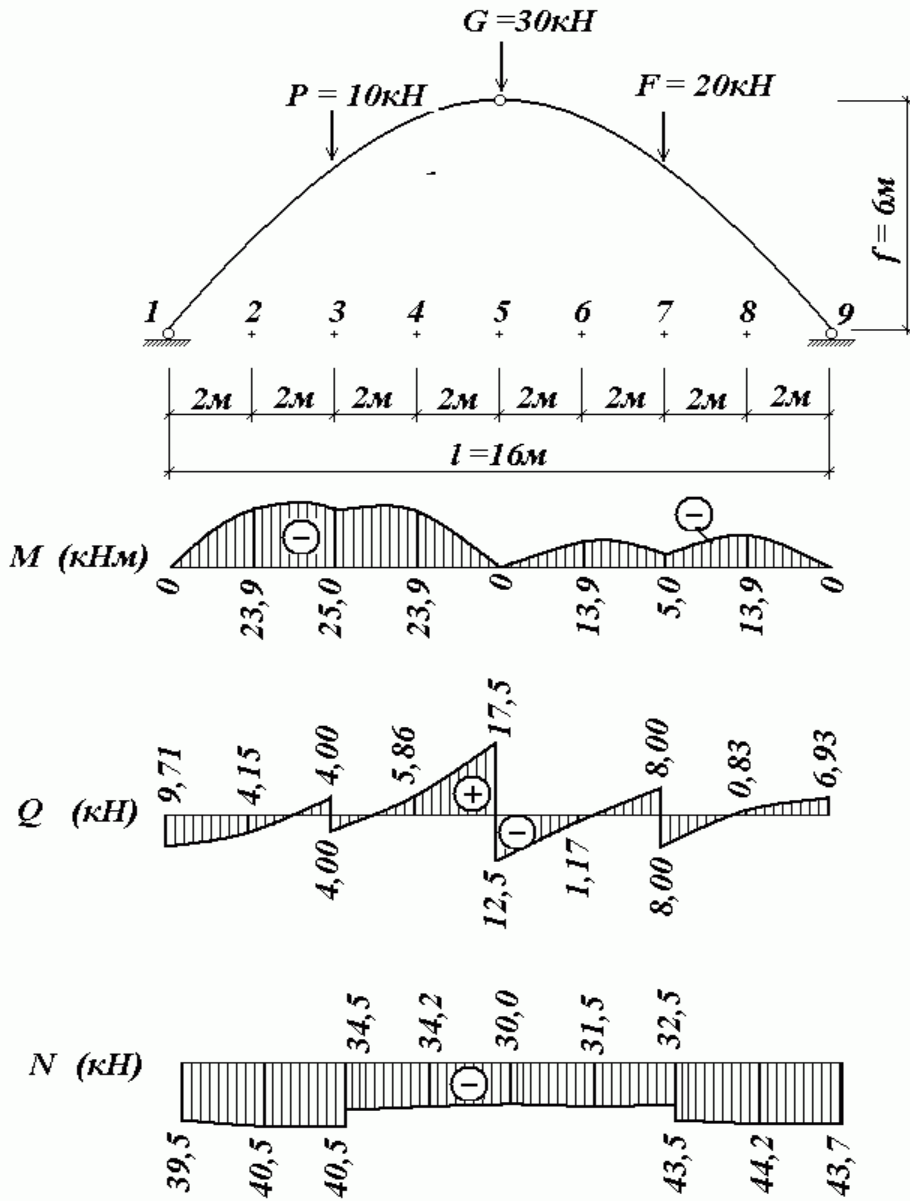


Рис.9.9

**Задача 2.**

**Дано:** Розрахункова модель (рис.9,10). Вісь арки – синусоїда.

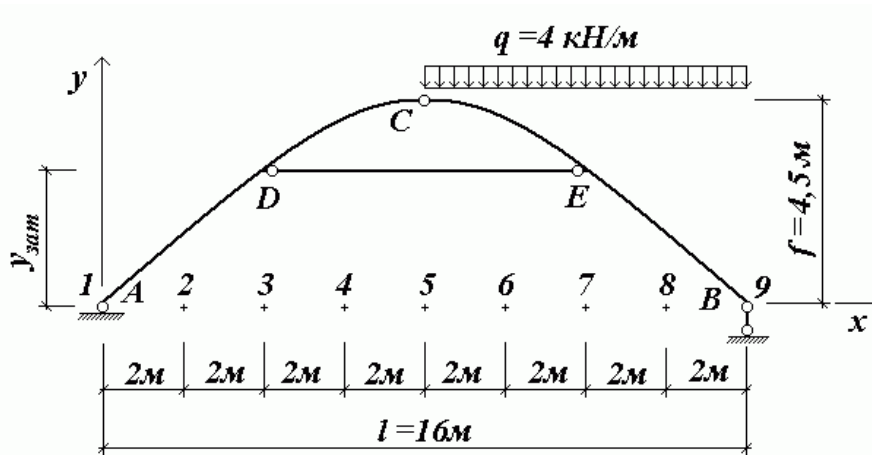


Рис.9.10

**Необхідно:** Визначити внутрішні зусилля в поперечних перерізах арки, центри тяжіння яких мають абсцису  $x_1 = 6\text{ м}$ ,  $x_2 = 14\text{ м}$ .

**Розв'язування:**

Геометрія осі арки визначається за формулами

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l} = 4,5 \sin \frac{\pi x}{16};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = f \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi x}{l} = 4,5 \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi x}{16}.$$

Горизонт затяжки при  $x = 4\text{ м}$ :

$$y_{\text{зат}} = 4,5 \sin \frac{\pi \cdot 4}{16} = 3,18\text{ м}.$$

Висота арки та кути нахилу дотичних до її осі в точках, для яких визначаються внутрішні зусилля:

$$y_1 = 4,5 \sin \frac{\pi \cdot 6}{16} = 4,16\text{ м}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = 4,5 \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi \cdot 6}{16} = 0,3381; \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}(0,3381) = 18,68^\circ;$$

$$y_2 = 4,5 \sin \frac{\pi \cdot 14}{16} = 1,72\text{ м}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = 4,5 \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi \cdot 14}{16} = -0,8163; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}(-0,8163) = -39,23^\circ;$$

Визначення опорних реакцій еквівалентної балки (рис.9.11,а):

$$\sum_{i=1}^2 M_A(\vec{F}_i) = 0: -8q \cdot 12 + 16V_B = 0; \quad V_B = \frac{8q \cdot 12}{16} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 12}{16} = 24,0 \text{ кН},$$

$$\sum_{i=1}^1 F_{xi} = 0: \quad H_A = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = 0: \quad V_A - 8q + V_B = 0; \quad V_A = 8q - V_B = 8 \cdot 4 - 24,0 = 8,0 \text{ кН}.$$

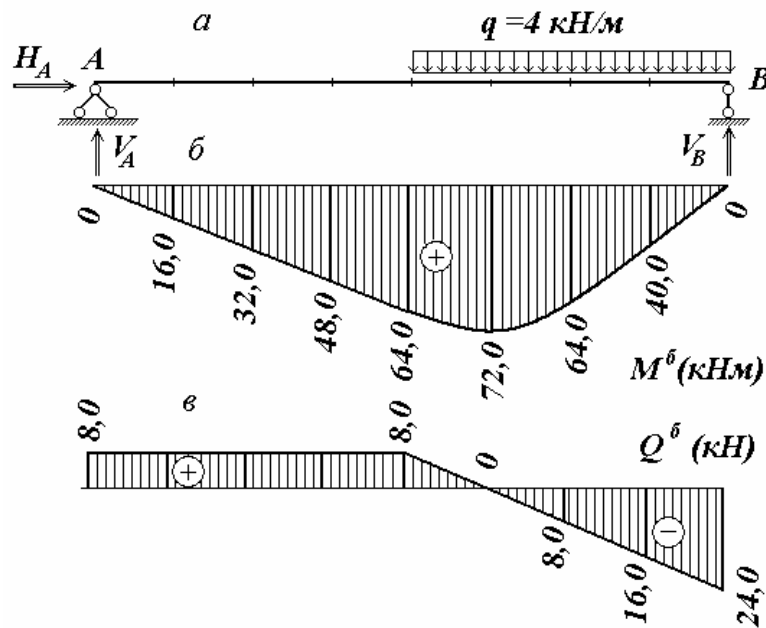


Рис.9.11

Перевірка:

$$\sum_{i=1}^2 M_B(\vec{F}_i) = 8q \cdot 4 - 16V_A = 8 \cdot 4 \cdot 4 - 16 \cdot 8 = 128 - 128 = 0.$$

Поздовжня сила в з'язці арки визначається як відношення балочного моменту під замком арки (рис.9,11,б) до відстані між замком та з'язкою:

$$H = \frac{M_C^{\delta}}{f - y_{\text{зат}}} = \frac{64}{4,5 - 3,18} = 48,48 \text{ кН}.$$

В перерізі  $x_1 = 6\text{м}$ , який розташовано вище з'язки, внутрішні зусилля в арці визначаються через значення внутрішніх зусиль в еквівалентній балці (9.14):

$$M_1 = M_1^{\delta} - H(y_6 - y_{\text{зат}}) = 48 - 48,48 \cdot (4,16 - 3,18) = 0,49 \text{ кН},$$

$$Q_1 = Q_1^{\delta} \cos \varphi_1 - H \sin \varphi_1 = 8 \cos 18,68^{\circ} - 48,48 \sin 18,68^{\circ} = -7,95 \text{ кН},$$

$$N_1 = -\left(Q_1^{\bar{0}} \sin \varphi_1 + H \cos \varphi_1\right) = -\left(8 \sin 18,68^\circ + 48,48 \cos 18,68^\circ\right) = -48,49 \text{ кН}.$$

Другий переріз арки ( $x_2 = 14\text{м}$ ) розташовано нижче затяжки. Тому внутрішні зусилля визначаються за формулами (9.13):

$$M_2 = M_2^{\bar{0}} = 40 \text{ кНм},$$

$$Q_2 = Q_2^{\bar{0}} \cos \varphi_2 = -16 \cdot \cos(-39,23^\circ) = -12,39 \text{ кН},$$

$$N_2 = -Q_2^{\bar{0}} \sin \varphi_2 = 16 \cdot \sin(-39,23^\circ) = -10,12 \text{ кН},$$

### Задача 3.

Дано: Розрахункова модель (рис.9,12). Вісь арки – коло.

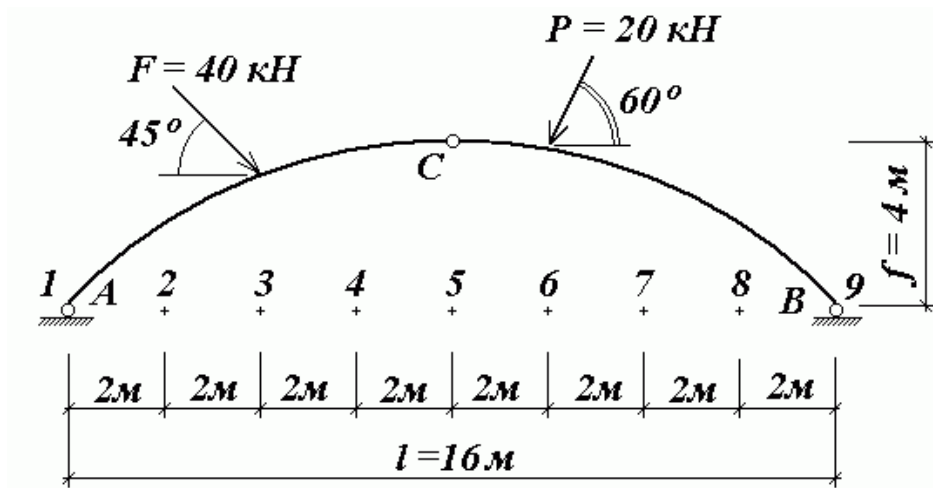


Рис.9.12

**Необхідно:** Визначити внутрішні зусилля в поперечних перерізах арки, центри тяжіння яких мають абсцису  $x_1 = 6\text{м}$ ,  $x_2 = 14\text{м}$ .

### Розв'язування:

Визначення ординат точок прикладання навантаження на арку:

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \frac{4}{2} + \frac{16^2}{8 \cdot 4} = 10 \text{ м}.$$

При  $x_1 = 4\text{м}$ :

$$y_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - 4\right)^2} - R + f = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2} - 4\right)^2} - 10 + 4 = 3,17 \text{ м}.$$

При  $x_2 = 10\text{м}$ :

$$y_2 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - 10\right)^2} - R + f = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2} - 10\right)^2} - 10 + 4 = 3,80 \text{ м.}$$

Обчислення реакцій у п'ятах арки (рис.9.13):

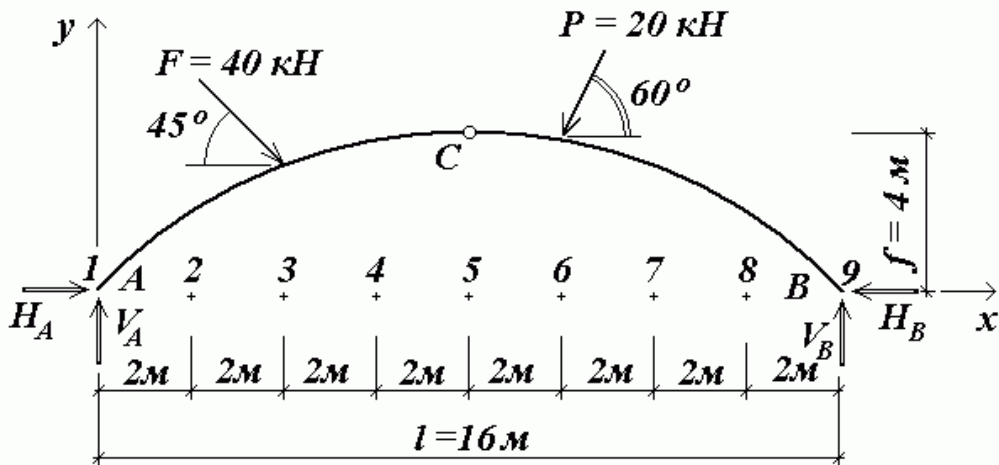


Рис.9.13

$$\sum_{i=1}^5 M_A(\vec{F}_i) = 0:$$

$$-4F\cos 45^\circ - 3,17F\sin 45^\circ - 10P\sin 60^\circ + 3,80P\cos 60^\circ + 16V_B = 0;$$

$$V_B = \frac{4F\cos 45^\circ + 3,17F\sin 45^\circ + 10P\sin 60^\circ - 3,80P\cos 60^\circ}{16} =$$

$$= \frac{4 \cdot 40 \cdot \cos 45^\circ + 3,17 \cdot 40 \cdot \sin 45^\circ + 10 \cdot 20 \cdot \sin 60^\circ - 3,80 \cdot 20 \cdot \cos 60^\circ}{16} = 21,13 \text{ кН.}$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{yi} = 0: \quad V_A - F\cos 45^\circ - P\cos 60^\circ + V_B = 0;$$

$$\begin{aligned} V_B &= F\cos 45^\circ + P\sin 60^\circ - P\cos 60^\circ - V_B = \\ &= 40 \cdot 0,7071 + 20 \cdot 0,866 - 21,13 = 24,47 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Горизонтальні реакції можна відшукати з рівнянь рівноваги лівої напіварки (рис.9.14):



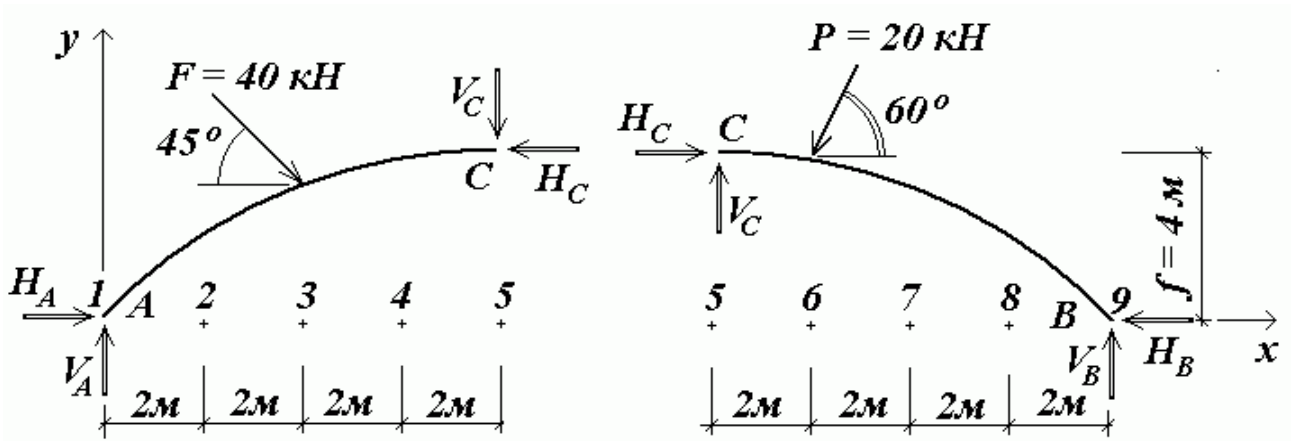


Рис.9.14

$$\sum_{i=1}^4 M_C(\vec{F}_i) = 0: \quad 4F \sin 45^\circ + 0,83F \cos 45^\circ + 4H_A - 8V_A = 0;$$

$$H_A = \frac{-4F \sin 45^\circ - 0,83F \cos 45^\circ + 8V_A}{4} =$$

$$= \frac{-4 \cdot 40 \cdot 0,7071 - 0,83 \cdot 40 \cdot 0,7071 + 8 \cdot 24,47}{4} = 14,79 \text{ кН}$$

та правої напіварки (рис.9.14):

$$\sum_{i=1}^4 M_C(\vec{F}_i) = 0: \quad -2P \sin 60^\circ - 0,2P \cos 60^\circ - 4H_B + 8V_B = 0;$$

$$H_B = \frac{-2P \sin 60^\circ - 0,2P \cos 60^\circ + 8V_B}{4} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 20 \cdot 0,8660 - 0,2 \cdot 20 \cdot 0,5 + 8 \cdot 21,13}{4} = 33,10 \text{ кН.}$$

Перевірка правильності визначення реакцій (див. [рис.9.13](#)):

$$\sum_{i=1}^4 F_x = H_A + F \cos 45^\circ - P \cos 60^\circ - H_B =$$

$$= 14,79 + 40 \cdot 0,7071 - 20 \cdot 0,5 - 33,10 = 43,07 - 43,10 = -0,03 \approx 0.$$

Для обчислення внутрішніх зусиль у двох перерізах арки визначаються ординати точок арки з відповідними абсцисами та кути дотичних до осі арки:

При  $x_1 = 6\text{ м}$ :

$$y_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x_1\right)^2} - R + f = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2} - 6\right)^2} - 10 + 4 = 3,80 \text{ м,}$$

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{l-2x_1}{2R} = \arcsin \frac{16-2 \cdot 6}{2 \cdot 10} = 11,54^\circ.$$

При  $x_2 = 12$ м:

$$y_2 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x_2\right)^2} - R + f = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2} - 12\right)^2} - 10 + 4 = 3,17 \text{ м},$$

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{l-2x_2}{2R} = \arcsin \frac{16-2 \cdot 12}{2 \cdot 10} = -23,56^\circ.$$

В перерізі арки при  $x_1 = 6$ м внутрішні зусилля визначаються з умов рівноваги лівої частини арки, проєцируючи всі сили на осі глобальної системи координат:

$$\sum_{i=1}^4 F_{xi} = 0: \quad H_A + F \cos 45^\circ + N_1 \cos \varphi_1 + Q_1 \sin \varphi_1 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{yi} = 0: \quad V_A - F \sin 45^\circ + N_1 \sin \varphi_1 - Q_1 \cos \varphi_1 = 0.$$

Одержано систему рівнянь відносно шуканих поздовжньої та поперечної сил в перерізі арки:

$$\begin{cases} 14,79 + 40 \cos 45^\circ + N_1 \cos 11,54^\circ + Q_1 \sin 11,54^\circ = 0; \\ 24,47 - 40 \sin 45^\circ + N_1 \sin 11,54^\circ - Q_1 \cos 11,54^\circ = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,9798 N_1 + 0,2 Q_1 = -43,07; \\ 0,2 N_1 - 0,9798 Q_1 = 3,81. \end{cases}$$

Звідси  $N_1 = -43,96 \text{ кН}$ ;  $Q_1 = -0,001 \text{ кН}$ .

Згинальний момент в перерізі арки при  $x_1 = 6$ м:

$$\sum_{i=1}^4 M_1(\vec{F}_i) = 0: \quad M_1 + 2F \sin 45^\circ - 0,63F \cos 45^\circ + 3,8H_A - 6V_A = 0;$$

$$M_1 = -2F \sin 45^\circ + 0,63F \cos 45^\circ - 3,8H_A + 6V_A =$$

$$= -2 \cdot 40 \cdot 0,7071 + 0,63 \cdot 40 \cdot 0,7071 - 3,8 \cdot 14,79 + 6 \cdot 24,47 = 165,01 \text{ кНм}.$$

В перерізі арки при  $x_2 = 12$ м внутрішні зусилля визначаються з умов рівноваги правої частини арки, проєцируючи всі сили на осі локальної системи координат:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ni} = 0: N_2 + H_B \cos \varphi_2 + V_B \sin \varphi_2 = 0;$$

$$N_2 = -H_B \cos \varphi_2 - V_B \sin \varphi_2 = -33,10 \cos 23,56^\circ - 21,13 \sin 23,56^\circ = -38,79 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{qi} = 0: Q_2 - H_B \sin \varphi_2 + V_B \cos \varphi_2 = 0;$$

$$Q_2 = H_B \sin \varphi_2 - V_B \cos \varphi_2 = 33,1 \sin 23,56^\circ - 21,13 \cos 23,56^\circ = -6,14 \text{ кН}.$$

Визначення згинального моменту в перерізі арки при  $x_2 = 12\text{м}$ :

$$\sum_{i=1}^4 M_2(\vec{F}_i) = 0: -M_2 - 3,17H_B + 4V_B = 0;$$

$$M_2 = 4V_B - 3,17H_B = 4 \cdot 24,47 - 3,17 \cdot 14,79 = 51,0 \text{ кНм}.$$

Знаки "–" свідчать, що напрямок дії сили протилежний зображеному на рисунку.