

Виберіть форму подання навчального матеріалу

✓ Докладне подання

[Скорочене подання](#)

10. Плоскі рами

Зміст глави

[10.1. Класифікація статично визначуваних рам](#)

[10.2. Визначення опорних реакцій](#)

[10.2.1. Консольна рама](#)

[10.2.2. Балкова рама](#)

[10.2.3. Аркова рама](#)

[10.2.4. Складені рами](#)

[10.3. Обчислення внутрішніх зусиль у плоских рамах](#)

[10.4. Приклад статичного розрахунку простої рами](#)

[10.5. Приклад розрахунку складеної рами](#)

[10.6. Приклад розрахунку рами із замкненим контуром](#)

[Запитання для самоперевірки](#)

10.1. Класифікація статично визначуваних рам

Рамою називають систему, що складається з прямолінійних стержнів, які поєднуються між собою у вузлах, причому принаймні деякі з вузлів є жорсткими. Вертикальні стержні або такі, що наближаються до вертикальних, називають **стійками**, а горизонтальні або майже горизонтальні – **ригелями** (рис.10.1).

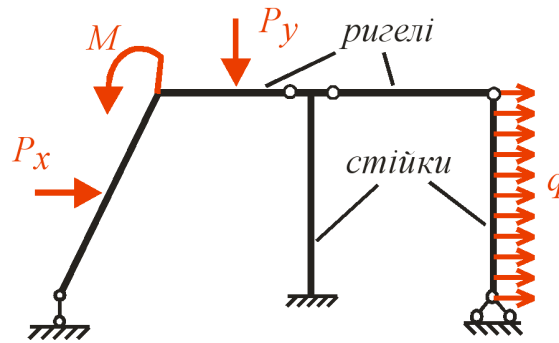


Рис.10.1

При розрахунку рам доцільно розподілити їх за якимось ознаками. Для цього зручно скористатись ознаками кінематичного аналізу. Всю сукупність статично визначуваних плоских рам можна розподілити на прості і складені. До простих можна віднести рами, для яких структурний (якісний) етап кінематичного аналізу здійснюється за один етап, тобто такі, що утворюються з двох або трьох дисків (включаючи диск "земля") за допомогою звичайних засобів з'єднання дисків (див. [главу 2](#)). Виходячи з цього прості рами можна у свою чергу, поділити на три типи: консольні, балкові й аркові.

До консольних рам можна віднести такі, що є приєднанням двох дисків, одним із яких є диск "земля", за допомогою припайки. Так, на рис.10.2,а диск ABC з'єднується з основою за допомогою припайки в перерізі A . Отже, ця рама може бути віднесена до консольного типу.

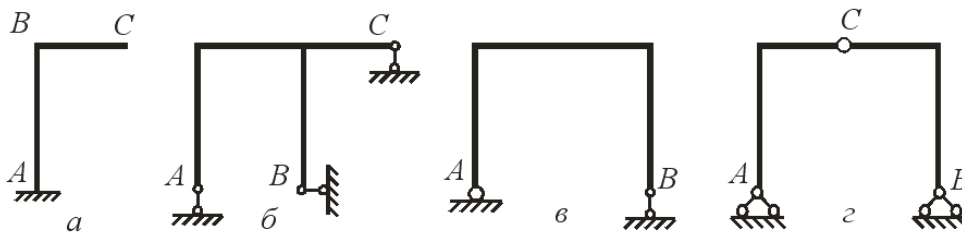


Рис.10.2

Балкові рами утворюються з двох дисків за способом Шухова або за способом Полонсо. Так, рама, що зображена на рис.10.2,б, є приєднанням диска ABC до диску "земля" за допомогою трьох кінематичних в'язей, тобто за способом Шухова. Отже це рама балкового типу. Диск AB (рис.10.2,в) приєднується до диску "земля" за допомогою шарніра і стержня, тобто за способом Полонсо. Тому ця рама також може вважатись балковою.

Рами, що утворюються за способом шарнірного трикутника, можуть бути віднесені до аркового типу. Наприклад, рама, зображена на рис. 10.2,г, утворена за способом шарнірного трикутника. Справді, диски AC , BC і диск "земля" з'єднуються між собою за допомогою трьох шарнірів, причому шарнір C є реальним, а шарніри A і B – фіктивними. Отже, дану схему можна розглядати як просту раму аркового типу.

До складених можна віднести рами, для яких структурний (якісний) етап кінематичного аналізу здійснюється більше, ніж за один етап. Частину складеної рами, що відповідає одному етапу, умовно називатимемо “поверхом”. Отже кожен “поверх” може розглядатись як проста рама, і тому складену раму можна розглядати як сукупність кількох простих рам.

Розглянемо структуру рами, що зображена на рис.10.3,а.

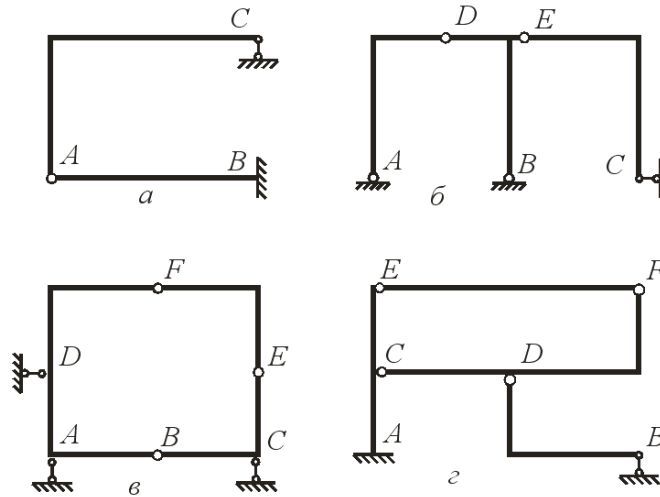


Рис.10.3

Рама може бути утворена за два етапи. На першому етапі диск AB приєднується до диску “земля” за способом припайки. Тобто перший “поверх” становить геометрично незмінювану раму консольного типу. Новоутворений диск з’єднується з диском AC шарніром A і кінематичною в’яззю на опорі C , тобто другий “поверх” – це проста геометрично незмінювана рама балкового типу. Отже, вся система є геометрично незмінюваною. Якщо позначити диск–“земля” через $D_{\text{земля}}$, то процедуру побудови схеми можна записати у вигляді послідовності формул:

$$1. \frac{D_{AB} + D_{\text{земля}}}{\Pi_B} \Rightarrow D_1,$$

$$2. \frac{D_{AC} + D_1}{\text{Ш}_A, C_C} \Rightarrow D_2.$$

Рама, що зображена на рис.10.3,б, також може бути утворена за два етапи:

$$1. \frac{D_{AD} + D_{BD} + D_{\text{земля}}}{\text{Ш}_A, \text{Ш}_D, \text{Ш}_B} \Rightarrow D_1,$$

$$2. \frac{D_{EC} + D_1}{\text{Ш}_E, C_C} \Rightarrow D_2.$$

Зрештою можна вважати, що дана рама складається з двох поверхів: перший поверх – це проста рама аркового типу, а другий – балкового.

Аналогічно утворюється складена рама на [рис.10.3.в](#). Для неї можна записати:

$$1. \frac{D_{BADF} + D_{FE} + D_{BCE}}{Ш_B, Ш_E, Ш_F} \Rightarrow D_1,$$

$$2. \frac{D_{земля} + D_1}{C_A, C_C, C_D} \Rightarrow D_2.$$

Дещо складніше монтується рама, зображена на [рис.10.3.г](#):

$$1. \frac{D_{AB} + D_{земля}}{П_A} \Rightarrow D_1,$$

$$2. \frac{D_{EF} + D_{CF} + D_1}{Ш_E, Ш_F, Ш_C} \Rightarrow D_2,$$

$$3. \frac{D_{BD} + D_2}{Ш_D, C_B} \Rightarrow D_3.$$

Отже, ця рама утворюється за три етапи і має три “поверхи”: перший “поверх” – проста рама консольного типу, другий – аркового і третій – балкового.

10.2. Визначення опорних реакцій

Опорні реакції в рамах визначаються методом перерізів. При цьому рама або її частина відокремлюється від опор. Замість відкинутих в'язей прикладаються реакції, після чого для відокремленої частини складаються рівняння рівноваги, розв'язок яких визначає величини опорних реакцій. Спосіб складання рівнянь рівноваги залежить від типу рами.

10.2.1. Консольна рама

Для визначення опорних реакцій у рамі консольного типу (рис.10.4,а) потрібно провести переріз через припайку А, відокремлюючи раму від “землі”.

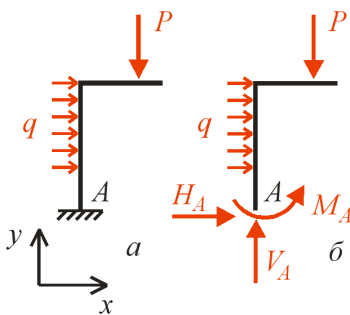


Рис.10.4

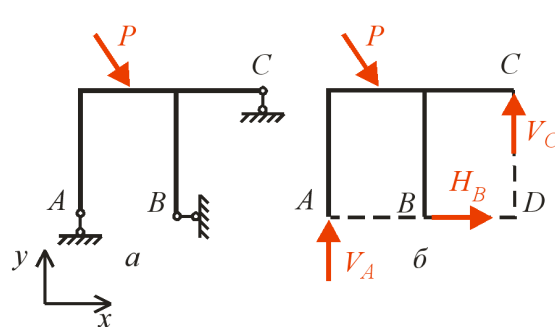


Рис.10.5

Замість розсіченої припайки прикладаємо її реакції H_A, V_A, M_A , які еквівалентні реакціям опори А (рис. 10.4,б), і складаємо три рівняння рівноваги:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_A = 0.$$

Величини опорних реакцій визначаються розв'язком цих рівнянь.

10.2.2. Балкова рама

Для визначення опорних реакцій у балковій рамі (рис.10.5,а) проводимо переріз через опорні в'язі, відділяючи раму від "землі". Замість розсічених в'язей прикладаємо реактивні сили V_A , H_B , V_C (рис.10.5,б), після чого можемо скласти такі рівняння рівноваги

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_D = 0; \quad \sum F_x = 0.$$

10.2.3. Аркова рама

Для обчислення опорних реакцій у простій рамі аркового типу (рис.10.6,а) необхідно провести переріз через опорні в'язі і прикласти реакції розсічених в'язей як зовнішні сили невідомої величини (рис.10.6,б).

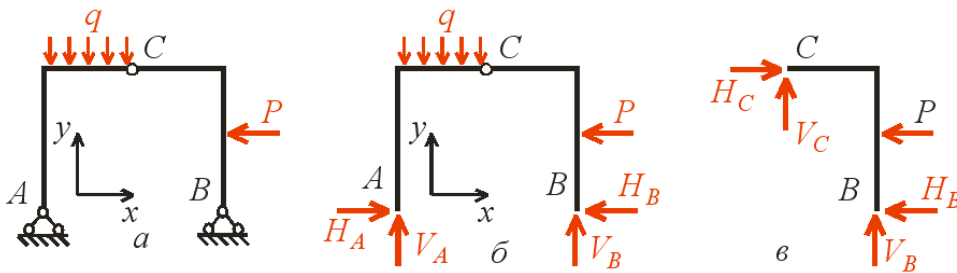


Рис.10.6

Для визначення вертикальних реакцій V_A і V_B можна скласти рівняння моментів

$$\sum M_B = 0; \quad \sum M_A = 0.$$

З рівняння проєкцій $\sum F_x = 0$ дістанемо лише співвідношення між горизонтальними реакціями H_A і H_B . Для обчислення числових величин цих реакцій слід провести ще один переріз, який відокремить один із дисків, наприклад диск BC (рис.10.6,в), і скласти рівняння моментів $\sum M_C = 0$, розв'язок якого визначить величину H_B .

10.2.4. Складені рами

При розрахунку складених рам необхідно обчислювати не тільки опорні реакції всієї складеної рами, а й опорні реакції рам кожного "поверху". Ці реакції визначаються для кожного "поверху" окремо. Обчислення опорних реакцій слід розпочати з рами найверхнього "поверху", після чого

можна переходити до наступного нижнього “поверху” тощо. До “поверху”, що розраховується, крім заданих зовнішніх навантажень, необхідно прикласти опорні реакції верхнього “поверху” як вже відомі зовнішні сили.

Розглянемо процес визначення опорних реакцій на прикладі рами (рис.10.7,а).

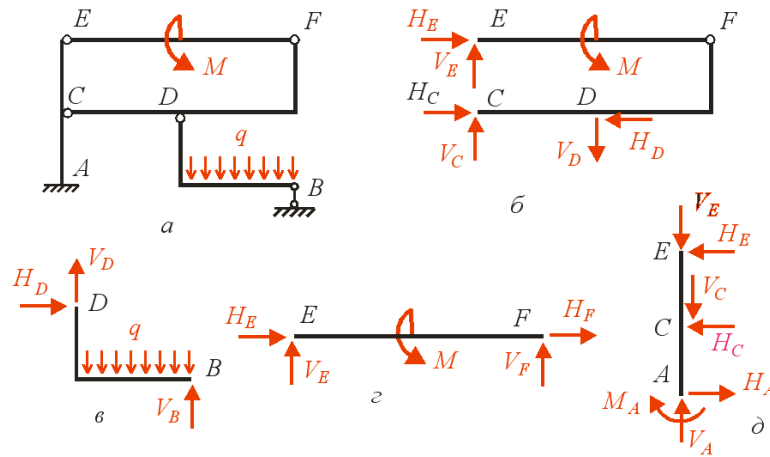


Рис.10.7

Як зазначалось у п.10.1, рама має три “поверхи”. Обчислення реакцій починаємо з третього, тобто найвищого, “поверху”. Відокремимо диск BD від заданої рами, розрізавши опорний стержень на шарнірно-рухомій опорі B і шарнір D . Врешті маємо просту раму балкового типу (рис.10.7,б). Для визначення опорних реакцій V_B, V_D і H_D можемо скласти три рівняння рівноваги

$$\sum M_D = 0; \quad \sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0.$$

Далі проводимо переріз через шарніри C і E , відокремлюючи просту раму аркового типу EFC (рис.10.7,в). На цю раму, крім зовнішнього навантаження (зосереджений момент M) необхідно прикласти опорні реакції верхнього “поверху” V_D, H_D , як відомі зовнішні сили. Слід звернути увагу на те, що ці реакції є силами взаємодії між двома поверхами, тому вони повинні прикладатися до нижнього “поверху” рами у протилежних напрямках, щодо реакцій верхнього “поверху”. Для визначення реакцій потрібно скласти рівняння моментів $\sum M_C = 0$, $\sum M_E = 0$ і проєкцій $\sum F_y = 0$. За першими двома рівняннями дістанемо величини реакцій H_E і H_C . Третє рівняння містить дві невідомі реакції V_C і V_E . Для обчислення величин цих реакцій доведеться зробити додатковий переріз по шарніру F і розглянути рівновагу одного з

дисків, наприклад диска EF (рис.10.7.г): склавши рівняння моментів $\sum M_F = 0$, знайдемо величину реакції V_E .

Зрештою розглянемо раму першого “поверху”. Відокремлюючи її від “землі” шляхом розрізу припайки A і прикладаючи невідомі реакції припайки H_A, V_A, M_A , а також реакції верхнього “поверху” V_E, H_E, V_C, H_C як вже відомі зовнішні сили (рис.10.7.д), складаємо три рівняння рівноваги $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_A = 0$, звідки обчислюємо опорні реакції в затисненні A .

10.3. Обчислення внутрішніх зусиль у плоских рамах

Унаслідок дії зовнішніх навантажень у перерізах плоских рам виникають згинальні і поздовжні деформації, а також деформації зсуву. Цим деформаціям відповідають внутрішні зусилля: згинальні моменти, поздовжні і поперечні сили. Розрахунок рам полягає в обчисленні зусиль і в побудові графіків їхнього розподілу в стержнях. Означені графіки називають **епюрами** внутрішніх зусиль.

Визначення внутрішніх зусиль у стержневих системах було розглянуто в п.2.7.2. Нагадаємо ще раз правила їх обчислення стосовно до рам.

Згинальний момент у перерізі стержня рами обчислюється як сума моментів усіх сил, що прикладені до рами по один бік від перерізу, відносно центра тяжіння перерізу. Так, правило обчислення згинального моменту в перерізі стержня рами $k-k$ можна записати у вигляді формули $M_{k-k} = \sum M_{k-k}$, де знак суми поширюється на одну з частин, на які переріз поділяє раму.

У рамах знаки згинальних моментів не визначені. При побудові епюри на стержнях рам ординати прийнято відкладати від розтягнених волокон.

Поперечна сила в перерізі $k-k$ стержня рами обчислюється як сума проекцій усіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на нормаль n до осі стержня в цьому перерізі: $Q_{k-k} = \sum F_{n,k-k}$. За цією формулою підсумовуються всі сили, що прикладені до однієї з частин рами. Поперечна сила вважається додатною, якщо вона намагається повернути відповідну частину стержня стосовно перерізу за годинниковою стрілкою.

Поздовжня сила в перерізі $k-k$ стержня рами обчислюється як сума проекцій всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на напрям t осі стержня в цьому перерізі: $N_{k-k} = \sum F_{t,k-k}$.

Тут також беруть до уваги всі сили, які діють на одну з частин рами. Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона розтягує переріз.

Розглянемо обчислення внутрішніх зусиль у довільному перерізі $k-k$ рами (рис.10.8,а). Вважатимемо, що всі зовнішні навантаження q , P , M , а також опорні реакції відомі. Переріз $k-k$ поділяє раму на дві частини: ліву (рис.10.8,б) і праву (рис.10.8,в). В обох частинах у місці перерізу $k-k$ прикладено реакції розрізаних в'язей, тобто внутрішні зусилля M_k, Q_k, N_k , причому поперечні і поздовжні сили прикладено в додатному напрямі, а згинальні моменти – в напрямі, який відповідає розтягненню нижнього волокна стержня.

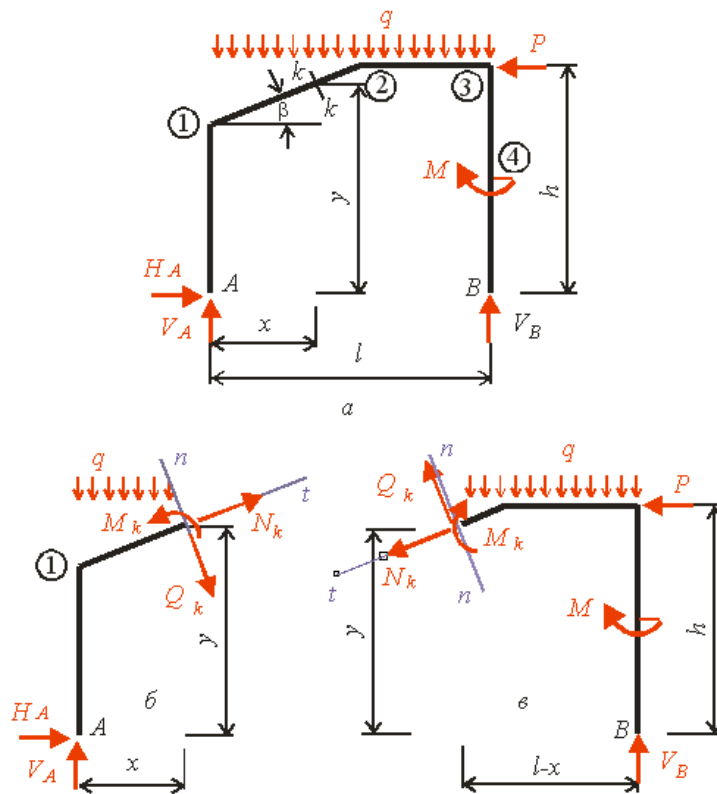


Рис.10.8

Тоді виходячи з умов рівноваги лівої частини рами (рис.10.8,б), можемо записати

$$M_k = \sum M_k^{лів.} = V_A x - H_A y - qx \cdot x/2,$$

$$Q_k = \sum F_n^{лів.} = V_A \cos \beta - H_A \sin \beta - qx \cos \beta;$$

$$N_k = \sum F_t^{лів.} = -V_A \sin \beta - H_A \cos \beta + qx \sin \beta.$$

Якщо розглядати рівновагу правої частини (рис.10.8,в), то можна записати:

$$M_k = \sum M_k^{прав.} = V_B (l - x) - P(h - y) - q(l - x) \cdot (l - x)/2 - M,$$

$$Q_k = \sum F_n^{npas.} = -V_B \cos\beta - P \sin\beta + q(l-x) \cos\beta,$$

$$N_k = \sum F_t^{npas.} = +V_B \sin\beta - P \cos\beta - q(l-x) \sin\beta.$$

При обчисленні згинального моменту M_k в даному прикладі доданки вважаються додатними, якщо моменти відповідних силових дій викликають розтягування в нижніх волокнах.

Необхідно усвідомлювати, що у випадку, коли опорні реакції задовольняють умови рівноваги, внутрішні зусилля, обчислені із розгляду лівої (рис.10.8,б) чи правої (рис.10.8,в) частин рами, матимуть ті самі величини і знаки. На цій підставі при виконанні практичних розрахунків слід розглядати ту частину рами, на яку діє менша кількість зовнішніх сил, тобто ту, для якої простіше виконувати обчислення.

Зазначений спосіб визначення внутрішніх зусиль застосовується при розрахунку простих рам. Такий підхід дає можливість іноді, але не завжди, обчислити зусилля й для деяких складених рам. Проте загальний спосіб розрахунку полягає в розкладенні складених рам на окремі “поверхи”. В такому разі розрахунки внутрішніх зусиль виконуються для кожного “поверху” окремо.

При побудові епюр виникає необхідність обчислювати зусилля у великій кількості перерізів. Істотне скорочення перерізів може бути одержано за рахунок використання правил побудови епюр у стержнях, відомих з курсу опору матеріалів:

- Якщо на ділянці стержня відсутнє будь-яке зовнішнє навантаження, то епюра згинальних моментів змінюється за лінійним законом, а поперечні і поздовжні сили є постійними. Тому для побудови епюри M достатньо обчислити згинальні моменти в двох перерізах ділянки, а для побудови епюр Q і N – величини поперечних і поздовжніх сил в будь-якому одному перерізі.
- Якщо на ділянці стержня розташоване зовнішнє розподілене навантаження, то згинальні моменти змінюються за нелінійним законом (у випадку, якщо навантаження розподілене рівномірно – за законом квадратної параболи), і тому для побудови епюри M необхідно обчислити згинальні моменти принаймні в трьох перерізах ділянки. Епюри Q і N при дії рівномірно розподіленого навантаження змінюються за лінійним законом, і тому необхідно обчислювати відповідні величини в двох перерізах. Якщо ж навантаження розподілене нерівномірно, то величини Q і N змінюються за нелінійним законом і для побудови їхніх епюр необхідно обчислювати відповідні величини не менш ніж у трьох перерізах ділянки.

Отже, для побудови епюр необхідно насамперед розбити раму на окремі ділянки. Межами ділянок можуть бути:

- місця поєднання двох або більше стержнів;
- перерізи, в яких прикладено зовнішні зосереджені сили або моменти;

- місця початку і закінчення розподілених навантажень.

Так, у рамі (рис.10.8.а), можна виокремити п'ять ділянок: А-1, 1-2, 2-3, 3-4 і 4-В.

Далі для кожної рами треба визначити кількість перерізів для обчислення згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил, визначити відповідні величини і побудувати їхні епюри.

10.4. Приклад статичного розрахунку простої рами

Розрахункова схема рами представлена на рис.10.9,а.

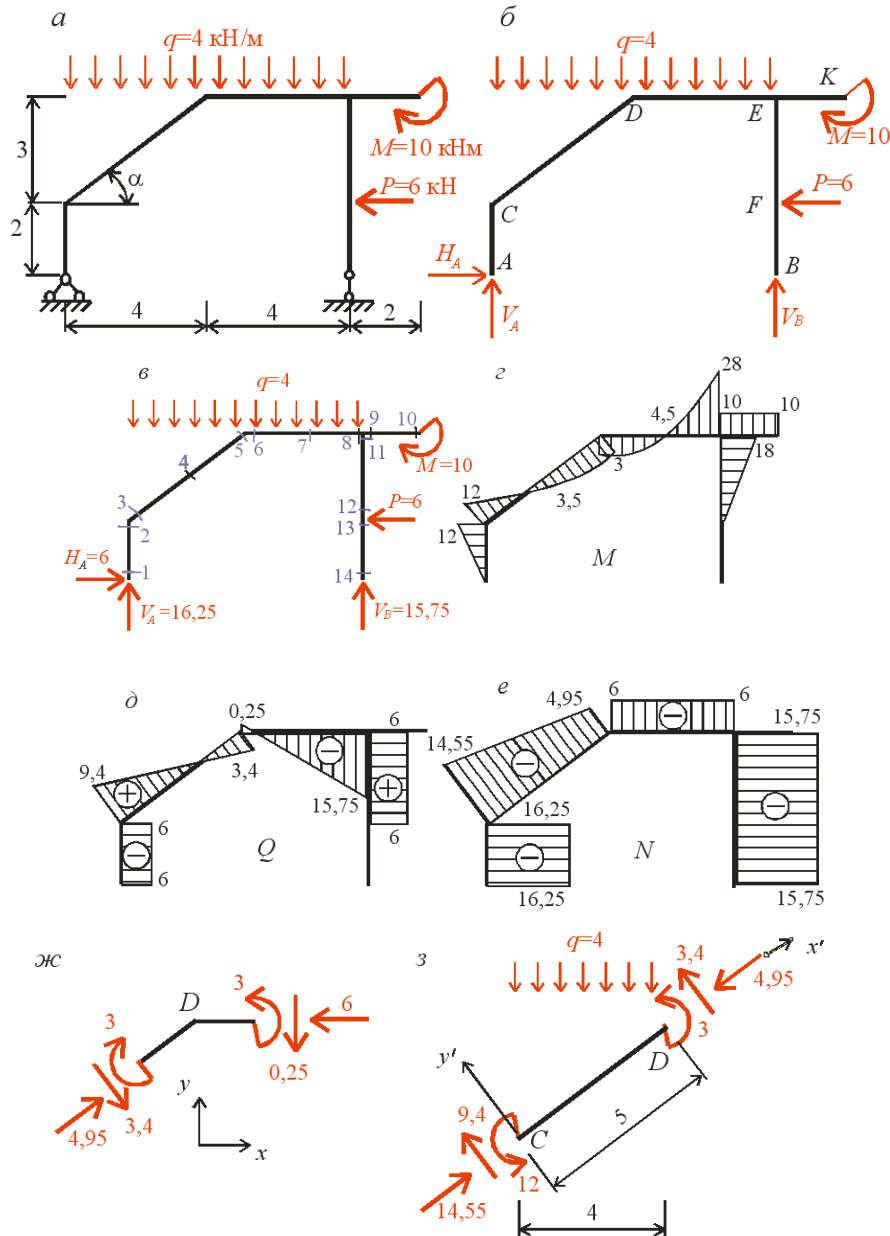


Рис.10.9

Необхідно виконати статичний розрахунок рами, тобто побудувати епюри згинальних моментів M , поперечних сил Q і поздовжніх сил N .

Кінематичний аналіз

Система складається з двох дисків: суцільний ламаний стержень, що уособлює власне раму, і диск основи (“земля”), які з’єднуються трьома кінематичними в’язями, тобто $D = 2$, $C = 3$, $\Pi = 0$, $V = 0$, $\text{III} = 0$. Отже, за формулою Чебишова геометрична змінюваність становить

$$G = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 3 - 3 = 0.$$

Геометрична структура: система складається з двох дисків, поєднаних трьома стержнями, які всі водночас не паралельні й не перетинаються в одній точці.

Висновок: рама геометрично незмінювана, статично визначувана і утворена за один “крок”, тобто є простою.

Визначення опорних реакцій

Для визначення опорних реакцій проводимо переріз через опорні з’єднання і замість розрізаних опорних стержнів прикладаємо реакції V_A, H_A, V_B як зовнішні сили невідомої величини ([рис.10.9.б](#)). Знаходимо їх величини з рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow -V_B \cdot 8 + 10 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_B = 15,75 \text{ кН}, \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow V_A \cdot 8 + 10 + 6 \cdot 2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_A = 16,25 \text{ кН}, \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A - 6 = 0 \Rightarrow H_A = 6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Обчислення внутрішніх зусиль і побудова епюр

Розбивку рами на окремі ділянки AC , CD , ED , EK , EF , FB зображено на [рис.10.9.б](#). Залежно від виду навантаження на кожній ділянці призначаються два або три перерізи ([рис.10.9.в](#)).

Визначаємо згинальні моменти в обраних перерізах.

$$M_1 = \sum M_1^{\text{ниж}} = 0,$$

$$M_2 = \sum M_2^{\text{ниж}} = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кНм (розтяг зліва)},$$

$$M_3 = \sum M_3^{\text{лів}} = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кНм (розтяг зверху)},$$

$$M_4 = \sum M_4^{\text{лів}} = 16,25 \cdot 2 - 6 \cdot 3,5 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 3,5 \text{ кНм (розтяг знизу)},$$

$$M_5 = \sum M_5^{\text{лів}} = 16,25 \cdot 4 - 6 \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 3 \text{ кНм (розтяг знизу)},$$

$$M_6 = \sum M_6^{\text{лів}} = 16,25 \cdot 4 - 6 \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 3 \text{ кНм (розтяг знизу)},$$

$$M_7 = \sum M_7^{\text{лів}} = 16,25 \cdot 6 - 6 \cdot 3,5 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = -4,5 \text{ кНм (розтяг зверху)},$$

$$M_8 = \sum M_8^{прав} = 6 \cdot 3 + 10 = 28 \text{ кНм (розтяг зверху),}$$

$$M_9 = \sum M_9^{прав} = 10 \text{ кНм (розтяг зверху),}$$

$$M_{10} = \sum M_{10}^{прав} = 10 \text{ кНм (розтяг зверху),}$$

$$M_{11} = \sum M_{10}^{ниж} = 6 \cdot 3 = 18 \text{ кНм (розтяг праворуч),}$$

$$M_{12} = \sum M_{12}^{ниж} = 0,$$

$$M_{13} = \sum M_{13}^{ниж} = 0,$$

$$M_{14} = \sum M_{14}^{ниж} = 0.$$

Епюра згинальних моментів побудована на [рис.10.9.г.](#)

Поперечні сили в перерізах рами.

$$Q_1 = Q_2 = \sum F_{n,1}^{ниж} = -6 \text{ кН ,}$$

$$Q_3 = \sum F_{n,3}^{лів} = V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha = 16,25 \cdot 0,8 - 6 \cdot 0,6 = 9,4 \text{ кН}$$

$$Q_5 = \sum F_{n,5}^{лів} = V_A \cos \alpha - q \cdot 4 \cos \alpha - H_A \sin \alpha = \\ = 16,25 \cdot 0,8 - 4 \cdot 4 \cdot 0,8 - 6 \cdot 0,6 = -3,4 \text{ кН ,}$$

$$Q_6 = \sum F_{n,6}^{лів} = V_A - q \cdot 4 = 16,25 - 4 \cdot 4 = 0,25 \text{ кН ,}$$

$$Q_8 = \sum F_{n,8}^{прав} = -V_B = -15,75 \text{ кН ,}$$

$$Q_9 = Q_{10} = \sum F_{n,9}^{прав} = 0,$$

$$Q_{11} = Q_{12} = \sum F_{n,8}^{прав} = P = 6 \text{ кН ,}$$

$$Q_{13} = Q_{14} = \sum F_{n,13}^{ниж} = 0.$$

Епюра поперечних сил побудована на [рис.10.9.д.](#)

Поздовжні сили в перерізах рами.

$$N_1 = N_2 = \sum F_{t,8}^{\text{ниж}} = -V_A = -16,25 \text{ кН}$$

$$N_3 = \sum F_{t,3}^{\text{ліг}} = -V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha = 16,25 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,8 = -14,55 \text{ кН},$$

$$N_5 = \sum F_{t,5}^{\text{ліг}} = -V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha + q \cdot 4 \cdot \sin \alpha = \\ = 16,25 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,8 + 4 \cdot 4 \cdot 0,6 = -4,95 \text{ кН},$$

$$N_6 = N_8 = \sum F_{t,6}^{\text{прав}} = -P = -6 \text{ кН},$$

$$N_9 = N_{10} = \sum F_{t,9}^{\text{прав}} = 0,$$

$$N_{11} = N_{12} = \sum F_{t,11}^{\text{ниж}} = -V_B = -15,75 \text{ кН}$$

$$N_{13} = N_{14} = \sum F_{t,13}^{\text{ниж}} = -V_B = -15,75 \text{ кН}.$$

Епюра поздовжніх сил побудована на [рис.10.9,е](#).

Перевірки епюр

Перевіримо рівновагу одного з вузлів, наприклад вузла *D*. Вирізаний вузол зображено на [рис.10.9,ж](#). До вузла в місцях розрізів прикладено внутрішні зусилля, які вибираються з епюр. Згинальні моменти, які на епюрі *M* відкладено знизу, прикладаються так, щоб зумовлювати розтяг нижніх волокон. Додатні поперечні сили прикладено так, що вони намагаються повернути вузол за годинниковою стрілкою. Від'ємні поздовжні сили спрямовані так, щоби викликати стиск в перерізах. Складаючи для вузла рівняння рівноваги маємо:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 4,95 \cdot 0,8 + 3,4 \cdot 0,6 - 6 \equiv 0; \\ \sum F_y &= 4,95 \cdot 0,6 - 3,4 \cdot 0,8 - 0,25 \equiv 0; \\ \sum M &= 3 - 3 \equiv 0. \end{aligned}$$

Перевіримо відповідність між епюрами *M* і *Q* на ділянках, де епюра *M* прямолінійна:

$$Q_{AC} = -\frac{12}{2} = -6 \text{ кН},$$

$$Q_{EF} = \frac{18}{3} = 6 \text{ кН}.$$

На ділянках, де епюра M криволінійна, необхідно розглянути рівновагу всього елемента. Так стержень CD , вирізаний зі схеми, представлено на [рис.10.9.3](#). До стержня, довжина якого складає 5 м., прикладено зовнішнє рівномірно розподілене навантаження, а також внутрішні зусилля, які вибираються з епюр M , Q і N . Далі для стержня складаються рівняння рівноваги: рівняння проєкцій на локальні вісі координат x' і y' стержня, а також рівняння моментів відносно будь-якої точки площини, наприклад точки C .

$$\begin{aligned}\sum F_{x'} &= 14,55 - 4,95 - 4 \cdot 4 \cdot 0,6 \equiv 0. \\ \sum F_{y'} &= 9,4 + 3,4 - 4 \cdot 4 \cdot 0,8 \equiv 0. \\ \sum M_C &= -3,4 \cdot 5 - 3 - 12 + 4 \cdot 4 \cdot 2 \equiv 0.\end{aligned}$$

10.5. Приклад розрахунку складеної рами

Схема рами, на яку діє рівномірно розподілене навантаження і зосереджений момент, представлено на [рис.10.10,а](#). Необхідно виконати статичний розрахунок рами, тобто побудувати епюри згинальних моментів M , поперечних сил Q і поздовжніх сил N

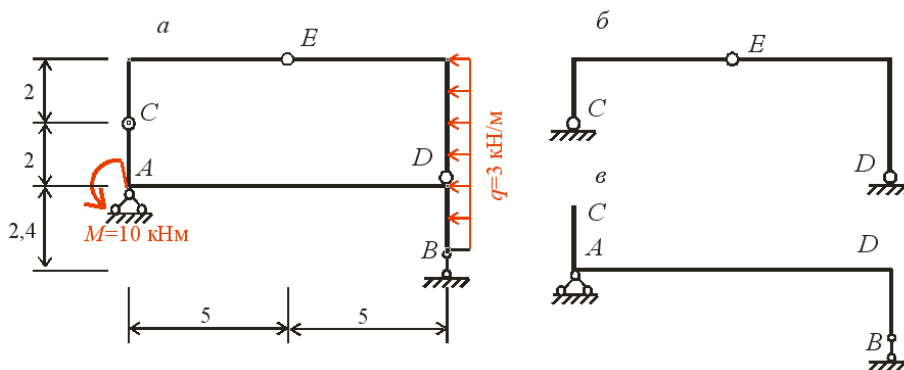


Рис.10.10

Кінематичний аналіз

Рама складається з чотирьох дисків (CAB , CE , ED і основа), які з'єднані між собою шарнірами C , E , D і кінематичними в'язями в опорах A і B . Таким чином, для проведення кількісного етапу кінематичного аналізу рами маємо:

- кількість простих дисків $D = 4$;
- кількість вузлів в'язей $B = 0$;
- кількість простих припайок $П = 0$;
- кількість простих шарнірів $Ш = 3$;
- кількість кінематичних в'язей $C = 3$.

Ступінь геометричної змінюваності

$$\Gamma = 3 \cdot 4 + 0 - 0 - 2 \cdot 3 - 3 - 3 = 0.$$

З точки зору геометричної структури доходимо висновку, що рама є складеною. Дійсно, процес її утворення має два етапи: на першому етапі диск AB приєднується до основи трьома кінематичними в'язями, які не перетинаються в спільній точці і водночас всі три не паралельні між собою. Таке поєднання дисків утворює новий диск – диск першого “поверху”. На другому етапі до диску першого “поверху” приєднуються диски CE і ED таким чином, що три зазначені диски утворюють шарнірний трикутник, в якому всі три шарніри не розташовані на одній прямій. Отже зазначена схема утворює собою єдиний диск і є геометрично незмінюваною. Процес утворення схеми можна записати у вигляді послідовності формул:

$$1. \frac{D_{AB} + D_{\text{земля}}}{C_{A1}, C_{A2}, C_B} \Rightarrow D_I.$$

$$2. \frac{D_{CE} + D_{DE} + D_I}{Ш_C, Ш_D, Ш_E} \Rightarrow D_{II}.$$

Перший “поверх” заданої рами показано на [рис.10.10,в](#), другий – на [рис.10.10,б](#).

Розрахунок складеної рами, тобто визначення реакцій і обчислення внутрішніх зусиль будемо виконувати для кожного “поверху” окремо, починаючи з другого “поверху”. Згодом знайдені зусилля відкладемо на повній схемі складеної рами.

Розрахунок рами другого "поверху"

Схема рами другого "поверху" наведено на [рис.10.11,а](#).

Визначимо реакції опор другого "поверху" ([рис.10.11,б](#)) з умов його рівноваги.

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow V_C \cdot 10 + H_C \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 10V_C + 2H_C - 24 = 0,$$

$$\sum M_E^{лів} = 0 \Rightarrow V_C \cdot 5 - H_C \cdot 2 = 0 \Rightarrow 5V_C - 2H_C = 0.$$

Розв'язавши систему двох рівнянь знаходимо:

$$V_C = 1,6 \text{ кН}, \quad H_C = 4 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -V_D \cdot 10 + H_D \cdot 2 = 0 \Rightarrow -10V_D + 2H_D = 0,$$

$$\sum M_E^{прав} = 0 \Rightarrow -V_D \cdot 5 + H_D \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow -5V_D + 4H_D + 24 = 0.$$

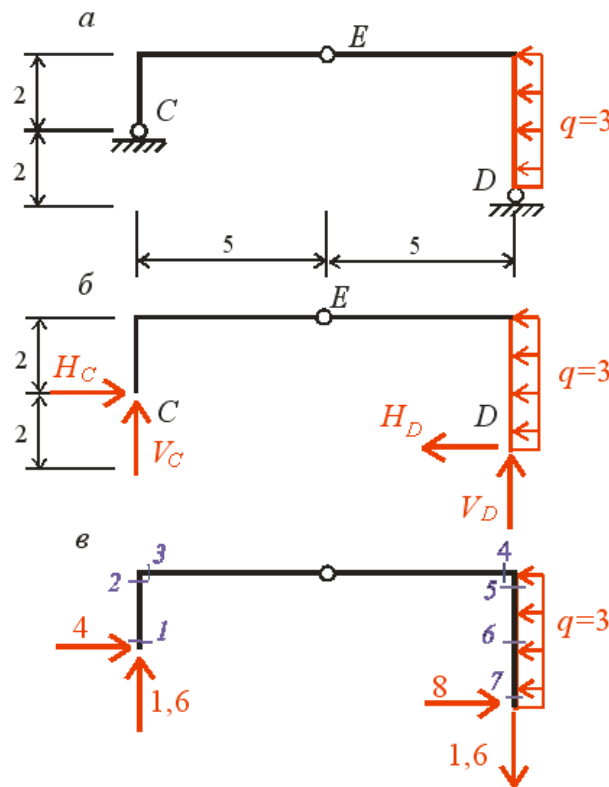


Рис.10.11

Розв'язання отриманої системи двох рівнянь дає

$$V_D = -1,6 \text{ кН}, \quad H_D = -8 \text{ кН}.$$

Перевірка розв'язання рівнянь рівноваги:

$$\sum F_x = 4 + 8 - 3 \cdot 4 \equiv 0,$$

$$\sum F_y = 1,6 - 1,6 \equiv 0.$$

Розіб'ємо схему поверху на три ділянки (незважаючи на наявність шарніра ригель розглядаємо як одну ділянку) і позначимо перерізи для обчислення зусиль (рис.10.11,в).

Обчислимо згинальні моменти:

$$M_1 = \sum M_1^{\text{ниж}} = 0,$$

$$M_2 = \sum M_2^{\text{ниж}} = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг ліворуч})$$

$$M_3 = \sum M_3^{\text{ліг}} = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг зверху})$$

$$M_4 = \sum M_4^{\text{ліг}} = -4 \cdot 2 + 1,6 \cdot 10 = 8 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг знизу})$$

$$M_5 = \sum M_5^{\text{ниж}} = -8 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = -8 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг ліворуч})$$

$$M_6 = \sum M_6^{ниж} = -8 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = -10 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг ліворуч})$$

$$M_7 = \sum M_7^{ниж} = 0.$$

Поперечні сили:

$$Q_1 = Q_2 = \sum F_{n,1}^{ниж} = -4 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = \sum F_{n,3}^{лів} = 1,6 \text{ кН},$$

$$Q_5 = \sum F_{n,5}^{ниж} = -8 + 3 \cdot 4 = 1,6 \text{ кН},$$

$$Q_7 = \sum F_{n,7}^{ниж} = -8 \text{ кН}.$$

Поздовжні сили:

$$N_1 = N_2 = \sum F_{t,1}^{ниж} = -1,6 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = \sum F_{t,2}^{лів} = -4 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_7 = \sum F_{t,5}^{ниж} = 1,6 \text{ кН}.$$

Розрахунок рами першого "поверху"

Схема рами першого "поверху" показана на [рис.10.12.а](#). Опорні реакції другого "поверху" прикладено як вже відомі зовнішні сили.

Визначимо реакції опор першого "поверху" ([рис.10.12.б](#)) з умов його рівноваги.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 4 - 8 - 3 \cdot 2,4 = 0 \Rightarrow H_A = 19,2 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B \cdot 10 - 4 \cdot 2 - 1,6 \cdot 10 + 3 \cdot 2,4 \cdot 1,2 - 10 = 0 \Rightarrow V_B = -2,536 \text{ кН},$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 2,536 + 1,6 - 1,6 = 0 \Rightarrow V_A = 2,536 \text{ кН}.$$

Розіб'ємо схему поверху на три ділянки і позначимо перерізи для обчислення зусиль ([рис.10.12.в](#)).

Обчислимо згинальні моменти:

$$M_8 = \sum M_8^{верх} = 0,$$

$$M_9 = \sum M_9^{верх} = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг праворуч})$$

$$M_{10} = \sum M_{10}^{лів} = -4 \cdot 2 - 10 = -18 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг зверху})$$

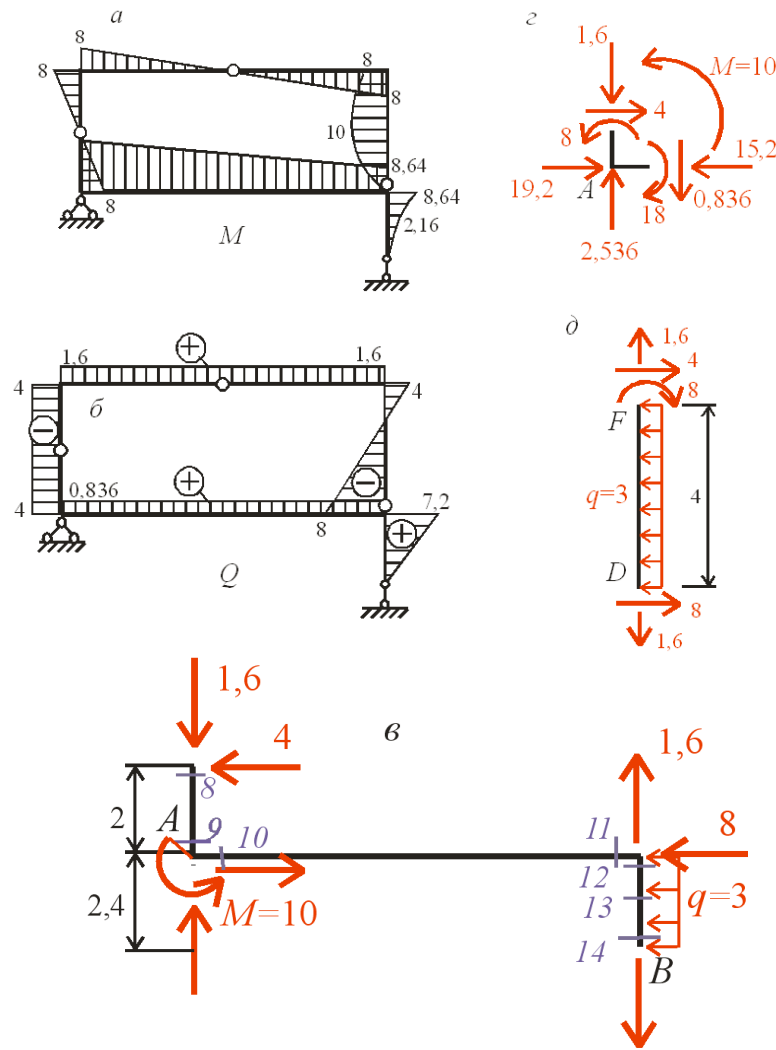


Рис.10.12

$$M_{11} = \sum M_{11}^{прав} = 3 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 8,64 \text{ кНм, (розтяг зверху)}$$

$$M_{12} = \sum M_{12}^{лів} = 3 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 8,64 \text{ кНм, (розтяг праворуч)}$$

$$M_{13} = \sum M_{13}^{ниж} = 3 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 8,64 \text{ кНм, (розтяг зверху)}$$

$$M_{14} = \sum M_{14}^{ниж} = 0.$$

Поперечні сили:

$$Q_8 = Q_9 = \sum F_{n,8}^{верх} = -4 \text{ кН.}$$

$$Q_{10} = Q_{11} = \sum F_{n,10}^{лів} = 2,536 - 1,6 = 0,936 \text{ кН.}$$

$$Q_{12} = \sum F_{n,12}^{ниж} = 3 \cdot 2,4 = 7,2 \text{ кН.}$$

$$Q_{14} = \sum F_{n,14}^{ниж} = 0.$$

Поздовжні сили:

$$N_8 = N_9 = \sum F_{t,8}^{верх} = -1,6 \text{ кН}.$$

$$N_{10} = N_{11} = \sum F_{t,10}^{ліг} = 4 - 19,2 = -15,2 \text{ кН}.$$

$$N_{12} = N_{14} = \sum F_{t,12}^{ниж} = 4 - 19,2 = -15,2 \text{ кН}.$$

Епюри згинальних моментів M , поперечних сил Q і поздовжніх сил N побудовано на рис.10.13.

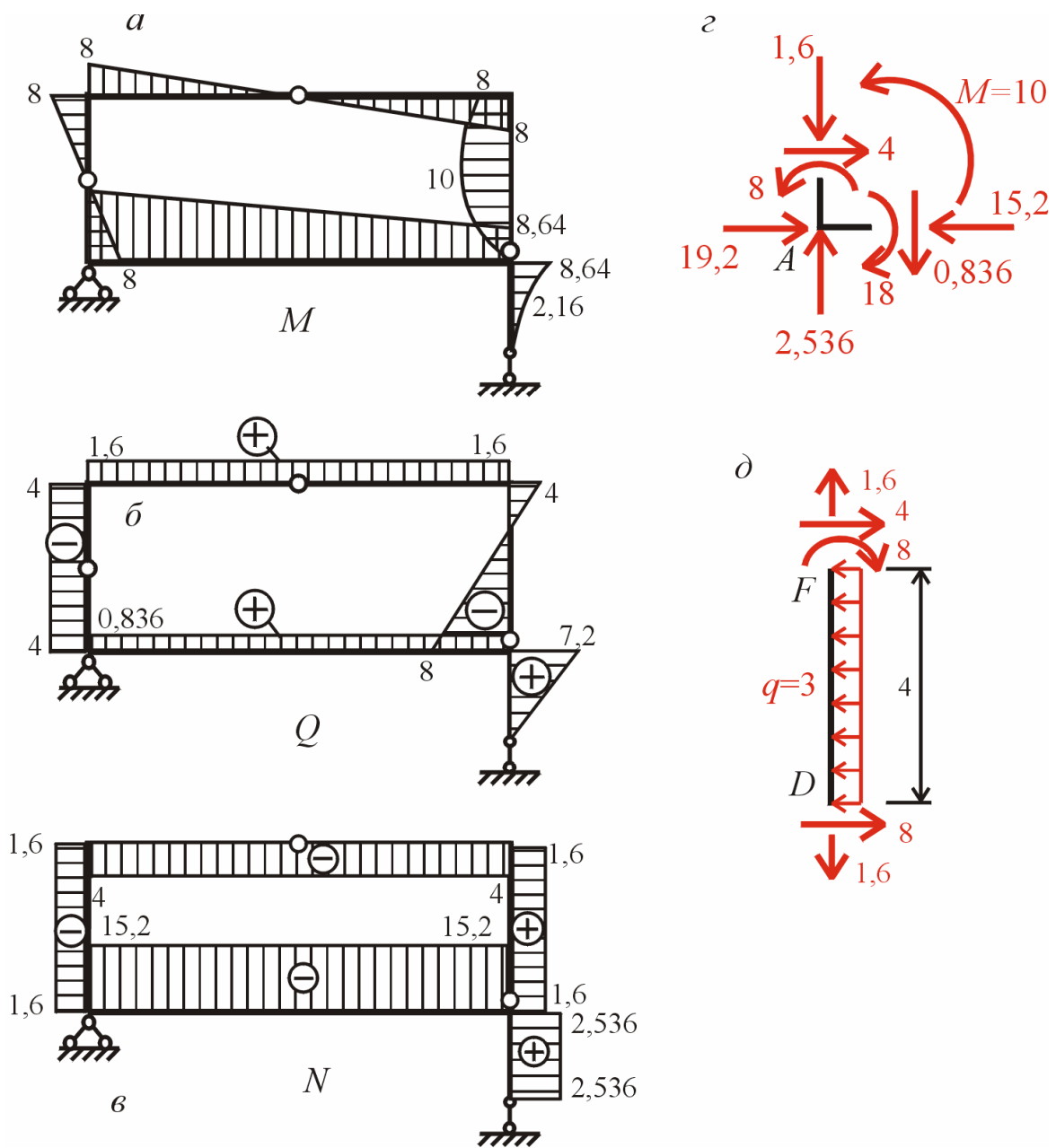


Рис.10.13

Перевірки епюр

Перевіримо рівновагу одного з вузлів, наприклад вузла *A*. Вирізаний вузол зображено на [рис.10.13.г](#). До вузла в місцях розрізів прикладено внутрішні зусилля, які вибираються з епюр. Згинальні моменти, які на епюрі *M* відкладено зверху, прикладаються так, щоб зумовлювати розтяг верхніх волокон. Додатну поперечну силу на ригелі прикладено так, що вона намагається повернути вузол за годинниковою стрілкою, а від'ємна поперечна сила на стояку – проти годинникової стрілки. Від'ємні поздовжні сили спрямовані так, щоби викликати стиск в перерізах. До того у вузлі діють вертикальна й горизонтальна опорні реакції, а також зовнішній зосереджений момент. Складаючи для вузла рівняння рівноваги маємо:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 19,2 - 4 - 15,2 \equiv 0, \\ \sum F_y &= 2,536 - 1,6 - 0,836 \equiv 0. \\ \sum M_A &= 18 - 8 - 10 \equiv 0.\end{aligned}$$

Перевіримо відповідність між епюрами *M* і *Q* на ділянках, де епюра *M* прямолінійна:

$$\begin{aligned}Q_{AK} &= -\frac{8+8}{4} = -4 \text{ кН}, \\ Q_{KF} &= +\frac{8+8}{10} = 1,6 \text{ кН}, \\ Q_{AD} &= +\frac{18-8,64}{10} = 0,836 \text{ кН}.\end{aligned}$$

На ділянках, де епюра *M* криволінійна, необхідно розглянути рівновагу всього елемента. Так стержень *FD*, вирізаний зі схеми, представлено на [рис.10.13.д](#). До стержня, довжина якого складає 4 м., прикладено зовнішнє рівномірно розподілене навантаження, а також внутрішні зусилля, які вибираються з епюр *M*, *Q* і *N*. Далі для стержня складаються рівняння рівноваги: рівняння проєкцій на локальні вісі координат *x'* і *y'* стержня, а також рівняння моментів відносно будь-якої точки площини, наприклад точки *D*.

$$\begin{aligned}\sum F_{x'} &= -4 - 8 + 3 \cdot 4 \equiv 0, \\ \sum F_{y'} &= 1,6 - 1,6 \equiv 0, \\ \sum M_D &= 4 \cdot 4 + 8 - 3 \cdot 4 \cdot 2 \equiv 0.\end{aligned}$$

10.6. Приклад розрахунку рами із замкненим контуром

Виконати статичний розрахунок рами, представленої на рис.10.14,а.

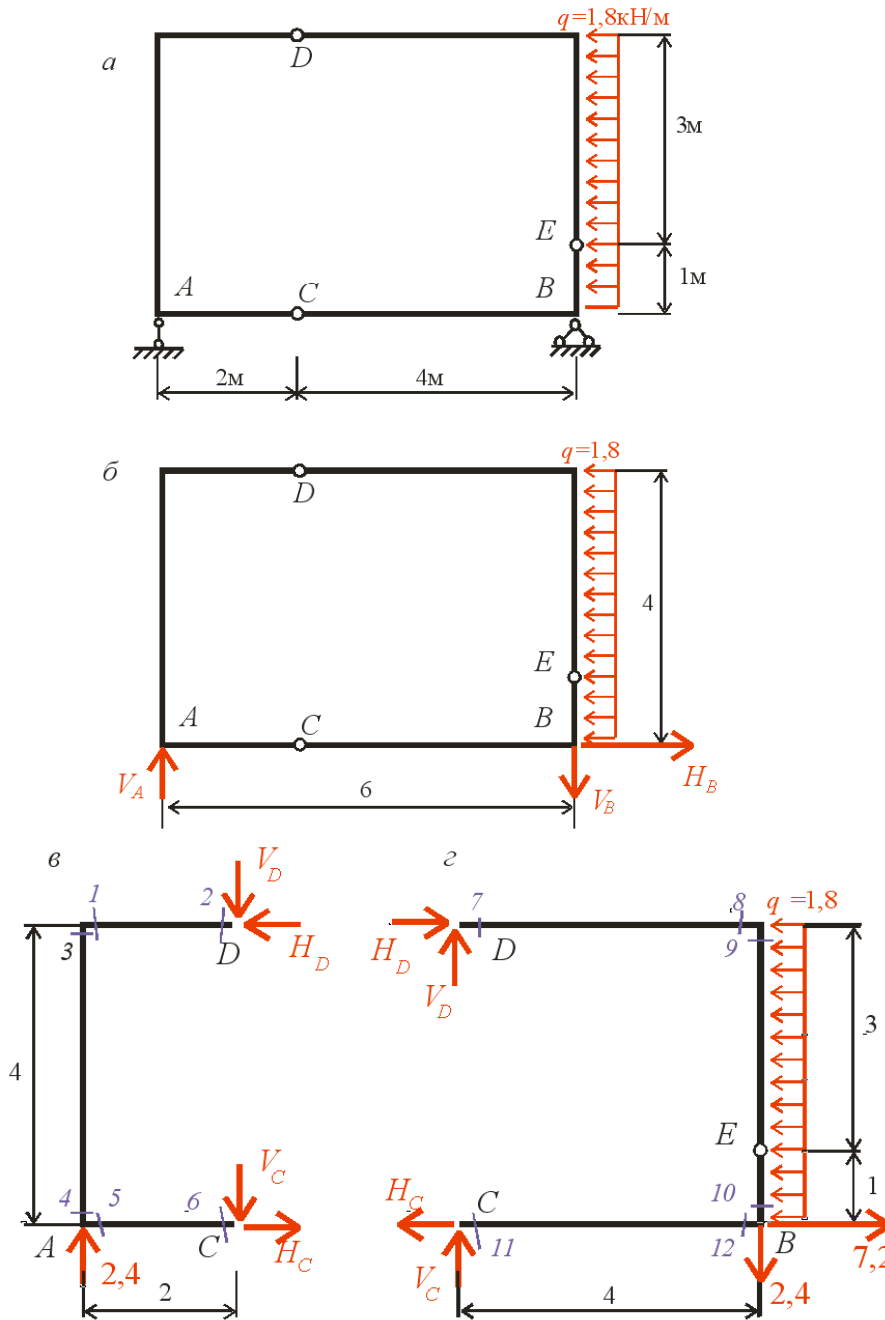


Рис.10.14

Кінематичний аналіз

Рама складається з чотирьох дисків (CAD , DE , CBE і основа), які з'єднані між собою шарнірами C , E , D і кінематичними в'язями в опорах A і B . Таким чином, для проведення кількісного етапу кінематичного аналізу рами маємо:

- кількість простих дисків $D = 4$;
- кількість вузлів в'язей $B = 0$;

- кількість простих припайок $II = 0$;
- кількість простих шарнірів $III = 3$;
- кількість кінематичних в'язей $C = 3$.

Ступінь геометричної змінюваності

$$\Gamma = 3 \cdot 4 + 0 - 0 - 2 \cdot 3 - 3 - 3 = 0.$$

З точки зору геометричної структури доходимо висновку, що рама є складеною. Дійсно, процес її утворення має два етапи: на першому етапі диски CAD , DE та CBE з'єднуються між собою попарно за допомогою трьох шарнірів E , D і C , тобто за способом шарнірного трикутника, причому всі три шарніри не розташовані на одній прямій. Таке поєднання дисків утворює новий диск – диск першого “поверху”. На другому етапі диск першого “поверху” приєднуються до диску “земля” трьома кінематичними в'язями, які не паралельні і не перетинаються в одній точці. Отже зазначена схема утворює собою єдиний диск і є геометрично незмінюваною.

Процес утворення схеми можна записати у вигляді послідовності формул:

$$1. \frac{D_{CAD} + D_{DE} + D_{CBE}}{III_E, III_D, III_C} \Rightarrow D_I;$$

$$2. \frac{D_I + D_{\text{земля}}}{C_A, C_{Bx}, C_{By}} \Rightarrow D_{II}.$$

Розрахунок складеної рами, тобто визначення реакцій і обчислення внутрішніх зусиль будемо виконувати для кожного “поверху” окремо, починаючи з другого “поверху”. Згодом знайдені зусилля відкладемо на повній схемі складеної рами.

Розрахунок реакцій другого "поверху" рами

Схема рами другого "поверху" наведено на [рис.10.14,6](#). Визначимо реакції опор другого "поверху" з умов його рівноваги.

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot 6 - 1,8 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_A = 2,4 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 6 - 1,8 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_B = 2,4 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B - 1,8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_B = 7,2 \text{ кН}.$$

Розрахунок реакцій першого "поверху" рами

Реакціями першого "поверху" є сили взаємодії між елементами рами, які виникають в з'єднувальних шарнірах. Для обчислення внутрішніх зусиль достатньо визначити реакції в будь-яких двох шарнірах. Для цього проведемо розріз через шарніри D і C , який поділяє раму першого поверху на дві половини. Одна з них – це суцільний елемент рами (рис.10.14,в), а інша – система двох елементів (рис.10.14,г). Саме з умов рівноваги цієї системи визначаємо реакції шарнірів D і C :

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow H_D \cdot 4 + 2,4 \cdot 4 - 1,8 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow H_D = 1,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow H_C \cdot 4 + 2,4 \cdot 4 + 1,8 \cdot 4 \cdot 2 - 7,2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_C = 1,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_E^{\text{верх}} = 0 \Rightarrow V_D \cdot 4 + 1,2 \cdot 3 - 1,8 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow V_D = 1,125 \text{ кН};$$

$$\sum M_E^{\text{ниж}} = 0 \Rightarrow V_C \cdot 4 + 1,2 \cdot 1 - 7,2 \cdot 1 + 1,8 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow V_C = 1,275 \text{ кН}.$$

Визначення внутрішніх зусиль

У кожній з двох половин першого "поверху" розглядаємо по три ділянки. На кожній з них призначаємо по два перерізи, розташовані нескінченно близько до їх кінців. На ділянці, де прикладено розподілене навантаження, призначаємо додатковий переріз в шарнірі C , де згинальний момент завідомо дорівнює нулю. Призначені перерізи зображено на рис.10.14, в і г.

Визначаємо згинальні моменти в призначених перерізах.

$$M_1 = \sum M_1^{\text{прав}} = 1,125 \cdot 2 = 2,25 \text{ кНм}; \quad M_7 = \sum M_7^{\text{лів}} = 0;$$

$$M_2 = \sum M_2^{\text{прав}} = 0; \quad M_8 = \sum M_8^{\text{прав}} = 1,125 \cdot 4 = 4,5 \text{ кНм};$$

$$M_3 = \sum M_3^{\text{верх}} = 1,125 \cdot 2 = 2,25 \text{ кНм}; \quad M_9 = \sum M_9^{\text{верх}} = 1,125 \cdot 4 = 4,5 \text{ кНм};$$

$$M_4 = \sum M_4^{\text{ниж}} = 1,275 \cdot 2 = 2,55 \text{ кНм}; \quad M_E = 0;$$

$$M_5 = \sum M_5^{\text{прав}} = 1,275 \cdot 2 = 2,55 \text{ кНм}; \quad M_{10} = \sum M_{10}^{\text{ниж}} = 1,275 \cdot 4 = 5,1 \text{ кНм};$$

$$M_6 = \sum M_6^{\text{прав}} = 0; \quad M_{11} = \sum M_{11}^{\text{лів}} = 0;$$

$$M_{12} = \sum M_{12}^{\text{лів}} = 1,275 \cdot 4 = 5,1 \text{ кНм}.$$

Визначаємо поперечні сили в призначених перерізах.

$$\begin{aligned}
 Q_1 = Q_2 &= \sum F_{n,1}^{npa6} = 1,125 \text{ кН}; & Q_7 = Q_8 &= \sum F_{n,7}^{ли6} = 1,125 \text{ кН}; \\
 Q_3 = Q_4 &= \sum F_{n,3}^{6epx} = -1,2 \text{ кН}; & Q_9 &= \sum F_{n,9}^{6epx} = 1,2 \text{ кН}; \\
 Q_5 = Q_6 &= \sum F_{n,5}^{npa6} = 1,275 \text{ кН}; & Q_{10} &= \sum F_{n,10}^{ниж} = 1,2 - 7,2 = -6 \text{ кН}; \\
 & & Q_{11} = Q_{12} &= \sum F_{n,11}^{ли6} = 1,275 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Визначаємо поздовжні сили в призначених перерізах.

$$\begin{aligned}
 N_1 = N_2 &= \sum F_{t,1}^{npa6} = -1,2 \text{ кН}; & N_7 = N_8 &= \sum F_{t,7}^{npa6} = -1,2 \text{ кН}; \\
 N_3 = N_4 &= \sum F_{t,3}^{6epx} = -1,125 \text{ кН}; & N_9 = N_{10} &= \sum F_{t,9}^{6epx} = 1,125 \text{ кН}; \\
 N_5 = N_6 &= \sum F_{t,5}^{npa6} = 1,2 \text{ кН}; & N_{11} = N_{12} &= \sum F_{t,11}^{npa6} = 1,2 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Епюри згинальних моментів M , поперечних сил Q і поздовжніх сил N побудовано на рис.10.15.

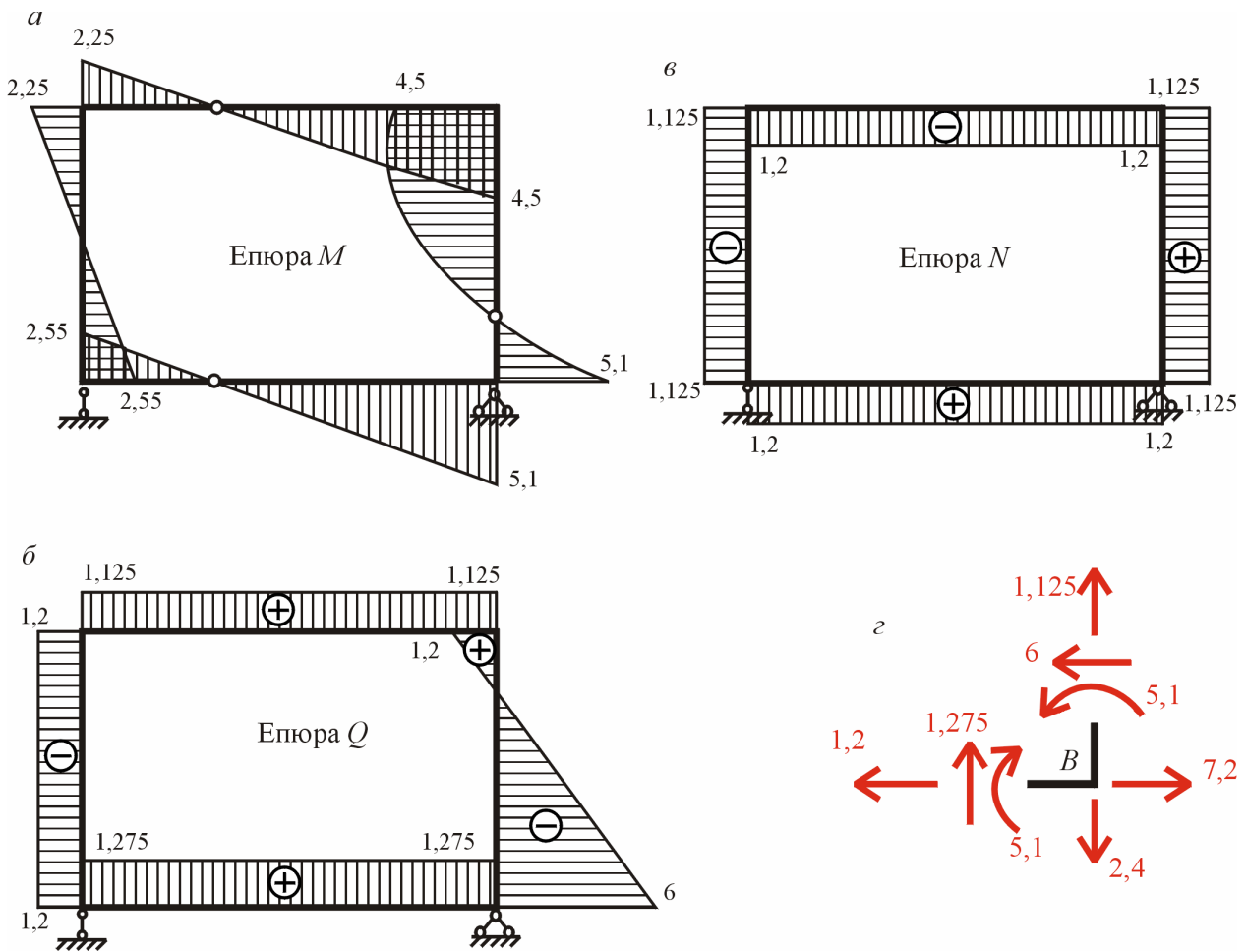


Рис.10.15

Перевірки епюр

Перевіримо рівновагу одного з вузлів, наприклад вузла *B*. Вирізаний вузол зображено на [рис.10.15..г](#). До вузла в місцях розрізів прикладено внутрішні зусилля, які вибираються з епюр. Згинальні моменти, прикладаються так, щоб зумовлювати розтяг нижніх волокон на ригелі і правих – на стояку. Додатну поперечну силу на ригелі прикладено у такий спосіб, що вона намагається повернути вузол за годинниковою стрілкою, а від’ємна поперечна сила на стояку – навпроти. Додатні поздовжні сили спрямовані так, щоби викликати розтяг в перерізах. До того ж у вузлі діють вертикальна й горизонтальна опорні реакції. Складаючи для вузла рівняння рівноваги маємо:

$$\sum F_x = 7,2 - 6 - 1,2 \equiv 0;$$

$$\sum F_y = 1,125 + 1,275 - 2,4 \equiv 0;$$

$$\sum M_B = 5,1 - 5,1 \equiv 0.$$