**Завдання 1.** Визначити степінь кожної вершини графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-gNx8km.png, який зображений нарис 3.7. Побудувати його доповнення.

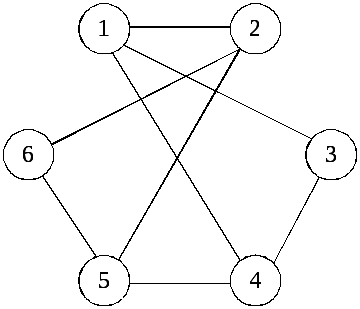
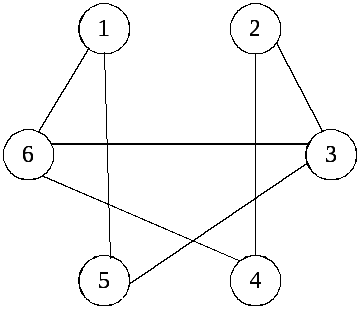
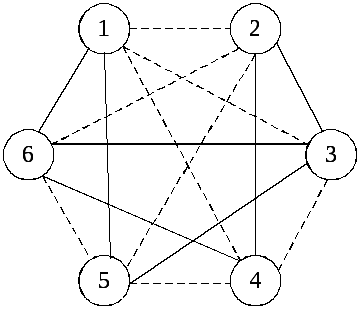


Рисунок 3.7 – Граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Pjkmh8.png

**Розв’язок.** Степені вершин визначаються кількістю ребер, які їй інцидентні. Тому: https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-xGVU5t.png;https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-wJngKu.png;https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-c_QQvG.png;https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-1vY9RS.png;https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-x9yjUA.png;https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-nIghKG.png.

Доповнення графа будується таким чином: з повного графа на 6-ти вершинах https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-tG2Y1b.pngвилучаються ті ребра, які належать графуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-rHnLTd.png. На рис. 3.8 а) ребра графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-V8Cmer.pngвідзначені пунктиром.



а) б)

Рисунок 3.8 – Граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-1MsPqE.png(а) і доповнення графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-mncVvU.png(б)

Перевірити правильність побудови можна так: сума степенів однойменних вершин графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-rSF4mH.pngі його доповнення дорівнює 5 (степінь вершин графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-_mV_Vq.png).

**Завдання 2**. Для орієнтованого графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Y7m8Iz.png, який зображений на рис. 3.9, для кожної вершини визначити півстепені «виходу і заходу» (додатний степінь і від’ємний степінь), степінь вершини.

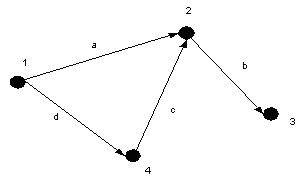


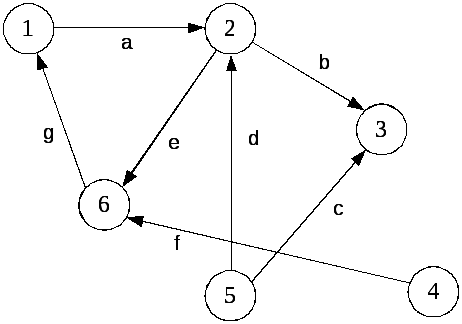
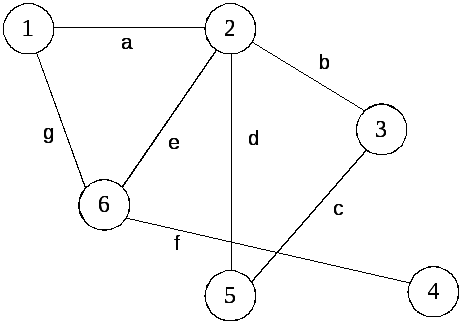
Рисунок 3.9 – Орієнтований граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Qd72OC.png

**Розв’язок.** Додатний степінь вершини https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-MwPRpy.png– число дуг, що закінчуються у вершиніhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-4sjGZJ.png. Від’ємнийстепінь вершини https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-jyDVBB.png– число дуг, що починаються у вершині https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-czjFBt.png.Степінь вершин графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-2KFN3P.pngдорівнюєhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-yHRaQW.png.

Для графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-DKmZwh.pngдодатні степені усіх вершин такі:https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Sm5OZr.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-bunfWx.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-RMM8W_.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-1_vWuO.png. Від’ємні степені усіх вершин графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-qSWgvI.pngтакі:https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Kk7RmG.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-2CU6rg.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-C79__P.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-hEOH2n.png. Степені вершин графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-uN_P7T.png:https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-hHWhVV.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-DQ7z0R.png,

https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-slHPhE.png, https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6Vfzwn.png.

**Завдання 3**. Побудувати матриці суміжності та інциденцій для неорієнтованого графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-FIdmsU.pngй орієнтованого графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-fs841R.png(рис. 3.10 а) та б) відповідно).



а) https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-iFCeWI.pngб)https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-MOMBrN.png

Рисунок 3.10 – Графи https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6rrVeq.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-qEaNyg.png

**Розв'язок.** Будуємо матрицю суміжності https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-i6SRtP.pngграфаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Cqn4JD.png, рядки й стовпці якої позначаємо вершинами графа (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Матриця суміжності https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-DZsLnI.pngнеорієнтованого графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-5IyvKz.png

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Для неорієнтованого графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-_IdcGm.pngматрицяhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-H4Xo_r.pngсиметрична. Елементhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-MQTaeT.pngматриці суміжностіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-1l4abe.pngдорівнює 1, якщо вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-IDa6sC.pngйhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-phQbuB.pngсуміжні, і 0 у противному випадку. Тому що графhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ZZ2OAE.pngпростий (не має петель і кратних ребер), на головній діагоналі розташовані 0, а всі елементи матриці мають значення 0 або 1. Сума чисел у рядку (і у стовпці) дорівнює степені вершини.

Матриця інциденцій https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-NEGKZe.pngбудується таким чином: рядки її відповідають вершинам, стовпці – ребрам графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-p7WU8b.png(табл. 3.2). Елементhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-vsKW3Y.pngдорівнює 1, якщо вершина інцидентна ребру, і 0 – у противному випадку.

Таблиця 3.2 – Матриця інциденцій https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-gG70GM.pngнеорієнтованого графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-RPE6E5.png

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | a | b | c | d | e | f | g |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

У кожному стовпці повинні перебувати тільки 2 одиниці. Сума чисел у рядку дорівнює степені вершини.

Будуємо матрицю суміжності https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-d21qpW.pngграфаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-hF22lt.png, рядки й стовпці якої позначаємо вершинами графа (табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – Матриця суміжності https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-XgiWrH.pngорієнтованого графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-oMQFcH.png

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Для орієнтованого графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-hPMULt.pngматрицяhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-fjkv0H.pngнесиметрична. Елементhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-rMKRMN.pngматриці суміжностіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-iBZL9e.pngдорівнює 1, якщо з вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-h2BiCH.pngу вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-2XeT_O.pngведе дуга, і 0 у противному випадку. Тому що графhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-StHkCf.pngпростий (не має петель і кратних ребер), на головній діагоналі розташовані 0, а всі елементи матриці мають значення 0 або 1. Сума чисел у рядку дорівнює напівстепені виходу вершини, а у стовпці – напівстепені заходу вершини.

Матриця інциденцій https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-FtKEHA.pngбудується таким чином: рядки її відповідають вершинам, стовпці – ребрам графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-vTHqoh.png(табл. 3.4). Елементhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-v0CQHn.pngдорівнює 1, якщо вершина є початком дуги, (-1) – якщо вершина – кінець дуги, і 0 – якщо вершини й дуга не інцидентні.

Сума чисел у стовпці дорівнює нулю.

Таблиця 3.4 – Матриця інциденцій https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-2Ipcmw.pngорієнтованого графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Ou14gt.png

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | a | b | c | d | e | f | g |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 2 | -1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 |

**Завдання 4**. Використовуючи матрицю суміжності (табл. 3.5), побудувати діаграму графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-9ENceC.pngі визначити, чи є він орієнтованим або неорієнтованим.

Таблиця 3.5 – Матриця суміжності графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-UX4FfR.png

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Розв'язок.** Матриця суміжності несиметрична, тому граф орієнтований. Кількість вершин – 6. Будуємо граф: з вершини 1 ведуть дуги у вершини 2 і 3; з вершини 2 – у вершини 3 і 6; з вершини 3 – у вершину 4; з вершини 4 – у вершини 1, 5 і 6; з вершини 5 – у вершину 2; з вершини 6 – у вершину 1.

Перевірити правильність побудови можна, порахувавши напівстепені виходу (сума цифр у рядку) і напівстепені заходу (сума цифр у стовпці) для кожної вершини. Граф, що відповідає матриці суміжності (табл. 3.5), зображений на рис. 3.11.

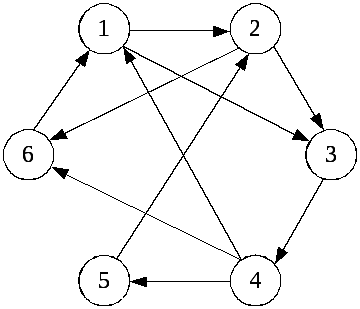


Рисунок 3.11 – Граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-diTUye.png

**Завдання 5**. Використовуючи матрицю інциденцій (табл. 3.6), побудувати діаграму графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-2nHbi3.pngі визначити, чи є він орієнтованим або неорієнтованим.

Таблиця 3.6 – Матриця інциденцій графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-IsQJxW.png

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | a | b | c | d | e | f | g |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

**Розв'язок.** У матриці https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-fBdqOo.pngнемає значень (-1), тому можна зробити висновок про те, що граф неорієнтований. Кількість вершин дорівнює 6, кількість ребер – 7. Будуємо порожній граф на шести вершинах і з'єднуємо їх ребрами: реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ZCTqG5.pngз'єднує вершини 1 і 4, реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-KCxPv5.png– вершини 2 і 4, і т.д. Граф, що відповідає матриці інциденцій (табл. 3.6), зображений на рис. 3.12.

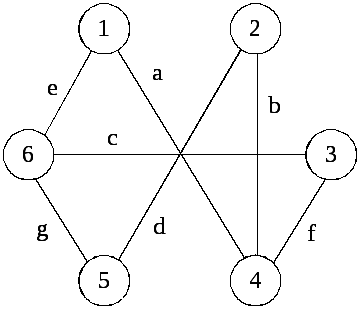
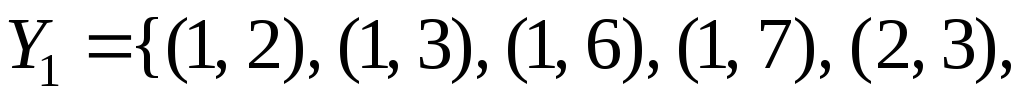
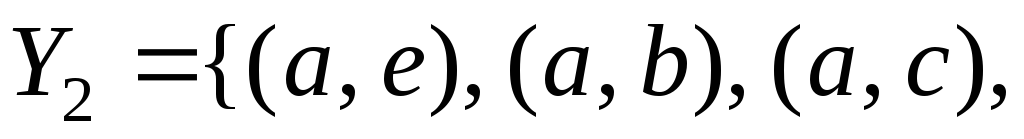


Рисунок 3.12 – Граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-vixi9B.png

**Завдання 6.** Довести ізоморфізм графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ZMh81k.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-raC5zP.png, деhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-w7LNa4.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-nnLGZN.png,

https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-JK1Jy3.png, 

https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Lv73O0.png.

**Розв'язок.** Нумеруємо вершини графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-wLcZfK.pngдовільно. Після цього нумеруємо вершини графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Aakzcs.png, домагаючись того, щоб вершини з номерамиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-HAoJPm.pngтаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-y9rTJx.pngу ньому були суміжні тоді й тільки тоді, коли суміжні вершини з такими ж самими номерами в графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-1xxs8F.png.

**Завдання 7.** Для графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-aVuqab.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-iS7MkO.png, які представлено на рис. 3.13, виконати операції об'єднання, перетину й композиції https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-N4lkXx.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-zHmTdF.png.

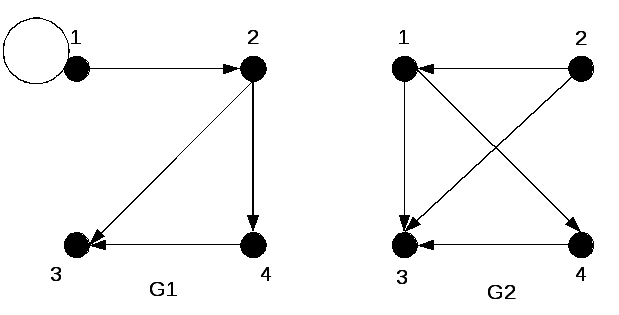


Рисунок 3.13 – Графи https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-P60lda.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-GEFwt2.png

**Розв'язок.** У графі https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-jbZm87.pngприсутні всі вершини й всі дуги графівhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-HyKUD1.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-vvuSgO.png. Так само, як в об'єднанні множин, елементи, що повторюються, використовуємо один раз. У графіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-_Y017n.pngприсутні ті вершини й ті дуги графівhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Y7jGWX.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-762z13.png, які є й у графіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-otwlGN.png, й у графіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ERUs_A.png. На рис. 3.14 а) зображені результати об'єднання, на рис. 3.14 б) – перетину графівhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-XU5CQL.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-g9JAZ9.png.



а) https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-3LSzw_.pngб)https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-rSQrEv.png

Рисунок 3.14 – Об'єднання й перетин графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-rAEBbT.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-mSQGy8.png

Матриця суміжності результуючого графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ja1O29.pngутвориться поелементним логічним додаванням матриць суміжності графівhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ThT4cF.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-2G29dr.png.

Матриця суміжності результуючого графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-FEyLdJ.pngутвориться поелементним логічним множенням матриць суміжності графівhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-U6fvTK.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-_ZSL9R.png.

Композиція графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-MtYVHq.pngбудується таким чином: виписуються всі дугиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-c0y9fD.pngграфаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-XqfpYC.pngй відповідні їм дугиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-40AqgO.pngграфаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Xd4aPQ.png, у результуючий граф включаються дугиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-anwIaQ.png, крім повторюваних (у цьому випадку, дуга (1,3)) (рис. 3.15).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-HR4BU3.png | https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-wh9lfh.png | https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-K0rP_W.png |
| (1,1) | (1,3) | (1,3) |
| (1,1) | (1,4) | (1,4) |
| (1,2) | (2,1) | (1,1) |
|  | (2,3) | (1,3) |
| (2,3) | – |  |
| (2,4) | (4,3) | (2,3) |
| (4,3) | – |  |

Рисунок 3.15 – Композиція графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-jEDARK.png

Граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Wre7VD.pngзображений на рис. 3.16. Матриця суміжності графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-hyQHD3.pngбудується множенням матриці суміжності графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-rWnxps.pngна матрицю суміжності графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-jA7P4n.png.

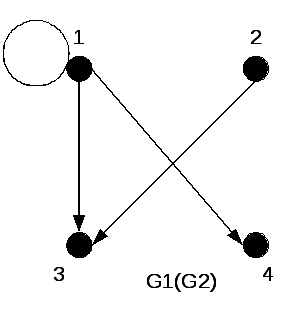


Рисунок 3.16 – Граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-NM7wnW.png

Композиція графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-WJraMR.pngбудується таким чином: виписуються всі дугиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-K6d63F.pngграфаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-y3bRVf.pngй відповідні їм дугиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-bzGerW.pngграфаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-KpS8BS.png, у результуючий граф включаються дугиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-qxbK6p.png(рис. 3.17).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-zmsuDv.png | https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-_ABeNt.png | https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-l1ujxX.png |
| (1,3) | – |  |
| (1,4) | (4,3) | (1,3) |
| (2,1) | (1,1) | (2,1) |
|  | (1,2) | (2,2) |
| (4,3) | – |  |

Рисунок 3.17 – Композиція графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-bdPcm9.png

Результуючий граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-LOg1rG.pngзображений на рис. 3.18.

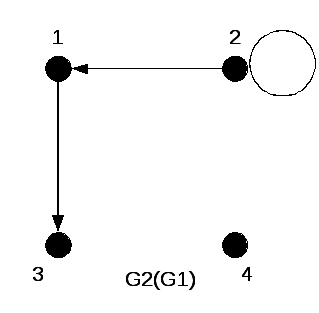


Рисунок 3.18 – Граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ltqxuT.png

Матриця суміжності графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-zbBr5Z.pngбудується множенням матриці суміжності графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ZG8Cob.pngна матрицю суміжності графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-_wLw_V.png.

Операція композиції не є комутативною, графи https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Vo81xm.pngйhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-rdeWpS.pngне ізоморфні.

**Завдання 8.** На рис. 3.19 наведені графи https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-tK1Lk1.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-q4yoSn.png. Знайтиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-yzyzKK.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-NhSQd8.png.

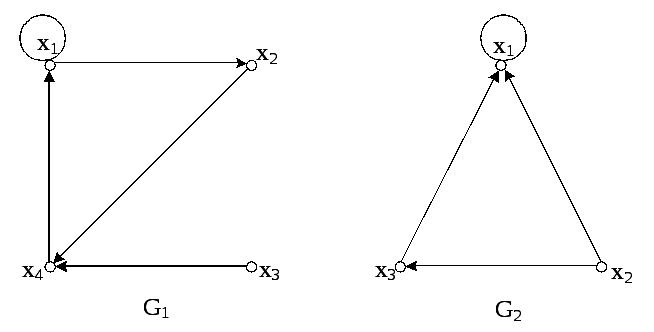


Рисунок 3.19 – Графи https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-cVwCjW.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Eh4D_M.png

**Розв'язок.** Об'єднанням графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-lgZkbr.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-h7eg3Z.pngназивається графhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-gulrBs.png. Тому множина вершин складається з чотирьох вершин. До множини дугhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-t5QPf7.pngдодаємо дві дугиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-wvxrvg.pngиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-KhWI3i.png. Тоді графhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-UV4SfD.pngмає вид, що надається на рис. 3.20 а).

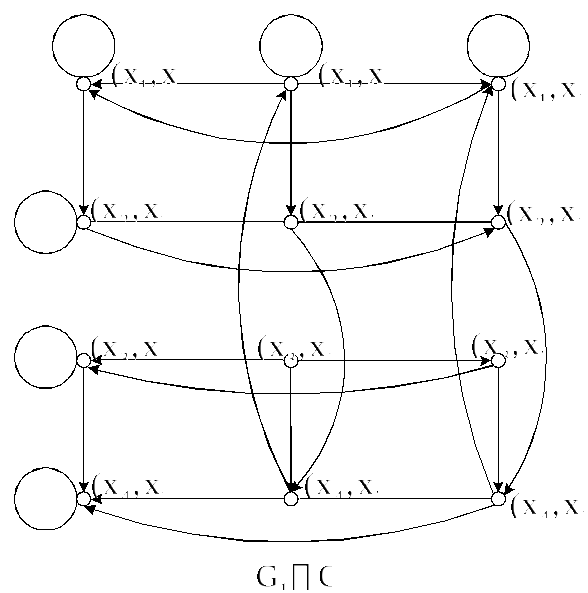
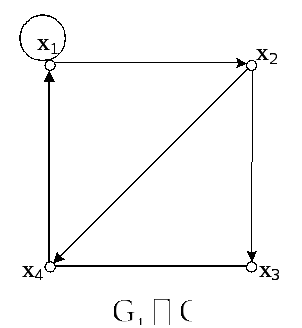
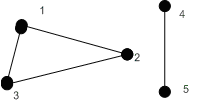


Рисунок 3.20 – Графи https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-28g5kE.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-mbKGjc.png

Множиною вершин графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-cb0UQ1.pngбуде декартів добуток множинhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-eNe_Yn.png. Таким чином, усього вершин буде 12. Кількість ребер визначається за правиломhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Et1TJ6.png, якщоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-kCg6ia.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-lKvOpk.pngабоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-jzSmA7.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-KR4gvu.png(див. рис. 3.20 б)).

**Завдання 9.** Для графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-lcJM1h.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-NeFuvu.png, які представлені на рис. 3.21, виконати операцію диз’юнктивного об'єднання.



https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-eDzx39.pnghttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-LicQFZ.png

Рисунок 3.21 – Графи https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-BhKVsk.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-EquSdj.png

**Розв'язок.** Об'єднання графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-RoK5MV.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-5v2bt3.pngназивається диз’юнктивним, якщоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-naCZWP.png. Результат операції диз’юнктивного об'єднання графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-TGFy1h.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-soETmy.pngпредставлений на рис. 3.22.

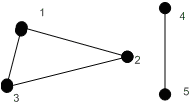
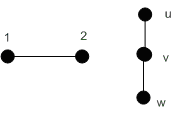


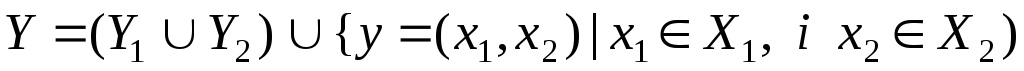
Рисунок 3.22 – Результат операції диз’юнктивного об'єднання графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-19hnXQ.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-FQ7LVw.png

**Завдання 10.** Для графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-CjA2Wi.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-qcNl48.png, які представлено на рис. 3.23, виконати операцію з’єднання (сильного добутку).

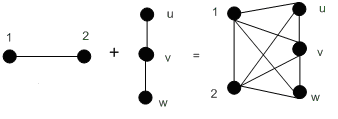


https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-YF8b84.pnghttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-7lVI8q.png

Рисунок 3.23 – Графи https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-5aS8Iu.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-hZK5zT.png, для яких виконується операція з’єднання

**Розв'язок.** З’єднанням (сильним добутком) графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-QM0Pgf.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Z11AnE.png(за умовиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-tB6khD.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-gQ_x6X.png) називається такий графhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-O55Zap.png, щоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-YMMpmU.png, а.

Результат операції з'єднання графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-cfW43U.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-kHbPyb.png(позначаєтьсяhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Reje4h.png) представлений на рис. 3.24.



https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ElRpPi.pnghttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-nKYyr_.pnghttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-teiwDf.png

Рисунок 3.24 – Результат операції з'єднання графів https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-0LsjhP.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-9R5rbr.png(https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6kQMwO.png)

**Завдання 1.** Визначити, чи є для графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-F3oA2i.png, який представлений на рис. 4.1, відповідний маршрут ланцюгом, простим ланцюгом, циклом, простим циклом, якщо маршрут заданий як: 1)https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-5xkduv.png; 2)https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-3Daiuy.png; 3)https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-CsDIrM.png; 4)https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Yztzid.png; 5)https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-v6VBWN.png.

**Розв'язок.** Відповідно до визначення ланцюга, простого ланцюг, циклу, простого циклу одержимо: 1) простий цикл (всі вершини й ребра різні); 2) цикл (всі ребра різні, а вершини ні); 3) простий ланцюг; 4) маршрут (є однакові ребра й вершини); 5) простий ланцюг.

**Завдання 2.** Визначити число компонент зв’язності в графі https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-2fPCbw.png, якщо граф задається таким чином (рис. 4.12)

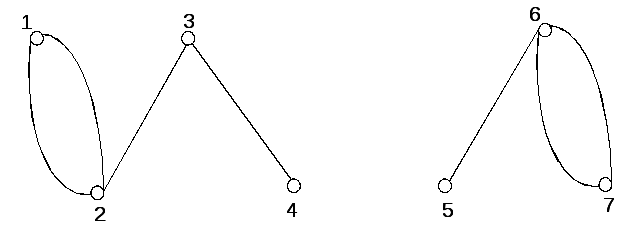


Рисунок 4.12 – Граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ybwmB2.png, для якого визначається число компонент зв’язності

**Розв’язок.** Граф має дві компоненти зв’язності, в першу входять вершини https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-2bwxvt.png, в другу− https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6JFwlu.png.

**Завдання 3.** Розкласти орграф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-hy2hBz.png, який представлений на рис. 4.13, на сильно зв’язані компоненти.

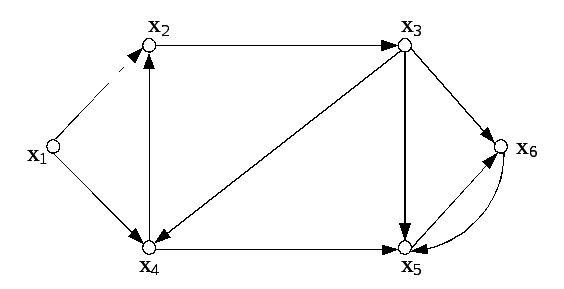


Рисунок 4.13

**Розв’язок.** Граф розкладається на три сильно зв’язані компоненти https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-7JOOj6.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-RnOOM_.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6EI4Ij.png(рис. 4.14)

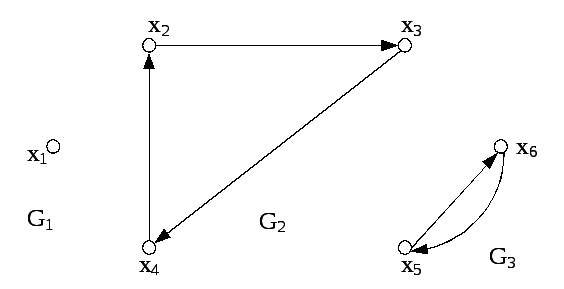


Рисунок 4.14

**Завдання 4.**

Знайти в графі https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-toyCz7.png, який надається на рис. 4.15, всі точки зчленування і мости.

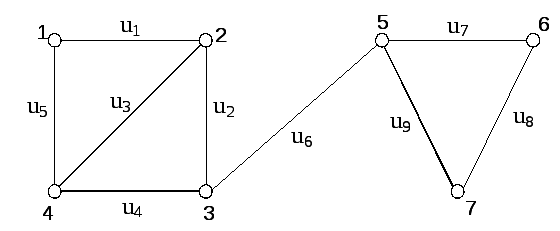


Рисунок 4.15

**Розв’язок.**

Послідовно розглянемо ребра графа, вилучаючи їх з графа. Тільки вилучення ребра https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-gNGpXo.pngприводить до збільшення числа компонент зв’язності, тому https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-nTiXWa.pngє мостом. Аналогічно розглядаємо вершини графа і находимо, що вершини 3 і 5 є точками зчленування, тому що вилучення їх з графа приводить до збільшення числа компонент зв’язності.

**Завдання 5.**

Знайти такі метричні характеристики графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-eJ_AFB.png(рис. 4.16): ексцентриситети усіх вершин графа, діаметр графа, радіус графа, периферійні вершини графа, діаметральні ланцюги, центральні вершини графа, центр графа.

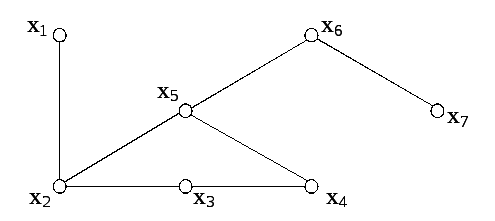


Рисунок 4.16

**Розв’язок.**

Ексцентриситетом https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-m9_QUY.pngвершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-gemFwA.pngє відстань відhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-5vAWgP.pngдо найбільш віддаленої від неї вершини, томуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-WuBGJc.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-U3WcKE.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-aArAvX.png. Максимальний з усіх ексцентриситетів є діаметром графа, тобтоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-_eZknd.png. Найменший з ексцентриситетів є радіусом графа, тобтоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-oicL6s.png. Вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-DB_tK9.pngє периферійною, якщо її ексцентриситет дорівнює діаметру графа, тобтоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Watx7k.png, тому периферійними вершинами графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-m_FeKH.pngє вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-xtPfYa.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Gs7jrw.png. Простий ланцюг, відстань між кінцями якої дорівнюєhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-jG_LxY.png, називається діаметральні ланцюги ом, тому діаметральними ланцюгами графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-avlmfL.pngє такі ланцюги:https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-zQr78T.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-vwkcXd.png. Вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-wdOEWO.pngназивається центральною вершиною графа, якщо на ній досягається мінімум ексцентриситетів, тобтоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-225N_E.png, тому центральною вершиною графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Py5eVS.pngє вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-mxryQG.png. Множина усіх центральних вершин графа є центром графа, тому центром графаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-NJtrNC.pngєhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-RzH6ZT.png.

**Завдання 6.**

Визначити, чи є граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-sXzLYN.png, який зображений на рис. 4.17, ейлеревим.

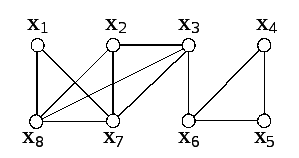


Рисунок 4.17

**Розв’язок.**

Використаємо теорему Ейлера: граф є ейлеревим (містить ейлерів цикл) тоді і тільки тоді, коли він зв’язний і степені всіх його вершин – парні.

Граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-8l_15U.pngє зв’язним. Степені його вершин такі:https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-WS6IsT.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-5CbYqN.png,https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ujhg55.png. Граф не є ейлеревим, тому що не усі степені вершин є парними.

**Завдання 7.**

Чи має граф, який зображений на рис. 4.18 власний ейлерів шлях?

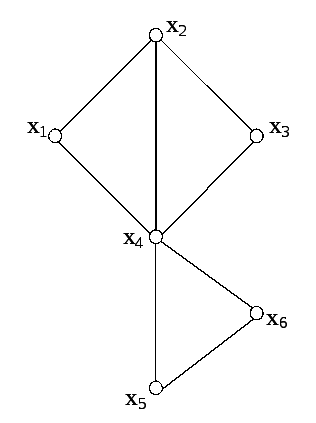


Рисунок 4.18

**Розв’язок.**

Використаємо наступну теорему: граф (мультограф або псевдограф) має власний ейлерів шлях тоді й тільки тоді, коли він зв’язний і рівно дві його вершини мають непарний степінь. Граф, зображений на рис. 4.18, зв’язний, має власний ейлерів шлях, тому що рівно дві його вершини (https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Pkdkpx.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-YVPUKz.png) мають непарну степінь, тобтоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-TeaTrc.png.

**Завдання 8.**

Чи має орієнтований граф, який зображений на рис. 4.19, ейлерів цикл?

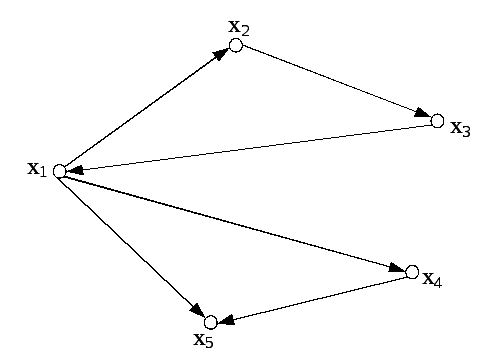


Рисунок 4.19

**Розв’язок.**

Використаємо наступну теорему: орієнтований граф має ейлерів цикл тоді й тільки тоді, коли він зв’язний, і півстепені виходу та заходу у вершині https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-jfuuE6.pngрівні. Орієнтований граф, який зображений на рис. 4.19, не містить ейлерів цикл, тому що півстепені виходу та заходу у вершинахhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-3tb9qo.pngіhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Vmib6z.pngне дорівнюють відповідно один одному.

**Завдання 9.**

Найдіть гамільтонів цикл, якщо він існує, у графі https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-TgKy3q.png, який зображений на рис. 4.20.

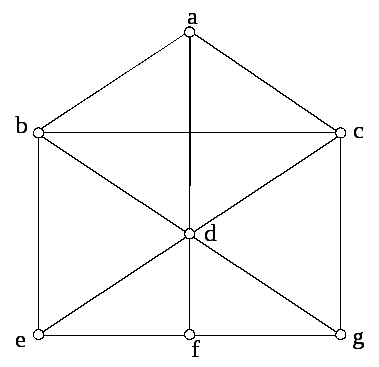
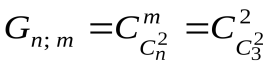
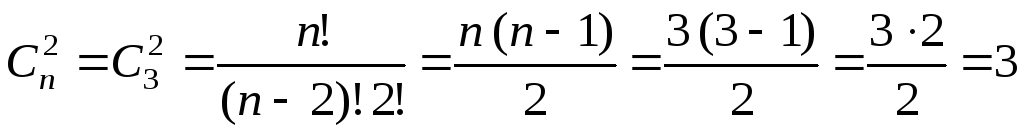


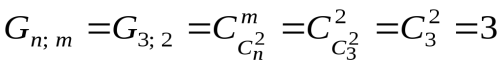
Рисунок 4.20

**Розв’язок.**

Гамільтонів цикл для графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-bPHOl6.pngбуде такимhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6VBvwD.png.

**Завдання 1.** Чому дорівнює кількість позначених неорієнтованих простих графів з https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-qcsVUE.pngвершинами іhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-OK2yIa.pngребрами? Нарисувати усі ці графи.

**Розв’язок.** Кількість https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-joUolf.pngпозначених неорієнтованих простих графів зhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-mGJ9Lm.pngвершинами іhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-9pYp_k.pngребрами дорівнює числу сполучень з множини різних неорієнтованих пар вершинhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Fdrt6j.pngза числом реберhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-jTh9O3.png. Оскільки число вказаних пар вершин дорівнює числу сполученьhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-25akvP.png, то, де.

Тому . Ці три графа представлено на рис. 5.5.

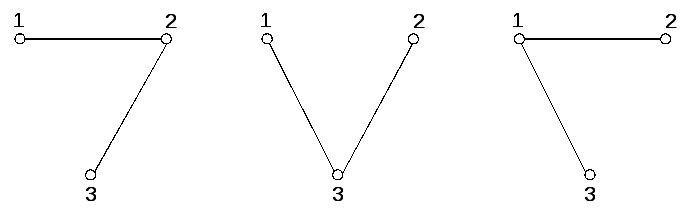


Рисунок 5.5 – Позначені неорієнтовані прості графи з https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-s_Wkx_.pngвершинами іhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ymuXNJ.pngребрами

**Завдання 8.** Побудувати остовне дерево у графі https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-CQ2FXP.png, який зображено на рис. 5.12, використовуючи алгоритм пошуку в глибину.

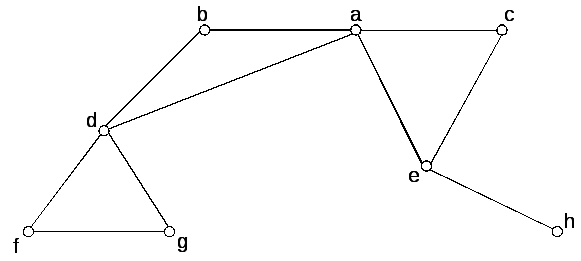


Рисунок 5.12 – Граф https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-UmjxaM.png

**Розв’язок.** Для розв’язання завдання використаємо такий алгоритм пошуку остовного дерева в глибину.

Крок 1. Позначити кожну вершину графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-oEv3Uc.pngсимволомhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-JV2ktC.png.

Крок 2. вибрати довільний елемент https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6awTbS.pngграфаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-qhb_ak.pngта назвати його коренем дерева.

Крок 3. Замінити позначку вершини https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-KhGIUf.pngз «нов» на «вик» і назначитиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-EpJwmw.png.

Крок 4. Поки є вершини, які ще не вибрані, суміжні з https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-1lCZ65.png, виконати такі дії:

а) вибрати вершину https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-uVszia.png, суміжну зhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6p7mdZ.png;

б) якщо https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-sDeYdQ.pngмає позначку «нов», додати (https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ZWbHo3.png) в множинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-XnGXyp.png(множину ребер остовного дерева, яке будується), замінити позначкуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ikXKim.pngна «вик», назначитиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Y0CAXI.pngі повторити шаг 4;

в) якщо https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-VNmUgs.pngмає позначку «вик» і не є «батьком»https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-OX9nlF.png, додати (https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-kn2X5d.png) в множинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-pHWW_J.png(множину зворотних ребер) і повторити шаг 4.

Крок 5. Якщо https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-zp4C4I.png, назначитиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-KvLt56.pngі повторити шаг 4. поки для вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-b4SJFA.pngє суміжна невикористована вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6QPvpb.png, продовжується шлях відhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-s8Va3y.pngдоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Zh36oV.png. Тільки в тому випадку, коли рухатися далі не можна, переходимо до шагу 5, повертаємось до «батька» вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-fEwm18.png.

Використаємо цей алгоритм для пошуку остовного дерева графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-bfbjEX.png, що надається на рис. 5.12.

Як корінь довільним способом виберемо вершину https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-FE0uyZ.png. Змінюємо позначкуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-TuiDk9.pngз «нов» на «вик». Оскільки вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-zFMKaf.pngсуміжна зhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Um7sey.pngі має позначку «нов», додаємо реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-EN96Sn.pngв множинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-OTyWpj.pngі замінюємо позначку вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ndicGO.pngна «вик», як наведено на рис. 5.13 а).

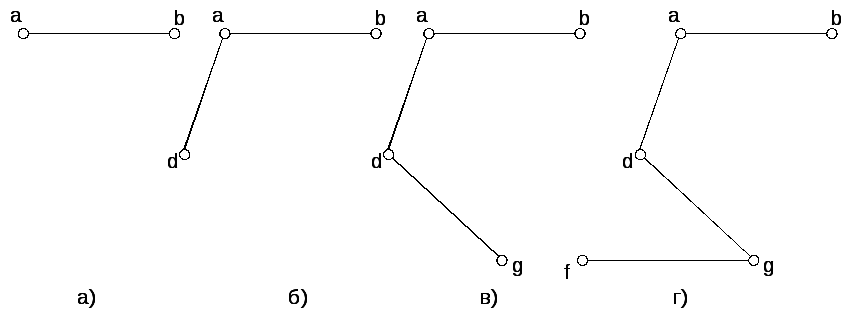


Рисунок 5.13

Від вершини https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-OE1ZOi.pngпереходимо до вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-SuHVbX.png, оскільки вона є суміжною зhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-PdMYEC.png. Вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-a_hCbw.pngмає позначку «нов», тому додаємо реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Dg4K3C.pngв множинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ETf7Cu.pngі заміняємо позначку вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-48ACnV.pngна «вик», як наведено на рис. 5.13 б).

Тепер вибираємо вершину, яка суміжна з вершиною https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-0Lzvr3.png. Можна вибратиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-jUykAH.pngабоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-tr8PhK.png. Вибір визначає форму дерева, тому пошук в глибину не продукує дерево єдиним способом. Припустимо, що наступною вершиною буде вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ymYijY.png. Вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-lefB42.pngмає позначку «нов», тому додаємо реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-v2NtOn.pngв множинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-UV_nBo.pngі замінюємо позначку вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-riZUJ7.pngна «вик», як наведено на рис. 5.13 в). З вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-GTcbTm.pngвибираємо вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-thp1f0.png, тому що вона є суміжною зhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-W6F94b.png. Вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-TpFcXk.pngмає позначку «нов», тому додаємо реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-1e_xBn.pngв множинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-ZE3aK0.pngі заміняємо позначку вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-HUpVQz.pngна «вик», як наведено на рис. 5.13 г). З вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-InyLhg.pngвибираємо вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-lAZ01t.png, тому що вона є суміжною з вершиноюhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-GSskF3.png. Однак вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-O4z8UO.pngвже має позначку «вик», тому додаємо реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-G5RU0R.pngв множинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-vONTZT.png, як наведено на рис. 5.14 а).

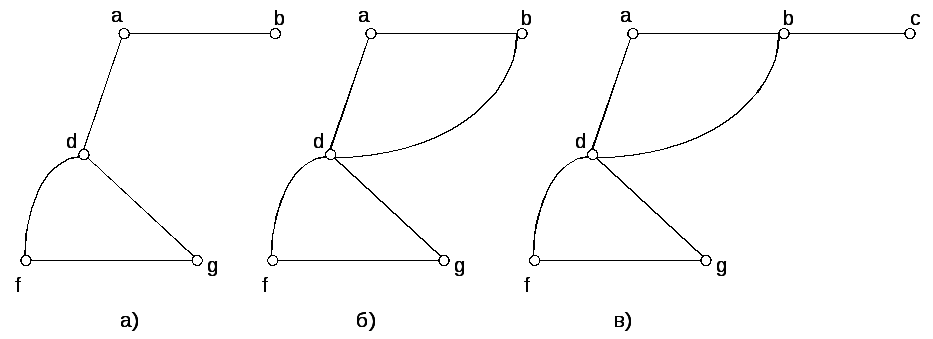


Рисунок 5.14

Оскільки більше немає ребер для перевірки на суміжність з вершиною https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-C1t_0U.png, окрім «батька», вертаємось до вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-hnRZDg.png(далі не будемо згадувати «батька» як можливу суміжну вершину). Інших ребер для перевірки на суміжність з вершиноюhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-OU2QjR.pngтеж немає, тому вертаємось доhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-yh6RCn.png. Тут є єдиною вершиною для перевірки є вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-MfF_Kv.png, але вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-A55SzE.pngвже має позначку «вик», тому реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6ygBNE.pngдодаємо вhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-5117fe.pngі вертаємось в вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-KK2Z_x.png, як наведено на рис. 5.14 б).

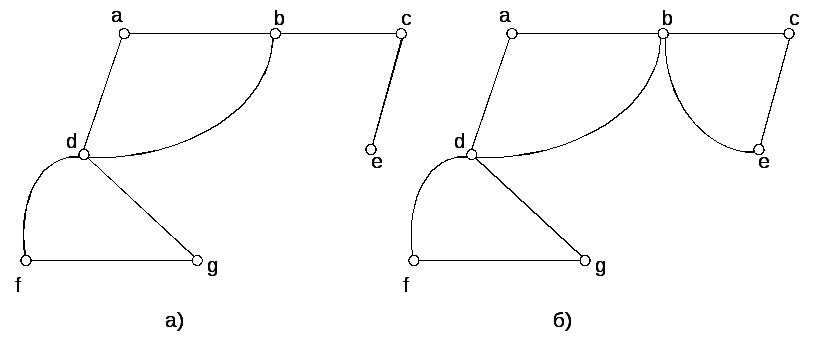
Ребер для перевірки на суміжність з вершиною https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-jWQhXa.pngбільш немає, тому повертаємось до вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-QFbg9m.png. Помітимо, що якби була можливість досягти кожну вершину, побудувавши шлях зhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-2PKhkR.png, то поки дерево не побудовано повністю, не треба було б повертатися у вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-R1T7PU.png. Повернувшись у вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-rcCk3p.png, можна вибратиhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-xgqdIu.pngабоhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-F0qX9S.png. Припустимо, що вибрали вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-QTDtlS.png. Так як вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-2S9juH.pngмає позначку «нов», тому додаємо реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-bPVzSt.pngв множинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-97EAiY.pngі заміняємо позначку вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Hzsxfd.pngна «вик», як наведено на рис. 5.14 в).

Вершина https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-FEQd5v.pngсуміжна з вершиноюhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-_U6VBq.pngі має позначку «нов». Додаємо реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-U5ed7Q.pngв множинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-TWAUx3.pngі замінюємо позначку вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-9CJMFn.pngна «вик», як наведено на рис. 5.15 а).

Припустимо тепер, що вибрана вершина https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-3L_B3w.png, тому що вона є суміжною з вершиноюhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-zD0Vbh.png. Але вершинаhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-e1bGGZ.pngвже має позначку «вик», тому реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-1hcE7q.pngдодаємо вhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-DeuZw8.pngі вертаємось в вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-wzzK0Q.png, як наведено на рис. 5.15 б).

Оскільки вершина https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-nA6sPQ.pngсуміжна зhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-cpZRpg.png, додаємо реброhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-NIa6YD.pngв множинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-paPkeE.pngі замінюємо позначку вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-qQDZ9y.pngна «вик», як наведено на рис. 5.15 в).

Більш немає вершин для перевірки з вершини https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-imbiv2.png, тому повертаємось у вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-oexFdN.png. Але більш немає вершин для перевірки з вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-1oipoH.png, тому повертаємось у вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-x7Wl5k.png. Оскільки немає більш вершин для перевірки з вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-XDTShd.png, повертаємось у вершинуhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-7d8ZxJ.png. Інших вершин для перевірки з вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-mFkbE3.pngтеж немає, тому процес завершується.



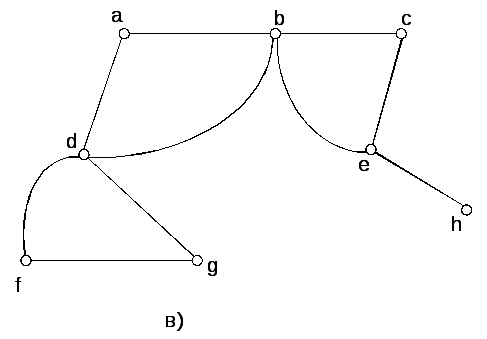


Рисунок 5.15

Остовним деревом графа https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-Qc663m.pngє дерево, яке наведено на рис. 5.16.

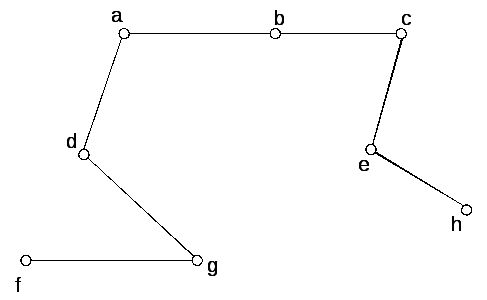


Рисунок 5.16

**Завдання 9.** Нехай існує орієнтоване упорядковане дерево https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-wIxdLf.png(рис. 5.17). Для цього дерева визначити: висоту дерева; глибину, висоту, рівень вершини 8; листя, їх рівні, глибину, висоту.

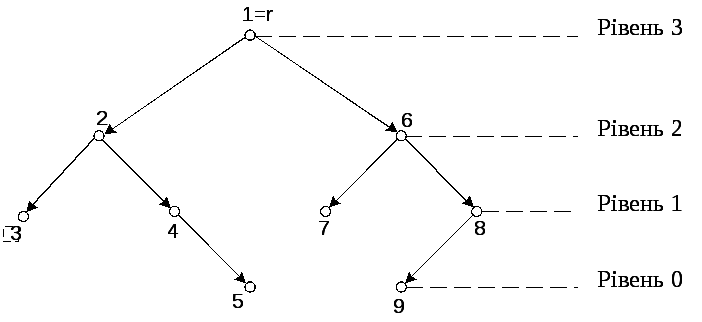


Рисунок 5.17 – Кореневе дерево, упорядковане за рівнями

**Розв’язок.** Дерево https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-6Mh6j2.pngупорядковане, множина синів кожної вершини упорядкована зліва направо:https://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-YszMvZ.png. Висота дерева, яке зображене на рис. 5.17, тобто число дуг найдовшого шляху (висота кореня) дорівнює 3. Вершина 8 має глибину 2, тобто довжина шляху з кореневої вершиниhttps://studfile.net/html/2706/360/html_yLr7QISonh.OFeE/img-fpldre.pngу вершину 8 дорівнює 2. Вершина 8 має висоту 1, тобто довжина найдовшого шляху з вершини 8 до будь-якого листа (до листа 9) дорівнює 1. Рівень вершини 8, тобто різниця між висотою всього дерева і глибиною цієї вершини, дорівнює 1.

Листям дерева є вершини 3, 5, 7, 9. Їх рівні та глибина такі: листя 3,7 мають рівень 1, глибину 2; листя 5, 9 мають рівень 0, глибину 3. Висота будь-якого листа дорівнює 0.