**Дослідження функції одної дійсної змінної за допомогою похідної**

Похідна – потужний інструмент дослідження функції. За допомогою першої похідної функцію досліджують на **монотонність** та **екстремуми**.

**Основні означення та теореми.**

1. Проміжок (інтервал, відрізок).
2. Функцію називають **зростаючою** на інтервалі ***І***, якщо **більшому** значенню аргументу відповідає **більше** значення функції, тобто, якщо  і  то 

Функцію називають **спадною** на інтервалі, якщо **більшому** значенню аргументу відповідає **менше** значення функції, тобто, якщо  то 

Інтервали незалежної змінної, на яких функція зростає (спадає) називають інтервалами монотонності, а саму функцію **монотонною** на цьому інтервалі**.**

Якщо функція зростає (спадає) на всій області визначення, то її називають монотонною.

1. **Теорема 1 (**критерій монотонності функції**).**

Нехай функція визначена, неперервна та має похідну (диференційована) в кожній точці інтервала ***І.***

Для того, щоб функція була **зростаючою** на даному інтервалі, необхідно і достатньо, щоб  в будь-якій внутрішній точці цього інтервалу.

Для того, щоб функція була **спадною** на даному інтервалі, необхідно і достатньо, щоб  в будь-якій внутрішній точці цього інтервалу.

1. Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю, називаються **стаціонарними** точками.



Внутрішні точки області визначення, в яких похідна дорівнює нулеві, або не існує, називаються **критичними точками** функції.

1. **Екстремуми функції (максимуми та мінімуми)**

Точка  називається точкою **локального максимуму**, якщо значення функції в цій точці є найбільшим значенням в деякому околі точки .



Точка  називається точкою **локального мінімуму**, якщо значення функції в цій точці є найменшим значенням в деякому околі точки .

Точки локального мінімуму та максимуму (значення *х*) називають **точками екстремуму**. Значення функції в цих точках називають **екстремумами** ( відповідно максимумами та мінімумами).



1. **Теорема 2. Необхідна умова екстремуму**.

Якщо в точці  функція має екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулеві, або не існує.



Обернене твердження не є правильним (умова не є достатньою). Наприклад, похідна функції  в точці  дорівнює нулю, однак функція екстремуму не має в цій точці. (Див. графік).



Однак, якщо похідна (при умові існування) не дорівнює нулю, то екстремуму точно немає, бо якщо б він був, то виконувалась би умова теореми 2.



Значення аргументу, при яких виконуються умови теореми 2 (критичні точки) називають точками можливого екстремуму, або точки «підозрілі» на екстремум.



Дослідити функцію на монотонність та екстремуми – це означає встановити проміжки зростання (спадання) функції та знайти екстремуми.

При дослідженні функції на монотонність та екстремуми дотримуються наступного **плану:**

* Знаходимо область визначення функції. Елементарні функції неперервні в області визначення.



* Знаходимо похідну функції та прирівнюємо її до нуля. Розв’язуємо рівняння. Знаходимо критичні точки функції.
* Спираючись на достатні умови аналізуємо поведінку функції в околі критичних точок. Виявляємо точки максимуму та мінімуму.
* Підставляючи отримані точки максимуму (мінімуму) в рівняння, що задає функцію, знаходимо максимуми та мінімуми функції.
* За знаком першої похідної встановлюємо проміжки монотонності.
* Записуємо відповідь.

Виписати самостійно:

1. **Перша достатня умова екстремуму. С.275 (Денисюк, т.1)**



1. **Друга достатня умова екстремуму. С.276 (Денисюк, т.1)**



**Повне дослідження функції та побудова графіку**

**План**

1. Область визначення функції (Які значення може приймати незалежна змінна?)
2. Область значень функції.
3. Властивості, що полегшують побудову графіка (парність, непарність. Періодичність)
4. Нулі функції та проміжки знакосталості.
5. Екстремуми та проміжки монотонності.
6. Точки перегину та проміжки опуклості.
7. Асимптоти.
8. Побудова графіка.









