**Математичний аналіз (calculus).**



**I. Диференціальне числення функції одної дійсної змінної.**

**І. Границя функції**

**План**

1. Функція. Способи завдання функції. Графік.
2. Область визначення, область значень, парність (непарність), періодичність функції.
3. Основні елементарні функції та їх властивості.
4. Гіперболічні функції.
5. Числові послідовності.
6. Окіл точки.
7. Границя послідовності. Збіжні та розбіжні, обмежені, зростаючи (спадні) послідовності. Теореми про границі.
8. Границя функції. Теореми про границі функції. Знаходження границь. Невизначеності.
9. Нескінченно малі величини та їх властивості. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі.
10. Нескінченно великі величини. Властивості.
11. Обмежені та необмежені функції.
12. Перша визначна границя та її наслідки.
13. Друга визначна границя та її наслідки. Число е.
14. Односторонні границі.
15. Неперервні функції. Властивості функцій,неперервних в точці; на інтервалі.
16. Дослідження функцій на неперервність. Класифікація точок розриву.

**Функція**

*Змінні та сталі величини.*

Для описання процесів у реальному світі в природничих науках застосовуються різноманітні величини: довжина, площа, об’єм, час, швидкість та інш. Для кожної величини обрано одиниці вимірювання, отже величина має числове значення та розмірність. Величини, що змінюються при вивченні того чи іншого процесу, називаються змінними величинами; ті, що не змінюються – сталими або константами. Більшість явищ навколишнього світу безперервно змінюються, знаходяться в постійному русі. Завдяки введенню поняття змінної величини стало можливим вивчення динамічних процесів. Однак вчених цікавили не стільки самі змінні величини, скільки характер їх взаємодії. **Залежності між змінними величинами описуються функціями.**



Метою математичного аналізу є вивчення поведінки функцій за допомогою **нової операції** диференціювання (операції знаходження похідної).

**План дослідження функцій**

1. Область визначення функції (Які значення може приймати незалежна змінна?)
2. Область значень функції.
3. Властивості, що полегшують побудову графіка (парність, непарність. Періодичність)
4. Нулі функції та проміжки знакосталості.
5. Екстремуми та проміжки монотонності.
6. Точки перегину та проміжки опуклості.
7. Асимптоти.
8. Побудова графіка.

**Пункти 1-4** докладно вивчались у шкільному курсі. Повторити самостійно. Пункти 5-7 будемо вивчати, поки розглядати не потрібно.

**Область визначення та область значень функції**

Яким би способом не було задано функцію, ми завжди маємо справу з двома **множинами**: областю визначення  та областю значень функції Всі значення незалежної змінної утворюють область визначення функції.

При знаходженні області визначення функції слід відповісти на запитання: які значення може приймати незалежна змінна (аргумент) ?

Всі значення, які приймає залежна змінна (функція) при , утворюють область значень функції. Наприклад:

,





При знаходженні області визначення функції на множині дійсних чисел враховують **обмеження,** що виникають, якщо функція містить:

1. Ділення на нуль 
2. Виключення кореня парного степеня 
3. Логарифми 
4. Арксинус, арккосинус 
5. Нульовий степінь 



1. 

**Як можна задати функцію?**

Формулою (аналітично), графічно, таблично, словесно

**3. Основні елементарні функції**: степеневі , показникова , логарифмічна , тригонометричні та обернені тригонометричні .

Степеневі функції

Функція виду 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *a* - *додатне ціле, парне* | *a – додатне ціле, непарне* | *a – від’ємне, ціле, парне* | *а-*  *від’ємне, ціле, непарне* | *a-*  *додатне,*  *раціональне*  *(не ціле)* | *a - від’ємне,*  *раціональне*  *(не ціле)* | *a=0* |
| Графік |  |  |  |  |  |  |  |
| Область визначення |  |  |  |  |  |  |  |
| Область значень |  |  |  |  |  |  |  |
| Парність (непарність) |  |  |  |  |  |  |  |
| Нулі функції |  |  |  |  |  |  |  |
| Проміжки знакосталості |  |  |  |  |  |  |  |
| Проміжки монотонності |  |  |  |  |  |  |  |
| Екстремуми |  |  |  |  |  |  |  |
| Характерні точки |  |  |  |  |  |  |  |
| Приклади |  |  |  |  |  |  |  |
| Примітки |  |  |  |  |  |  |  |

**Завдання:** самостійно записати властивості основних елементарних (без степеневих) функцій та побудувати графіки**. Дані занести в таблицю.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | Назва | Рівняння | Графік | Властивості |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Функції, які отримано з основних елементарних функцій в результаті скінченого числа алгебраїчних операцій ті скінченої кількості суперпозицій, називаються **елементарними** функціями.



Наприклад: .

**Гіперболічні функції**: 

5. **Числові послідовності**.



Послідовність – одне з важливіших понять математики. Послідовність може бути складена з чисел, точок, функцій, векторів та інш. Послідовність вважається заданою, якщо задано **закон,** за яким кожному натуральному числу  ставиться у відповідність елемент  деякої множини. Послідовність записується  або стисло . Елементи  називаються членами послідовності. Якщо члени послідовності є числа, то послідовність називається **числовою**.



 – числова послідовність. Для послідовності  - члени послідовності, *n* – номер члена послідовності.

Задати послідовність можна формулою загального (*n*–го) члена:

 – формула *n*–го члена послідовності;

;







Послідовність можна задати рекурентно (від лат. Recurrens - той, що повертається). Дає змогу знаходити значення якоїсь величини за попередніми значеннями цієї величини 



Для скорочення записів в математичному аналізі часто застосовують спеціальні символи:

 - будь-який



 - існує

 слідує, рівносильно

Послідовність  називається **обмеженою**, якщо 

В іншому випадку послідовність називається необмеженою.

Послідовність називається **зростаючою**, якщо  ; неспадною . Аналогічно визначається спадна та

незростаюча послідовності. Такі послідовності називаються **монотонними.**



Чи можна говорити, що послідовність – це функція?



**6. Окіл точки.**

**Модуль** (абсолютна величина числа). Геометричний зміст модуля.





Деякі властивості модуля:















.



**Окіл скінченої точки та нескінченності**



1. δ – окіл (дельта-окіл) скінченої точки  позначимо  і визначимо як множину дійсних чисел , таких, що 







Сама точка може не належати зазначеному проміжку, тоді говорять про **виколотий окіл** 



2. δ – окіл (дельта-окіл) нескінченності позначимо  і визначимо як множину дійсних чисел таких, що 







**Границя послідовності**

Поняття границі є фундаментом математичного аналізу.

**Означення границі послідовності**



ε – окіл точки (*а*–ε, *а*+ε), *а* – центр околу, ε – радіус околу.

(лат. limes – границя. Поняття ввів І. Ньютон, lim значок Люільє 1786р.,  Гамільтон).

Збіжні (якщо існує **скінчена** границя) та розбіжні (границя не існує, або дорівнює нескінченності) послідовності .

Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.

. Приклад: .

. Приклад *yn* = *n*.

**Теореми про границі** послідовності.

1. Якщо числова послідовність має границю, то вона єдина.
2. Сума **збіжних** послідовностей {*xn*} та {*yn*} є збіжною послідовністю. .

**Доведення.** Нехай , . , . Виберемо, тоді для . Звідси: .

1. Добуток двох **збіжних** послідовностей {*xn*} и {*yn*} є збіжною послідовністю .



**Наслідок.** , C – const, {*xn*} – збіжна послідовність

1. Частка двох збіжних послідовностей {*xn*} та {*yn*}, при умові, що  є збіжною послідовністю та .



Застосування теореми 4 дає можливість знаходити границі. Наприклад, знайдемо границю послідовності з загальним членом  перепишемо його у вигляді . Очевидно, що границя чисельника **існує** та дорівнює 2, границя знаменника 1. 



1. Теореми про граничний перехід в нерівностях.
2. Теорема Вейєрштраса.

Читати том1, с.159-162

На практичні заняття: с.167 №1.1

Повторити: арифметична та геометрична прогресії



**Друга визначна границя**

1. Що таке число е? (подивіться відео, почитайте про число е в біології в додаткових матеріалах на сайті)
2. 



1. Вправа. 

Знайти границі послідовностей *n* → ∞:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. .  2. .  3. .  4. .  5. .  6. .  7. .  8. .  9. .  10. .  11. .  12. .  13. . | 14. .  15. .  16. .  17. .  18. .  19. .  20. .  21. .  22. .  23.  24.  25. . |



**Означення границі функції в точці (за Коші).**

Нехай функція визначена в деякому околі точки *а* (можливо і в самій точці), тоді число *А* називається границею функції, якщо





**Основні теореми про границі.**

**Теорема 1**

Якщо існують скінчені границі функцій  і , то













**Теорема2**

Якщо границя існує, то вона **єдина.**

**Теорема 3**

Якщо функція  заключена між двома функціями  та , які мають одну й ту саму границю, то вона має ту саму границю, тобто якщо і , , то .