Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

Математичний факультет

Кафедра математичного аналізу

Лілія Сорока, Інна Кальчук

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Методичні рекомендації

Луцьк
2013

УДК 519.21
ББК 22.171

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки (протокол № 8 від 22 травня 2013 р.)

Рецензенти: ***Хакревич Юрій Іліодорович*** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки;

Миронюк Павло Йосопович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки;

Сорока Л.І., Кальчук І.В.

Випадкові процеси: методичні рекомендації / Лілія Іванівна Сорока, Інна Володимирівна Кальчук. – Луцьк: Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, 2013. – 56 с.

Анотація: В методичній розробці викладено основні теоретичні положення теорії випадкових процесів. До кожного розділу пропонується значна кількість задач.

Рекомендовано студентам 5 курсу спеціальності «математика» та студентам 4 курсу спеціальності «інформатика».

УДК 519.21
ББК 22.171

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дана методична розробка призначена для методичного забезпечення практичних занять та самостійної роботи студентів в рамках курсу «Теорія випадкових процесів», що вивчається на математичному факультеті.

Методична розробка складається з семи частин. Перша частина є вступом в теорію випадкових процесів. Друга частина присвячена ланцюгам Маркова з дискретним часом. В третій частині розглядаються однорідні процеси з незалежними приростами, такі як процес Пуассона та процес Вінера. Четвертий розділ розкриває поняття марковського процесу з неперервним часом та знайомить з процесом загибелі і розмноження, системою масового обслуговування з втратами. В наступній частині розглядаються основні характеристики випадкових процесів: математичне сподівання, дисперсія, кореляційна функція та ін. Шоста частина методичної розробки присвячена елементам аналізу в просторі L_2: неперервність, диференціювання та інтегрування випадкових процесів. В останній частині висвітлено основні відомості про стаціонарні в широкому розумінні випадкові процеси. До кожної частини подано достатню кількість завдань.

Методичну розробку можна рекомендувати студентам математичних спеціальностей університетів (зокрема заочної форми навчання).

I. ПОНЯТТЯ ПРО ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ І ЇХ РОЗПОДІЛИ

Випадковим процесом називається сім'я випадкових величин $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega,\ F,\ P)$ і залежних від t, який приймає значення з деякої множини T. Параметр t інтерпретується зазвичай як час. Такі процеси, у яких множину T можна ототожнити зі всією чи частиною послідовності $\{\dots, -1,\ 0,\ 1, \dots\}$, називають *процесами з дискретним часом* або *випадковими послідовностями*.

Якщо T співпадає з деяким числовим інтервалом, то $\xi(t),\quad t \in T$ називають *процесом з неперервним часом.*

Дійсну функцію $\xi(t, \omega_0)$ при фіксованому значенні ω_0 називають *реалізацією* або *траєкторією випадкового процесу*. Якщо фіксувати $t = t_0$, то $\xi(t_0, \omega)$ є випадковою величиною, яка називається *перерізом* або *значенням* випадкового процесу.

Функція розподілу

$$F_t(x) = F(t, x) = P\{\xi(t) < x\} \tag{1.1}$$

задає розподіл процесу в момент часу t. Цей розподіл називається *одновимірним законом розподілу випадкового процесу* $\xi(t)$.

Для процесів з дискретними розподілами всіх перерізів одновимірний закон розподілу задається таблицею всіх можливих значень даного перерізу і їх ймовірностями:

$$\begin{gathered} x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots \\ p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t), \\ p_k(t) = P\{\xi(t) = x_k(t)\}, \qquad \sum_k p_k(t) = 1. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Нехай випадковий процес $\xi(t)$ з неперервними значеннями, тоді його одновимірний закон розподілу задається щільністю

$$p(x) = p(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \tag{1.3}$$

Якщо фіксувати значення часу $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, то отримаємо випадкову величину $\big(\xi(t_1,\omega),\ \xi(t_2,\omega),\cdots,\xi(t_n,\omega)\big)$. Розподіли таких випадкових величин називають *скінченновимірними розподілами процесу* $\xi(t)$.

Як правило n-вимірний закон розподілу процесу задається n-*вимірною функцією розподілу*

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n,t_1,t_2,\dots,t_n) =$$
$$= P\{\xi(t_1) < x_1,\ \ \xi(t_2) < x_2,\dots,\ \ \xi(t_n) < x_n\}, \tag{1.4}$$

або n-*вимірною щільністю*

$$P(x_1,x_2,\dots,x_n,t_1,t_2,\dots,t_n) = \frac{\partial^n F\big(x_1,x_2,\dots,x_n\,,t_1,t_2,\dots,t_n\big)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots\ \partial x_n}. \tag{1.5}$$

II. ЛАНЦЮГИ МАРКОВА З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

2.1. Означення ланцюга Маркова. Матриця переходу.

Нехай проводиться серія експериментів, в кожному з яких може появитись одна із скінченної чи зчисленної множини подій $\{E_1,E_2,\dots,E_k,\dots\}$. Номер результату n-го експерименту позначимо ξ_n. Розглянемо послідовність цілочисельних випадкових величин $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Якщо в n-му випробуванні реалізувалась подія E_j, то будемо записувати $\xi_n = j$.

Дана послідовність утворює ланцюг Маркова, якщо

$$P\left\{\xi_{n+1} = j\big/_{\xi_1 = i_1,\ \xi_2 = i_2,\dots,\xi_{n-1} = i_{n-1},\xi_n = i}\right\} =$$
$$= P\left\{\xi_{n+1} = j\big/_{\xi_n = i}\right\} = p_{ij}^{(n)} \tag{2.1}$$

Таким чином, ланцюг Маркова – деяка система з можливими станами $\{E_1,E_2,\dots\}$. Задається деякий початковий розподіл:

$$P\{\xi_0 = i\} = p_{0i}, \qquad \sum_i p_{0i} = 1 \tag{2.2}$$

Якщо всі перехідні ймовірності не залежать від n, тобто $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}$, $n = 1, 2, \ldots$, то ланцюг Маркова називається *однорідним*. Ймовірності p_{ij} утворюють *матрицю переходу*

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Матриця (2.3) має властивості:

$$0 \le p_{ij} \le 1, \qquad \sum_j p_{ij} = 1. \tag{2.4}$$

Матриці з властивостями (2.4) називають *стохастичними*.

Матриця П описує зміну станів системи за один крок. Розглянемо зміну станів системи через m кроків. Позначимо через $p_{ij}(m)$ ймовірність системі перейти із стану E_i в стан E_j через m кроків.

Матриця переходу через m кроків

$$\Pi(m) \begin{pmatrix} p_{11}(m) & p_{12}(m) & \cdots & p_{1k}\,(m) & \cdots \\ p_{21}(m) & p_{22}(m) & \cdots & p_{2k}(m) & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{k1}(m) & p_{k2}(m) & \cdots & p_{kk}\,(m) & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

При $m > 1,\ \ s < m$

$$p_{ij}(m) = \sum_r p_{ir}(s)\, p_{rj}(m - s). \tag{2.6}$$

З (2.6) зокрема випливає

$$\Pi(m) = \Pi^m \tag{2.7}$$

Позначимо $p_j(m)$ – ймовірність того, що система через m кроків перейде в стан E_j (виявиться в стані E_j). За формулою повної ймовірності

$$p_j(m) = \sum_i p_{0i} p_{ij}(m) \tag{2.8}$$

Ергодична теорема Маркова. *Якщо* $\exists\, s \in \mathbb{N}$, *що всі елементи матриці* $\Pi(s) = \Pi^s$ *додатні, то для довільних* $j = 1, 2, \ldots, k, \ldots$ *існує границя*

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}(m) = p_j,$$

яка не залежить від i.

Числа p_j називають *фінальними ймовірностями* станів системи,

$$\sum_j p_j = 1, \quad \lim_{m\to\infty} p_j(m) = p_j$$

Фінальні ймовірності є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_i p_r p_{rj} = p_{j,} \quad j = 1, 2, \ldots; \\ \sum_j p_j = 1. \end{cases} \qquad (2.9)$$

2.2. Класифікація станів

Стан E_i системи називається *неістотним*, якщо існує стан E_j і ціле число $k > 0$, що $p_{ij}(k) > 0,\ p_{ij}(m) = 0,\ m = 1, 2, \ldots$. В супротивному випадку стан E_i називається *істотним* станом.

Істотні стани E_i та E_j називаються *сполученими,* якщо існують такі цілі числа $k > 0$ і $m > 0$, що $p_{ij}(k) > 0,\ p_{ij}(m) > 0$.

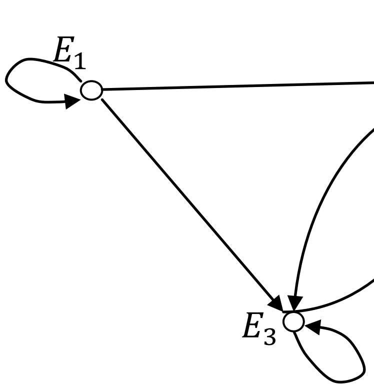
Всі істотні стани системи розбиваються на ізольовані класи сполучених станів $S^1, S^2, \ldots$. Клас всіх неістотних станів позначають S^0.

Ланцюги Маркова, які складаються з одного класу істотних сполучених станів, називаються *нерозкладними*. Якщо ланцюг містить більше одного класу, то він називається *розкладним*.

Приклад 1. Нехай матриця переходу

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Побудуємо граф



Стан E_1 є неістотним, а стани E_2 і E_3 – істотні сполучені. Ланцюг розкладний: $S^0 = \{E_1\}$, $S^1 = \{E_2, E_3\}$.

Для нерозкладних ланцюгів Маркова введемо наступні поняття для станів.

Позначимо $q_j(n)$ ймовірність того, що система, яка вийшла зі стану E_j вперше повернеться в нього через n кроків,

$$Q_j = \sum_{n=1}^{\infty} q_j(n).$$

Стан E_j називається *зворотним*, якщо $Q_j = 1$, і *незворотним*, якщо $Q_j < 1$.

Стан E_j називається *нульовим*, якщо $p_{jj}(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Стан E_j називається періодичним з періодом d_j, якщо повернення з додатною ймовірністю в E_j можливе лише через число кроків, кратне $d_j > 1$, d_j є найбільше з чисел, яке має цю властивість.

Теорема солідарності. *В нерозкладному ланцюзі Маркова всі стани належать до одного типу: якщо хоча б один стан зворотний, то і всі зворотні; якщо хоча б один нульовий, то і всі нульові; якщо хоча б один періодичний з періодом* d, *то і всі періодичні з періодом* d.

Якщо всі стани нерозкладного ланцюга Маркова періодичні з періодом $d > 1$, то ланцюг називається *періодичним*.

Теорема. *Якщо ланцюг Маркова періодичний з періодом* d, *то множина станів розбивається на* d *підкласів(циклів)* $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{d-1}$ *таких, що з ймовірністю одиниця за один крок система з підкласу* Ψ_k *переходить в підклас* $\Psi_{k+1} (k = \overline{0; d-2})$, *із підкласу* Ψ_{d-1} *переходить в* Ψ_0.

Задачі

1. Електрон може знаходитись на одній із зчисленного числа орбіт в залежності від наявної енергії. Перехід з i-ї на j-у орбіту відбувається за 1 секунду з ймовірністю $c_i e^{-\alpha|i-j|}$ $(\alpha > 0)$. Знайти сталі c_i.

2. Є однорідний ланцюг Маркова з матрицею переходу $\Pi = (p_{ij})$ і початковими ймовірностями $p_{i0,}$ $i = 1, 2, \dots$. Обчислити:

а) ймовірність стану E_i на n-му кроці, якщо відомі всі наступні стани системи;

б) ймовірність E_i на n-му кроці, якщо відомі всі попередні і наступні стани.

3. Точка рухається по прямій і протягом кожної наступної секунди руху може або зміститися на одиницю відстані або залишитися на місці. Задані: 1) ймовірність p_1 зміщення для першої секунди; 2) ймовірність α $(\alpha = \text{const})$ зміщення для довільної секунди, якщо відомо, що в попередню секунду також відбулось зміщення; 3) ймовірність β $(\beta = \text{const})$ зміщення для довільної секунди, якщо відомо, що протягом попередньої секунди точка залишилась на місці. Знайти ймовірність зміщення точки протягом $(n+1)$-ї секунди.

4. Ймовірності переходу задаються матрицею

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

а) Переконатись в ергодичності цього ланцюга.

б) Знайти фінальні ймовірності.

5. Точка може займати місця $x = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n$. В момент часу $t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ точка може робити стрибок в сусіднє положення зліва чи справа з ймовірностями p і $q = 1 - p$ відповідно. Якщо точка знаходиться в положенні $x = 1$, то вона з ймовірністю p залишається на місці або з ймовірністю q перестрибне в $x = 2$. Аналогічно, знаходячись в положенні $x = n$, точка може в довільний з моментів t_k залишитись на місці (з ймовірністю p) або перестрибнути в положення $x = n - 1$ (з ймовірністю q).

а) Скласти матрицю переходу ланцюга Маркова.

б) Чи ергодичний ланцюг при $n = 4$?

в) Обчислити граничні ймовірності для $n = 4$.

6. Ланцюг Маркова має матрицю переходу

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Класифікувати всі стани цього ланцюга.

7. Ланцюг Маркова має матрицю переходу

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Класифікувати стани системи.

8. Ланцюг Маркова з вісьмома станами $E_1,\ E_2,\ \dots, E_8$ має наступну матрицю перехідних ймовірностей

$$
\Pi = \begin{pmatrix}
0,1 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\
0,4 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0,3 \\
0 & 0,1 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,8 & 0 \\
0,2 & 0,5 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0,1 \\
0,1 & 0,1 & 0 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 & 0,3 \\
0 & 0,1 & 0,2 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\
0,4 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0,3
\end{pmatrix}.
$$

а) Класифікувати стани системи.

б) Обчислити ймовірність системі за один крок опинитись в стані E_5, якщо початкові ймовірності всіх станів рівні ($p_{01} = p_{02} = \cdots = p_{08} = \frac{1}{8}$).

9. Ланцюг Маркова має матрицю переходу

$$
\Pi = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

Класифікувати стани системи. На які цикли розбиваються стани системи. Знайти асимптотичну поведінку ймовірностей $p_{jj}(n)$ при $n \to \infty$.

10. Ланцюг Маркова має матрицю переходу

$$
\pi = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\
\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{8} \\
\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0
\end{pmatrix}.
$$

Чи розкладний ланцюг? На які цикли розбиваються стани системи?

11. Випадкова величина ξ приймає лише значення -1, 0, 1. Свої значення ξ може змінювати лише в момент часу $t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$, причому значення, яке ξ прийняла в момент t_{k-1}, повністю визначає ймовірність кожного з можливих значень ξ в момент t_k, і ці ймовірності не залежать від значень ξ у час, який передував t_{k-1}, і утворюють матрицю

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

В початковий момент t_0 випадкова величина ξ могла приймати будь-яке із своїх значень з рівними ймовірностями. Обчислити математичне сподівання ξ через 4 кроки.

12. 2 чорних і 2 білих кулі розміщені в двох урнах. Число чорних куль в першій урні визначає стан системи (двох урн). На кожному кроці випадково вибирається по одній кулі з кожної урни і ці вибрані кулі міняються місцями

а) Скільки станів має ланцюг Маркова, який керує переходами системи?

б) Знайти всі ймовірності переходу за один крок.

в) Чи ергодичний ланцюг?

г) Знайти фінальні ймовірності.

13. Випадкові величини $\xi_0, \xi_1, \ldots$ незалежні і кожна приймає значення ± 1 з ймовірностями $\frac{1}{2}$. Чи утворює послідовність випадкових величин $\eta_n = \frac{1}{2}(\xi_n + \xi_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$ ланцюг Маркова?

Вказівка. Довести $P\left\{\eta_2 = -1 \middle/ \eta_0 = -1, \eta_1 = 0\right\} \neq P\left\{\eta_2 = -1 \middle/ \eta_1 = 0\right\}$.

14. Ланцюг Маркова має вектор початкових ймовірностей $(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ і матрицю переходу

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайти ймовірності перебування системи на 1-му, 2-му і 3-му кроках.

15. Ланцюг Маркова має вектор початкових ймовірностей $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0)$ і матрицю переходу

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Знайти ймовірність станів системи через один, два, три, чотири кроки.

16. Знайти граничні ймовірності ланцюга Маркова з матрицею переходу

$$\Pi = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

17. Знайти стаціонарний розподіл ланцюга Маркова, якщо існує

$$\text{а) } \Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } \Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

18. Множина станів студентів деякого вузу з п'ятилітнім терміном навчання така: E_1 – першокурсник, E_2 – другокурсник, …, E_5 – випускник; E_6 – спеціалісти, які закінчили вуз; E_7 – особи, які навчались у вузі, але не закінчили його. Виключені не можуть бути поновлені.

Із стану E_1 за рік можливі переходи в E_2, E_1 (залишитись на курсі) і в E_7 відповідно з ймовірностями r_1, q_1 і p_1.

Із стану E_2 – в E_7, E_2 і E_3 з ймовірностями p_2, q_2 і r_2.

І т. д.

Скласти матрицю переходу. Записати цю матрицю при $r_1 = 0{,}75$, $r_i = r_{i-1} + 0{,}05$, $i = \overline{2{,}5}$; $p_i = 4q_i$. Знайти $p_{16}(5)$.

19. Дано матрицю переходу періодичного ланцюга Маркова

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти період. Виділити цикли.

20. Класифікувати стани ланцюга Маркова з матрицею переходу

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Дано матрицю періодичного ланцюга Маркова

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти період і виділити цикли.

22. Дано матрицю переходу ланцюга Маркова

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Довести ергодичність ланцюга. Знайти:

1) граничні ймовірності;

2) $p_3(2),\ p_1(1),\ p_2(1),\ p_3(1)$, якщо $p_{01} = 0{,}3;\ \ p_{02} = 0{,}3;\ \ p_{03} = 0{,}4$.

III. ОДНОРІДНІ ПРОЦЕСИ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ

3.1. Загальні поняття

Найбільш простими серед процесів з неперервним часом є так звані однорідні процеси з незалежними приростами .

Випадковий процес з неперервним часом $\xi(t)$, визначений $[a;b]$, називається *процесом з незалежними приростами*, якщо довільних $a \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le b$ випадкові величини $\xi(t_0),\ \xi(t_1) - \xi(t_0), \dots,$ $\xi(t_n) - -\xi(t_{n-1})$ незалежні.

Для простоти покладають $a = 0,\ \xi(0) = 0.$

Процес з незалежними приростами називається однорідним, якщо розподіл $\xi(t_1) - \xi(t_0)$ визначається лише довжиною інтервалу $t_1 - t_0$ і не залежить
від t_0.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається *стаціонарним у вузькому розумінні (однорідним в часі)*, якщо його скінченновимірні розподіли інваріантні відносно зсуву

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + s, t_2 + s, \dots, t_n + s) = F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (3.1)$$

де s – будь-яке фіксоване число.

Характеристики такого процесу не змінюються при заміні аргументів t на $t + s$. Його можна аналізувати, починаючи з довільного моменту часу.

3.2. Пуассонівський процес

Пуассонівським процесом називається процес $\xi(t)$ з неперервним часом і дискретними значеннями, який задовольняє наступним умовам:

1°. $\xi(t)$ – процес з незалежними приростами;

2°. $\xi(t)$ однорідний в часі (для $\forall\, t_1 < t_2, \xi(t_2) - \xi(t_1)$ і $\xi(t_2 + s) - \xi(t_1 + s)$ однаково розподілені);

3°. При $\Delta t \to 0$

$$P\{\xi(\Delta t) = 0\} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\{\xi(\Delta t) = 1\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t), \tag{3.2}$$
$$P\{\xi(\Delta t) \geq 2\} = o(\Delta t), \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Умови 3° називаються умовами *ординарності*.

Якщо $\xi(t)$ – пуассоннівський процес,то його одновимірний закон розподілу

$$P\{\xi(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{3.3}$$

Скінченновимірні розподіли пуассонівського процесу, тобто розподіли випадкових векторів $(\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n))$ при довільних $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, задається таким чином

$$P\{\xi(t_1) = k_1, \xi(t_2) = k_2, \ldots, \xi(t_n) = k_n\} =$$
$$= \frac{\lambda^{k_n} {t_1}^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2 - k_1} \ldots (t_n - t_{n-1})^{k_n - k_{n-1}}}{k_1! \, (k_2 - k_1)! \ldots (k_n - k_{n-1})!} e^{-\lambda t_n}. \tag{3.4}$$

Позначимо $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, де t_k – момент k-го стрибка траєкторії процесу, $k = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$. Для пуассонівського випадкового процесу випадкові величини $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ незалежні і кожна з них має показників розподіл з параметром λ.

Для нестаціонарного пуассонівського процесу, але ординарного і з незалежними приростами одновимірний закон розподілу

$$P_{t_0}\{\xi(t) = k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \tag{3.5}$$

де a – математичне сподівання числа події на відрізку від t_0 до $t_0 + t$, рівне

$$a = \int_{t_0}^{t_0 + t} \lambda(t) dt, \tag{3.6}$$

$\lambda(t) = m'(t) -$ *миттєва щільність* або *інтенсивність*, $m(t)$ – математичне сподівання $\xi(t)$. Для стаціонарного пуассонівського процесу з інтенсивністю λ математичне сподівання дорівнює λt.

3.3. Вінерівський процес

Вінерівським процесом називається випадковий процес $\xi(t)$ з неперервними значеннями, який задовольняє умовам:

1°. $\xi(t)$ – процес з незалежними приростами.

2°. $\xi(t)$ – стаціонарний у вузькому розумінні (для $\forall\ t_1 < t_2, \xi(t_2) - \xi(t_1)$ і $\xi(t_2 + s) - \xi(t_1 + s)$ однаково розподілені).

3°. $\xi(0, \omega) = 0,\ \ \omega \in \Omega$.

4°. При $\Delta t \to 0$

$$M\xi(\Delta t) = a\Delta t + o(\Delta t), \quad M\xi^2(\Delta t) = b\Delta t + o(\Delta t),$$

$$M|\xi(\Delta t)\,|^3 = o(\Delta t), \ \ -\infty < a < \infty, 0 < b < \infty.$$

5°. Траєкторії $\xi(t)$ неперервні функції. Якщо $\xi(t)$ – вінерівський процес,то його одновимірний закон розподілу задається щільністю

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi bt}} e^{-\frac{(x-at)^2}{2bt}} \tag{3.7}$$

Числа a і b називаються відповідно *коефіцієнтами переносу* і *дифузії*. Якщо $a = 0,\ \ b = 1$, то такий вінерівський процес називається *стандартним*. Перерізи вінерівського процесу розподілені нормально.

Всі сумісні розподіли $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ також будуть нормальними, причому

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n, x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \iint\limits_G \dots \int \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi b(t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{(u_k - a(t_k - t_{k-1}))^2}{2b(t_k - t_{k-1})}} du_1 du_2 \dots du_n, \tag{3.8}$$

де $G = \{(u_1, u_2, \dots, u_n): u_1 < x_1, u_1 + u_2 < x_2, \dots, u_1 + u_2 + \dots + u_n < x_n\}$.

Математичне сподівання і дисперсія вінерівського процесу відповідно дорівнюють: $m(t) = at,\ \ D\xi(t) = bt$. Для стандартного вінерівського процесу $m(t) = 0,\ \ D\xi(t) = t$.

Задачі

1. Середнє число замовлень таксі, які поступають на диспетчерський пункт за одну хвилину, дорівнює трьом. Яка ймовірність, що за 2 хв поступить: а) чотири виклики; б) менше чотирьох викликів; в) не менше чотирьох викликів?

2. Потік товарних залізничних потягів, що надходять на сортувальний вузол, приймається пуассонівським з інтенсивністю $\lambda = 4$ потяги за одну годину. Обчислити ймовірність того, що за 1,5 год до залізничного вузла надійде: а) п’ять потягів; б) не більше п’яти.

3. знайти математичне сподівання і дисперсію: а) пуассонівського процесу; б) вінерівського процесу.

4. Середнє число відмов радіоапаратури за 1000 год роботи дорівнює 5. Визначити ймовірність хоча б однієї відмови радіоапаратури за 20 год роботи.

5. При роботі ЕОМ виникають неполадки. Середнє число неполадок за добу дорівнює 1,5. знайти ймовірності подій: а) за дві доби не буде жодної неполадки; б) за тиждень буде не менше трьох неполадок; в) $P\{\xi(2) = 1, \xi 3=2, \xi 6=4$, де ξt число неполадок за час $0;t)$.

6. Довести, що для пуассонівського процесу

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_{k\geq 1}(t)}{P_1(t)} = 1.$$

7. Час безвідмовної роботи радіоелемента має показниковий розподіл з параметром λ. Після відмови радіоелемента негайно включається новий; тривалості безвідмовної роботи різних елементів незалежні. Знайти ймовірність того, що за час t відмовить не більше трьох елементів.

8. Неполадки в роботі обчислювальної машини утворюють пуассонівський процес з параметром λ. Машина працює в періодичному режимі: на протязі часу τ_0 записує інформацію, потім на протязі часу τ_1обробляє її. Під час запису неполадки недопустимі, під час обробки

допустима одна неполадка. Знайти ймовірність, що за час $n(\tau_0+\tau_1)$ ні разу не виникне недопустима ситуація.

Кількості неполадок в інтервалах часу, що не перетинаються, незалежні.

9. На ткацькому станку нитка обривається в середньому 0,375 рази на протязі години. Знайти ймовірність , що за зміну (8 год.) число обривів нитки буде від двох до чотирьох.

10. Із розпеченого катода за одиницю часу вилітає в середньому $q(t)$ електронів, де t – час з початку досліду. Знайти ймовірність того,що за проміжок часу τ, який починається в момент τ_0, з катода вилетить рівно m електронів. Обчислити при $q(t)=-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t+\frac{15}{4},\ \ \tau_0=2,\ \tau=3,\ m=30.$

11. Знайти $\operatorname{cov}(\xi(t_0),\xi(t_0+s)),\ \ t_0,\ s\geq 0,$ якщо а) $\xi(t)$ – пуассонівський процес з інтенсивністю λ; б) $\xi(t)$ – вінерівський процес з $a=0$; в) $\xi(t)$ – пуассонівський з інтенсивністю $\lambda(t)$.

12. Знайти середнє число елементів, які відмовили за час T, якщо ймовірність того, що за час T відмовить хоча б один елемент, дорівнює 0,98(пуассонівський процес).

13. Нехай $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0<\tau_1<\tau_2<\cdots)$ – положення точок пуассонівського потоку на $[0;+\infty)$ з інтенсивністю λ. Довести,що при довільному $T>0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{\tau_k\leq T\}=\lambda T.$$

14. Нехай $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0<\tau_1<\tau_2<\cdots)$ – положення точок пуассонівського потоку на $[0;+\infty)$ з інтенсивністю λ. Знайти щільність розподілу $\tau_n,\ M\tau_n, D\tau_n$.

15. Нехай виконуються умови задачі 13. Знайти:

а) $P\left\{\tau_1\leq x\big/\tau_2>T\right\},\ 0\leq x\leq\infty,$

б) $P\left\{\tau_1\leq x\big/\tau_1\leq T<\tau_2\right\},\ 0\leq x\leq T.$

16. У середньому до авіакаси звертаються з приводу придбання квитків 30 осіб за 1 год. Враховуючи, що такі особи утворюють пуассонівський потік, обчислити ймовірність, що за 3 хв. до каси надійдуть: 1) 3 пасажири; 2) не більше як 3.

17. Інтенсивність поломки ЕОМ, год$^{-1}$: $\lambda = 10^{-2}\frac{1}{24}$. Поломки розглядають як випадкові події, що утворюють найпростіший потік. Яка ймовірність, що 200 робочих днів поломок ЕОМ буде: 1) дві; 2) від однієї до трьох?

18. У годину "пік" через пропускний автомат станції метро за 0,5 с проходить у середньому один пасажир. Потік пасажирів вважають пуассонівським. Яка ймовірність того, що за 5 с через пропускний автомат пройдуть: 1)8 пасажирів; 2) від трьох до п'яти пасажирів?

IV. МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ

Випадковий процес $(\xi(t),\ t \geq 0)$ із скінченним чи зчисленним числом станів називається *марковським*, якщо для $\forall t_1, \dots t_n,\ t_{n+1}$: $0 \leq t_1 < t_2 <$ $< \cdots < t_n < t_{n+1}$ і $\forall\, k_1, k_2, \cdots, k_n, k_{n+1}$ виконується властивість

$$P\left\{ \xi(t_{n+1}) = k_{n+1} \Big/ \xi(t_1) = k_1, \xi(t_2) = k_2, \cdots, \xi(t_n) = k_n \right\} =$$

$$= P\left\{ \xi(t_{n+1}) = k_{n+1} \Big/ \xi(t_n) = k_n \right\}. \qquad (4.1)$$

Властивість (4.1) називається *властивістю марковості.*

4.1. Ланцюги Маркова з неперервним часом

Нехай $\xi(t)$ – однорідний марковський процес з неперервним часом і скінченним чи зчисленним числом станів $E_1, E_2, \cdots$, перехід із стану в стан можливий в довільний момент часу t.

Позначимо $p_{ij}(t)$ ймовірність переходу із стану E_i в стан E_j за час t:

$$p_{ij}(t) = \left\{ \xi(t+s) = j \Big/ \xi(s) = i \right\}, \quad i, j = 1,2, \cdots \tag{4.2}$$

Нехай $p(0) = \big(p_i(0)\big)$, $i = 1,2, \cdots$ – початковий розподіл ймовірностей, $p(t) = \Big(p_j(t)\Big)$, $j = 1,2, \cdots$ – розподіл ймовірностей в момент часу t. Мають місце наступні формули:

$$p_j\,(t) = \sum_i p_i\,(0) p_{ij}(t), \tag{4.3}$$

$$p_{ij}\,(t+s) = \sum_k p_{ik}\,(t) p_{kj}(s), \; i, j = 1,2, \cdots \tag{4.4}$$

при довільних t і s, де

$$p_{ij}\,(0) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases} \tag{4.5}$$

Нехай при всіх $i, j = 1,2, \cdots$ перехідні ймовірності $p_{ij}\,(t)$ задовольняють умовам ординарності:

$$1 - p_{ii}\,(\Delta t) = \lambda_i\,\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t),$$
$$p_{ij}\,(\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \; i \neq j \tag{4.6}$$

де $\Delta t \to 0$, λ_i – *інтенсивність виходу* із стану E_i , λ_{ij} – *інтенсивності переходу* із стану E_i в стан E_j. Позначають $\lambda_{ii} = -\lambda_i$, $i = 1,2, \cdots$.

Матриця $\lambda = (\lambda_{ij})$ називається *матрицею інтенсивностей.*

Теорема. *Для марковського процесу із скінченним числом станів при умові (4.6) перехідні ймовірності* $\mathrm{p}_{ij}\,(t)$ *задовольняють диференціальним рівнянням*

$$p'_{ij}(t) = \sum_k \lambda_{ik}\, p_{kj}\,(t), \quad i, j = 1,2, \cdots, \tag{4.7}$$

$$p'_{ij}(t) = \sum_k \lambda_{ik}\, p_{kj}\,(t), \quad i, j = 1,2, \cdots, \tag{4.8}$$

з початковими умовами (4.5).

Рівняння (4.8) утворюють *пряму систему*, а рівняння (4.7) – *обернену систему диференціальних рівнянь Колмогорова.*

Пряма система (4.8) має місце для ймовірностей $p_j(t)$ при довільному початковому розподілі:

$$p'_j(t) = \sum_k p_k(t)\lambda_{kj}, \qquad i,j = 1,2, \qquad (4.9)$$

Теорема. *Якщо всі елементи матриці* $\Pi(t) = \left(p_{ij}(t)\right)$ *додатні при деякому* $t = t_0$*, то ймовірності* $p_j(t)$ *того, що система буде знаходитись через час* t *у відповідному стані* $j = 1,2,\cdots$*, при* $t \to \infty$ *мають граничні значення*

$$p_j^* = \lim_{t \to \infty} p_j(t), \quad j = 1,2,\dots \qquad (4.10)$$

Граничні ймовірності p_j^* *не залежать від початкового розподілу* $(p_i(0))$, $i = 1,2,\cdots$.

Стаціонарні ймовірності p_j^*, $j = 1,2,\cdots$ знаходимо з лінійної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{\mathrm{j}} p_{\mathrm{j}}^* = 1, \\ \sum_k p_k^* \lambda_{kj} = 0, \ j = 1,2,\cdots \end{cases} \qquad (4.11)$$

4.2. Процеси загибелі та розмноження

Нехай деяка система може перебувати в одному із станів E_0, E_1, $E_2,\cdots$, множина яких скінченна або зчисленна. Стани системи міняються з часом, причому за проміжок часу $(t,\ t + \Delta t)$, де $\Delta t \to 0$, система із стану E_k перейде в стан E_{k+1} чи E_{k-1}, а може залишитись в стані E_k. Ймовірності того, що система перейде в якийсь інший стан нескінченно малі відносно Δt.

Марковський процес $\xi(t)$ називається *процесом загибелі і розмноження*, якщо при $\Delta t \to 0$ виконуються умови:

$$P\left\{\xi(t + \Delta t) = k + 1 \big/ \xi(t) = k\right\} = \lambda_k \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\left\{\xi(t+\Delta t)=k-1\Big/_{\xi(t)=k}\right\}=\ \mu_k\Delta t+o(\Delta t), \qquad (4.12)$$

$$P\left\{\xi(t+\Delta t)=k\Big/_{\xi(t)=k}\right\}=\ 1-(\lambda_k+\mu_k)\Delta t+o(\Delta t),$$

де $\lambda_k, \mu_k \geq\ 0, k \geq\ 0,\ \ \mu_0=0.$

Якщо при довільному $k \geq 1$ мають місце рівності $\mu_k=0$, тобто можливі лише переходи $E_k \to E_{k+1}$, в момент зміни стану, то процес називається *процесом чистого розмноження.* Якщо ж всі $\lambda_k=0$, тобто можливі переходи $E_k \to E_{k-1}$, або $E_k \to E_k$, то має місце *процес чистого вимирання.*

Позначимо $P_k(t)=P\{\xi(t)=k\}$ – ймовірність того, що система в момент t знаходиться в стані E_k.

Система диференціальних рівнянь процесу загибелі та розмноження:

$$\begin{cases} P_0'(t)=\ -\lambda_0 P_0(t)+\ \mu_0 P_1(t), \\ P_k'(t)=\ \lambda_{k-1}P_{k-1}(t)-(\lambda_k+\mu_k)P_k(t)+\mu_{k+1}P_{k+1}(t), \quad k=1{,}2\ \ldots, \end{cases} \qquad (4.13)$$

де початкові умови: $P\{\xi(0)=k\}=\ P_k(0),\ \ k=1{,}2,\ldots$

Якщо $\lambda_k,\ \mu_k$ – обмежені, або зростають повільно, то система (4.13) має єдиний розвя’зок, причому $\sum_{k=0}^{\infty} P_k\,(t)=1.$

З (4.13) отримаємо системи рівнянь для процесів чистого розмноження і чистого вимирання.

Для процесу чистого розмноження:

$$\begin{cases} P_0'(t)=\ -\lambda_0 P_0(t), \\ P_k'(t)=\ \lambda_{k-1}P_{k-1}(t)-\lambda_k P_k(t),\ \ k\ \geq\ 1, \end{cases} \qquad (4.14)$$

Початкові умови: $P_0(0)=1$, $P_k(0)=0$ при $k\ \geq\ 1.$

Теорема Феллера. *Для того, щоб ймовірності* $P_k(t)$ $(k=0{,}1{,}2,\ldots)$ *процесу чистого розмноження задовольняли умову* $\sum_{k=0}^{\infty} P_k\,(t)=1$ *необхідно і достатньо, щоб ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{-1}$ *розбігався.*

Для процесу чистого вимирання система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\mu_1 P_1(t), \\ P_k'(t) = -\mu_k P_k(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t), \qquad k = 1,2, \dots n-1, \\ P_n'(t) = -\mu_n P_n(t). \end{cases} \qquad (4.15)$$

Початкові умови: $P_n(0) = 1$, $P_k(0) = 0$ при $k = 1,2,\dots,\mathrm{n}-1$.

4.3. Система масового обслуговування з втратами. Рівняння Ерланга

Системи масового обслуговування (СМО) діляться на два основні типи: 1) системи з відмовами (втратами); 2) системи з чергою (очікуванням).

В *СМО з втратами* заявка (вимога), яка поступила в момент, коли всі канали обслуговування зайняті, отримає відмову, покидає СМО і в процесі обслуговування відсутня.

В *СМО з очікуванням* заявка, яка застала всі канали зайнятими , не лишає систему, а стає в чергу і чекає звільнення якого-небудь каналу.

Нехай є n-канальна СМО з втратами, на яку поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ (λ>0). Час обслуговування кожної заявки має показниковий розподіл з параметром μ (μ>0), $m(t)_{\text{обсл.}} = {}^{1}/_{\mu}$ – середній час обслуговування заявки. Параметр μ можна вважати інтенсивністю потоку звільнень. Обслуговуючі пристрої працюють незалежно один від одного. Потоки заявок і звільнень є пуассонівські, тому процес є марковським.

Позначимо $P_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$, $k = \overline{0,n}$ – ймовірність того, що в системі зайняті k каналів (обслуговується k заявок), $\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1$.

Система диференціальних рівнянь для ймовірностей $P_k(t)$, $k = \overline{0,n}$:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + \mu) P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), \;\; 1 \le k \le n-1, \qquad (4.16)$$

$$P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) - n\mu P_n(t).$$

Початкові умови: $P_0(0) = 1$, $P_k(0) = 0$ при k=$\overline{1,n}$.

Рівняння (4.16) називаються *рівняннями Ерланга.*

$P_n(t)$ – це ймовірність того, що заявка, яка поступила в момент t отримає відмову:

$$P_{\text{відм}}(t) = P_n\,(t). \tag{4.17}$$

Нехай для СМО з втратами існує граничний (стаціонарний) режим роботи, тобто існують ймовірності

$$P_k(t) = \lim_{n\to\infty} P_k(t), \quad k = \overline{0, n}.$$

Ці граничні ймовірності шукають з формул:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}\ , \tag{4.18}$$

$$P_k = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}{\sum_{s=0}^{n} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}}, \quad k = \overline{0, n}\,. \tag{4.19}$$

Формули (4.19) називають *формулами Ерланга.*

Задачі

1. Дано матрицю переходу ланцюга Маркова

$$\Pi(1) = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \qquad p = (0{,}7;\ 0{,}2;\ 0{,}1).$$

Знайти 1) $\mathrm{p}(2)$; 2) ймовірність того, що в момент часу $t = 0{,}1{,}2{,}3$ станами ланцюга відповідно будуть E_1,E_3, E_3, E_2; 3) стаціонарний розподіл.

2. Ланцюги Маркова з неперервним часом має матрицю інтенсивності $\lambda = (\lambda_{ij})$. Довести, що

$$\lambda_{\mathrm{i}} = \sum_{j:j\neq i} \lambda_{ij}.$$

3. $\xi(t)$ – ланцюг Маркова з неперервним часом і множиною станів E_1, E_2

$$p_{12}(\Delta t) = \alpha\Delta t + o(\Delta t),$$
$$p_{21}(\Delta t) = \beta\Delta t + o(\Delta t), \ \ \Delta t \to 0.$$

Знайти: $p_{ij}(t),\ i,j\ =\ 1{,}2.$

4. Скласти систему диференціальних рівнянь для $p_{ij}(t), \left(\ i,j\ =\ \overline{0,N}\right).$

$p_{00}(\Delta t) = 1 -\ \alpha\Delta t + o(\Delta t),$

$p_{NN}(\Delta t) = 1 -\ \beta\Delta t + o(\Delta t),$

$p_{ii}(\Delta t) =\ 1 - (\alpha + \beta)\Delta t + o(\Delta t),\quad 1 \le i \le N - 1,$

$p_{i-1,i}(\Delta t) =\ \alpha\Delta t + o(\Delta t),$

$p_{i,i-1}(\Delta t) =\ \beta\Delta t + o(\Delta t),$

$p_{ij}(\Delta t) =\ o(\Delta t),$ якщо $\mid i - j \mid > 1;\ \alpha,\ \beta\ -$ фіксовані додатні числа.

5. Ланцюги Маркова має стани E_1, E_2, E_3. Знайти граничні ймовірності якщо матриця інтенсивностей

а) $\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\lambda = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

6. Знайти граничні ймовірності ланцюга Маркова з неперервним часом, якщо матриця інтенсивностей цього ланцюга

$$\lambda = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Дано процес чистого розмноження з параметрами $\lambda_k,\ \ k =\ 0,1,2, \dots$ Знайти ймовірності $p_0(t),\ p_1(t),\ p_2(t),\ p_3(t)$, якщо початкові умови: $p_0(0) = 1$, $p_n(0) =\ 0,\quad n \ne\ 0.$

8. Дано процес чистого вимирання з параметрами $\mu_k = k \cdot \mu$, $k =\ 0,1,2, \dots, n$ і початковими умовами $P_n(0) =\ 1,\ P_k(0) =\ 0,\ k = \overline{0, n-1}.$ Знайти $P_k(t),\ k = \overline{0,n};\quad M\xi(t);\quad D\xi(t).$

9. Дано СМО з втратами, яка має n каналів. Знайти граничні ймовірності

$$P_k\!:\ \lim_{t\to 0} P_k(t) =\ P_k,\qquad k = \overline{0,n}\ \text{(формули Ерланга).}$$

10. АТС має чотири лінії зв'язку. На станцію поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю $\lambda = 3$ (виклики в 1 хв.). Виклик, який поступив

в момент, коли всі лінії зайняті, отримує відмову. Середня тривалість розмов триває 2 хв. Знайти: а) ймовірність відмови; б) ймовірність того, що телефонна станція взагалі не завантажена.

11. Є двоканальна СМО з втратами. На її вхід надходить потік заявок з інтенсивністю $\lambda = 4$ заявки за годину. Середній час обслуговування заявки $m(t)_{\text{обсл.}} = 0{,}8$. Знайти: а) P_0; б) відносну пропускну здатність системи. Провести розрахунки для трьох канальної СМО.

12. Станція наведення винищувачів має 3 канали. Кожен канал може одночасно наводити 1 винищувач на одну ціль. Середній час наведення $m(t)_{\text{обсл.}} = 2\,\text{хв.}$ Потік цілей – пуассонівський з інтенсивністю $\lambda = 1{,}5$ (літаки в хв.).

Станцію можна вважати системою з відмовами, оскільки ціль, по якій наведення не почалось в момент, коли вона ввійшла в зону дії винищувачів, взагалі лишається не атакованою.

Знайти середню частку цілей, які проходять через зону дії не обстріляні $\left(\text{P}_{\text{відм}}\right)$.

13. На станцію поточного технічного ремонту надходять автомашини, які утворюють пуассонівський потік з параметром $\lambda = 0{,}8$ автомашини за годину. У ремонті бере участь одна бригада робітників. Середній час ремонту однієї машини є випадкова величина, що має експоненціальний розподіл з параметром $\mu = 1{,}8\,\text{год}^{-1}$. На майданчику ремонтної станції одночасно може перебувати не більше як чотири автомашини. Визначити: 1) ймовірність того, що майданчик станції буде повністю заповнений; 2) середнє число автомашин на ремонтній станції.

Потік відмовлень радіоапаратури – пуассонівський з інтенсивністю $\lambda = 2\,\text{відм/год}$. Збій негайно виявляється і ремонтується. Закон розподілу часу ремонту – показниковий з параметром $\mu = 1\,\text{год}^{-1}$. В початковий момент радіоапаратура справна. Знайти ймовірність, в що в момент часу t радіоапаратура: а) буде працювати; б) не буде працювати.

V. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

5.1. Математичне сподівання і дисперсія випадкового процесу

Математичним сподіванням і дисперсією випадкового процесу $\xi(t)$ називаються такі невипадкові функції $m(t) = \xi(t)$ і $D\xi(t)$, які для довільного t рівні відповідно математичному сподіванню і дисперсії перерізу процесу в цей момент t.

Якщо випадковий процес $\xi(t)$ з дискретними значеннями і має одновимірний закон розподілу (1.2), то

$$m(t) = M\,\xi(t) = \sum_{к} x_k\,(t) p_k(t), \tag{5.1}$$

$$D\xi(t) = \sum_{к} (x_k\,(t) - m(t))^2 p_k(t) = \sum_{к} x^2{}_k\,(t) p_k(t) - m^2(t), \tag{5.2}$$

Якщо ж випадковий процес $\xi(t)$ з неперервним значенням і має щільність $p(t,x)$, ті ж характеристики визначаються формулами:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(t,x)dx, \tag{5.3}$$

$$D\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(x - m(t)\big)^2 p(t,x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(t,x)dx - m^2(t). \tag{5.4}$$

Властивості математичного сподівання

1°. Математичне сподівання невипадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює тій же функції:

$$M\varphi(t) = \varphi(t).$$

2°. Невипадкову функцію $\varphi(t)$ можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(\varphi(t) \cdot \xi(t)) = \varphi(t) \cdot M\xi(t) = \varphi(t) \cdot m(t).$$

3°. Математичне сподівання суми випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ рівне сумі їх математичних сподівань:

$$M(\xi(t) + \eta(t)) = M\xi(t) + M\eta(t).$$

Наслідок. Якщо $\xi(t)$ – випадковий процес, а $\varphi(t)$ – невипадкова функція, то

$$M(\xi(t)+\varphi(t)) = M\xi(t)+\varphi(t).$$

4.° Якщо при всіх значеннях $t \in T$ перерізи випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є незалежними випадковими величинами, то математичне сподівання добутку цих процесів дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(\xi(t)\eta(t)) = M\xi(t)M\eta(t).$$

Властивості дисперсії

1°. Дисперсія випадкового процесу є невід'ємною функцією:

$$D\xi(t) \geq 0.$$

2°. Дисперсія невипадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює 0:

$$D\varphi(t) = 0.$$

3°. Дисперсія суми випадкового процесу $\xi(t)$ і невипадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює дисперсії випадкового процесу:

$$D(\xi(t)+\varphi(t)) = D\xi(t).$$

4°. Дисперсія добутку випадкового процесу $\xi(t)$ на невипадкову функцію $\varphi(t)$ дорівнює добутку квадрата невипадкової функції на дисперсію випадкового процесу:

$$D(\varphi(t)\xi(t)) = \varphi^2(t)D\xi(t).$$

5°. $D\xi(t) = M\xi^2(t) – (M\,\xi(t))^2$.

6°. Якщо при всіх значеннях $t \in T$ перерізи випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є незалежними випадковими величинами, то дисперсія цих процесів дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(\xi(t)+\eta(t)) = D\xi(t)+D\eta(t).$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкового процесу $\xi(t)$ називають квадратичний корінь з дисперсії:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi(t)}. \qquad (5.5)$$

5.2. Кореляційна функція випадкового процесу.

Нормована кореляційна функція

Кореляційною функцією випадкового процесу $\xi(t)$ називається невипадкова функція

$$R(t,s) = M(\xi(t) - M\xi(t))\,(\xi(s) - M\xi(s)), \tag{5.6}$$

яка для довільних t і s дорівнює коваріації відповідних перерізів процесу в момент t і s.

Властивості кореляційної функції

1°. При перестановці аргументів кореляційна функція (к.ф.) не змінюється (властивість симетричності):

$$R(t,s) = R(s,t).$$

2°. При $t = s$ к. ф. дорівнює дисперсії випадкового процесу $\xi(t)$:

$$R(t,t) = D\xi(t).$$

3°. Додавання до випадкового процесу $\xi(t)$ невипадкової функції $\varphi(t)$ не змінює його к.ф.:

$$R_{\xi+\varphi}(t,s) = R_{\xi}(t,s).$$

4°. При множення випадкового процесу $\xi(t)$ на випадкову функцію $\varphi(t)$ його к.ф. помножиться на $\varphi(t)\cdot\varphi(s)$:

$$R_{\varphi\xi}(t,s) = \varphi(t)\cdot\varphi(s)\cdot R_{\xi}(t,s).$$

5°. Модуль к.ф. випадкового процесу $\xi(t)$ не перевищує середнього геометричного дисперсії відповідних перерізів (нерівність Коші–Буняковського):

$$|R(t,s)| \le \sqrt{D\,\xi(t)\cdot D\,\xi(s)}.$$

6°. $R(t,s) = M(\xi(t)\cdot\xi(s)) - M\xi(t)\cdot M\xi(s)$.

Нормованою кореляційною функцією (н.к.ф.) випадкового процесу $\xi(t)$ називається невипадкова функція $\rho(t,s)$, яка при фіксованих значеннях t і s дорівнює коефіцієнту кореляції відповідних перерізів:

$$\rho(t,s) = \frac{R_{\xi}(t,s)}{\sigma_{\xi}(t)\sigma_{\xi}(s)} = \frac{R_{\xi}(t,s)}{\sqrt{D\,\xi(t)\cdot D\,\xi(s)}}. \tag{5.7}$$

Властивості н.к.ф. випливають з властивостей к.ф. і дисперсії випадкового процесу $\xi(t)$, зокрема з властивості 5° маємо $|\rho(t,s)| \le 1$, причому
$|\rho(t,t)| = 1$.

5.3 Взаємна кореляційна функція двох випадкових процесів. Нормована взаємна кореляційна функція

Взаємною кореляційною функцією двох випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ називається випадкова функція

$$R_{\xi\eta}(t,s) = M\big(\xi(t) - M\xi(t)\big)\big(\eta(s) - M\eta(s)\big), \qquad (5.8)$$

яка при кожній парі значень t і s дорівнює коваріації відповідних перерізів $\xi(t)$ і $\eta(s)$.

Якщо $R_{\xi\eta}(t,s) \equiv 0$, то процеси $\xi(t)$ і $\eta(s)$ називаються *некорельованими.* В супротивному випадку процеси називаються *корельованими.*

Властивості взаємної кореляційної функції

1°. $R_{\xi\eta}(t,s) = R_{\eta\xi}(t,s)$.

2°. Додавання до випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ невипадкових функцій $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ не змінює їх взаємної кореляційної функції:

$$R_{\xi+\varphi,\eta+\psi}(t,s) = R_{\eta\xi}(t,s).$$

3°. При множенні випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ на невипадкові функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ відповідно, їх взаємна к.ф. помножиться на $\varphi(t)\cdot\psi(s)$:

$$R_{\varphi\xi,\psi\eta}(t,s) = \varphi(t)\cdot\psi(s)R_{\xi\eta(t,s)}.$$

4°. Модуль взаємної к.ф. двох випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ не перевищує середнього геометричного їх дисперсій

$$\left|R_{\xi\eta}(t,s)\right| \le \sqrt{D\,\xi(t)\cdot D\,\xi(s)}.$$

5°. $R_{\xi\eta}(t,s) = M\big(\xi(t)\cdot\eta(t)\big) - M\xi(t)\cdot M\eta(t)$.

6°. Якщо $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$, то

$$R_\xi(t,s) = R_\xi(t,s)+R_\eta(t,s) + R_{\xi\eta}(t,s) \ + \ R_{\xi\eta}(s,t).$$

Наслідок 1. $D\zeta(t) = D\xi(t) + D\eta(t) + 2R_{\xi\eta}(t,t)$.

Наслідок 2. Якщо процеси некорельовані, то

$$R_\zeta\,(t,s) = \ R_\xi(t,s)+R_\eta(t,s);$$

$$D\zeta(t) = D\xi(t) \ + D\eta(t).$$

Нормованою взаємною кореляційною функцією двох випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ називають невипадковою функцією

$$\rho_{\xi\eta}(t,s) = \frac{R_{\xi\eta}(t,s)}{\sigma_\xi(t)\cdot\sigma_\eta(s)} = \frac{R_{\xi\eta}(t,s)}{\sqrt{D\ \xi(t)\cdot D\ \xi(s)}}, \tag{5.9}$$

яка при фіксованих значеннях t і s дорівнює коефіцієнту кореляції відповідних перерізів $\xi(t)$ і $\eta(s)$.

З властивості 4° випливає: $\left|\rho_{\xi\eta}(t,s)\right| \le 1$.

5.4 Характеристики комплексного випадкового процесу

Комплексним випадковим процесом називається процес

$$\zeta(t) = \xi(t) + \ i\eta(t), \tag{5.10}$$

де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ – дійсні випадкові процеси, i– уявна одиниця.

Математичним сподіванням комплексного випадкового процесу (5.10) називається невипадкова функція

$$M\zeta(t) = M\xi(t) + \ iM\eta(t). \tag{5.11}$$

Дисперсією комплексного випадкового процесу $\zeta(t)$ називається невипадкова функція

$$D\zeta(t) = M(\zeta(t) \ + \ M\zeta(t))^2. \tag{5.12}$$

Якщо $\zeta(t) \ = \ \xi(t) \ + \ i\eta(t)$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ – дійсні випадкові процеси, то

$$D\zeta(t) = D\xi(t) \ + \ D\eta(t). \tag{5.13}$$

Кореляційною функцією комплексного випадкового процесу ζ(t) називається невипадкова функція

$$R_\zeta\,(t,s) \ = \ M(\zeta(t) - \ M\zeta(t))(\overline{\zeta(s) - M\zeta(s)}). \tag{5.14}$$

Якщо $t = s$, то

$$R_\zeta(t,t) = D\zeta(t). \quad (5.15)$$

Нехай $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ – дійсні випадкові процеси, тоді

$$R_\zeta(t,s) = R_\xi(t,s) + R_\eta(t,s) + i\left(R_{\xi\eta}(s,t) - R_{\xi\eta}(t,s)\right). \quad (5.16)$$

Взаємною кореляційною функцією двох комплексних випадкових процесів $\zeta(t)$ і $\chi(t)$ називається невипадкова функція

$$R_{\zeta\chi}(t,s) = M\big(\zeta(t) - M\zeta(t)\big)\left(\overline{\chi(s) - M\chi(s).}\right) \quad (5.17)$$

Задачі

1. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію випадкового процесу $\xi(t)$:

1) $\xi(t) = U\sin 3t$;

2) 2) $\xi(t) = 2Ue^{-t^2}$,

де U – випадкова величина з $MU = 4, DU = 0{,}3$.

2. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію випадкового процесу $\xi(t) = Ut + Vt^2$, де U і V випадкові величини з $MU = 3$; $MV = 0{,}5$; $DU = 1$; $DV = 0{,}05$; $\operatorname{cov}(u,v) = -2$.

3. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію випадкового процесу $\xi(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t + 5t$, де U і V – корельовані випадкові величини з $MU = 1$; $MV = 0{,}2$; $DU = 0{,}1$; $DV = 0{,}004$, ω – додатня стала.

4. Дано випадковий процес $\xi(t) = 2U\sin\omega t + 3Vt^2 + 5$; U і V – випадкові величини з MU= 1; $MV = 2$; $DU = 0{,}1$; $DV = 0{,}05$; $\rho(U,V) = -0{,}3$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію випадкового процесу $\xi(t)$.

5. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію процесу Пуассона з параметром λ.

6. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію стандартного процесу Вінера.

7. Дано випадковий процес $\xi(t) = t - 3\cos t + U\,(t + \cos t) + V\cos 2t$; $MU = MV = 0$; $M(U \cdot V) = 0$; $DU = 1$; $DV = 2$. Знайти $M\xi(t)$, $D\xi(t)$ і $R_\xi(t,s)$.

8. Дано випадковий процес $\xi(t) = U(t^2 + 1) + V\sin 2t$, де випадковий вектор (U, V) має математичне сподівання $(2, -2)$ і кореляційну матрицю $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти $M\xi(t)$, $D\xi(t)$ і $R_\xi(t,s)$.

9. Дано випадковий процес $\xi(t) = 2t + U\cos t + V\sin t$, де випадковий вектор (U, V) має математичне сподівання $(-\frac{1}{2}, 1)$ і кореляційну матрицю $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2{,}5 \end{pmatrix}$. Знайти $M\xi(t), D\xi(t)$ і $R_\xi(t,s)$.

10. Відома кореляційна функція $R_\xi(t,s) = ts + 5t^2s^2$ випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти нормовану кореляційну функцію і обчислити її значення при $t = 1$, $s = 4$.

11. Задана кореляційна функція $R_\xi(t,s) = 2tse^{-|s-t|}$ випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти нормовану кореляційну функцію.

12. Задана взаємну кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t) = t^3U$; $\eta(t) = t^2V$, де U – випадкова величина з $DU = 4$.

13. Дана взаємна кореляційна функція $R_{\xi\eta}(t,s) = \cos(\alpha t + \beta t)$. Знайти взаємну кореляційну функцію $R_{\eta\xi}(t,s)$.

14. Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $\xi(t) = t^2U$; $\eta(t) = (t^2 + 2)V$, де U – випадкова величина з $DU = 8$.

15. Відомі математичні сподівання $M\xi(t) = 2t + 1$; $M\eta(t) = t - 1$ і кореляційні функції $R_\xi(t,s) = ts$; $R_\eta(t,s) = e^{-4(s-t)^2}$ некорельованих випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію випадкового процесу $\xi(t) + \eta(t)$.

16. Задані кореляційні і взаємні кореляційні функції випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Знайти взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $U(t) = a\xi(t) + b\eta(t)$ і $V(t) = c\xi(t) + d\eta(t)$, де a, b, c, d – сталі дійсні числа.

17. Дані кореляційні і взаємно кореляційні функції випадкових процесів $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $U(t) = \xi(t) + \eta(t) + \zeta(t)$, якщо розглядувані процеси: а) попарно корельовані; б) попарно некорельовані.

18. Дано випадкові процеси $\xi(t) = U\cos t + V\sin t$, $\eta(t) = U\cos 3t + V\sin 3t + t^2$, де U і V – некорельовані випадкові величини, $MU = MV = 0$, $DU = DV = 5$. Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію $\rho_{\xi\eta}(t, s)$.

19. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t) = U_1\cos\omega_1 t + V_1 \sin\omega_1 t + U_2\cos\omega_2 t + V_2 \sin\omega_2 t$, де ω_1 і ω_2 – сталі числа; U_1, U_2, V_1, V_2 – попарно некорельовані випадкові величини, причому їх математичні сподівання рівні нулю, дисперсії величин U_1 і V_1 рівні D_1, дисперсії величин U_2 і V_2 рівні D_2.

20. Дано комплексний випадковий процес $\zeta(t) = 2t^3U + i\cos 2tV$, де U і V– дійсні випадкові величини з $MU = 1$; $MV = -3$; $\mathrm{cov}(U, V) = 0{,}5$. Знайти $M\zeta(t)$, $R_\zeta(t, s)$ і $D\zeta(t)$.

21. Дано комплексний випадковий процес $\zeta(t) = e^{5t}U - i(t^3 + 4t)V + 2t^2$, де $MU = 3$; $MV = 2$; $\mathrm{cov}(U, V) = -2$. Знайти $M\zeta(t)$, $R_\zeta(t, s)$ і $D\zeta(t)$.

VI. Елементи аналізу в L_2

6.1. Неперервність випадкового процесу

Означення. *Послідовність випадкових величин* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ *збігається в середньому квадратичному до випадкової величини* ξ, *якщо*

$$\lim_{n\to\infty} M(\xi_n - \xi)^2 = 0. \qquad (6.1)$$

Випадкова величина ξ *називається границею в середньому квадратичному (с. к.) послідовності випадкових величин* ξ_n *і це записують таким чином:*

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \xi_n = \xi. \qquad (6.2)$$

Із збіжності в середньому квадратичному випливає збіжність за ймовірністю, але обернене твердження невірне.

L_2 – теорія випадкових процесів вивчає лише ті процеси $\xi(t)$, для яких $M|\xi(t)|^2 < \infty$ при всіх t з області визначення. $\xi(t)$ розглядається як крива в гільбертовім просторі $L_2(\Omega, P)$.

Означення. *Випадковий процес* $\xi(t) \in L_2$, $t \in (a; b)$ *називається неперервним в середньому квадратичному в точці* t_0, *якщо*

$$\underset{|t-t_0|\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, \xi(t) = \xi(t_0), \qquad (6.3)$$

тобто $M|\xi(t) - \xi(t_0)|^2 \to 0$ *при* $t \to t_0$.

Якщо процес неперервний в с. к. в кожній точці інтервалу $(a; b)$, то його називають *неперервним в середньому квадратичному на* $(a; b)$.

Теорема. *Нехай* $\xi(t)$ *– випадковий процес в* $L_2(\Omega, P)$, *визначений на* $[a; b]$ *з середнім значенням* $m(t)$ *і кореляційною функцією* $R(t, s)$. *Процес* $\xi(t)$ *неперервний тоді і лише тоді, коли будуть неперервними* $m(t)$ *та* $R(t, s)$ *(остання як функція двох змінних).*

6.2. Диференціювання випадкових процесів

Означення. *Випадковий процес* $\xi(t)$ *називається диференційованим у середньому квадратичному в точці* t_0, *якщо існує така величина* $\xi'(t_0) \in \in L_2(\Omega, P)$, *що*

$$\lim_{\Delta t \to 0} M \left| \frac{1}{\Delta t} \big(\xi(t_0 + \Delta t) - \xi(t_0) \big) - \xi'(t_0) \right|^2 = 0. \qquad (6.4)$$

Похідною процесу $\xi(t)$ *називають випадкову величину* $\xi'(t)$ *(коли вона існує):*

$$\xi'(t) = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t}. \qquad (6.5)$$

Характеристики похідної випадкового процесу $\xi(t)$ визначаються формулами:

$$m_{\xi'}(t) = M\xi'(t) = \big(M\xi(t)\big)' = m'_{\xi}(t); \qquad (6.6)$$

$$R_{\xi'}(t,s) = \frac{\partial^2 R_{\xi}(t,s)}{\partial t \partial s}; \qquad (6.7)$$

$$D_{\xi'}(t) = \left.\frac{\partial^2 R_{\xi}(t,s)}{\partial t \partial s}\right|_{t=s}. \qquad (6.8)$$

Взаємні кореляційні функції випадкового процесу $\xi(t)$ і його похідної $\xi'(t)$ обчислюють за формулами:

$$R_{\xi'\xi}(t,s) = \frac{\partial R_{\xi}(t,s)}{\partial t}, \;\; R_{\xi\xi'}(t,s) = \frac{\partial R_{\xi}(t,s)}{\partial s}. \qquad (6.9)$$

Для диференційованості випадкового процесу (в с. к.) у всій області задання необхідна і достатня диференційованість в цій області його математичного сподівання $m_{\xi}(t)$ і його існування другої мішаної частинної похідної його кореляційної функції на прямій $t = s$.

Процес $\xi(t)$ називається *неперервно-диференційовним*, якщо $\xi'(t)$ неперервний в $L_2(\Omega, P)$.

Для неперервної диференційованості необхідно і достатньо існування неперервних похідних:

$$m'(t),\ \ \frac{\partial}{\partial t}R(t,s),\ \ \frac{\partial}{\partial s}R(t,s),\ \ \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R(t,s),\ \ \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R(t,s).$$

Для того, щоб процес $\xi(t)$ мав неперервну похідну порядку n, необхідно і достатньо, щоб існували похідні:

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}m(t),\qquad \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k\partial s^l}R(t,s),\qquad k\le n,\quad l\le n.$$

Всі похідні і неперервність розглядаються в $L_2(\Omega,P)$.

6.3. Інтегрування випадкових процесів

Розглянемо процес $\xi(t)$ на $[a;b]$. Він називається інтегрованим (с. к. інтегрованим), якщо існує границя в $L_2(\Omega,P)$ інтегральних сум

$$\sum_{k=0}^{n-1}\xi\,(\tau_k)\Delta t_k$$

де $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,\quad \tau_k\in[t_k;t_{k+1}],\quad \Delta t_k=t_{k+1}-t_k$. Границя існує при $\max\limits_k \Delta t_k\to 0$. Ця границя називається інтегралом, позначається

$$\int_a^b \xi(t)dt.$$

Теорема. *Процес $\xi(t)$ (с. к.) інтегровний тоді і тільки тоді, коли існують інтеграли Рімана:*

$$\int_a^b m(t)dt,\ \ \int_a^b\int_a^b R(t,s)dtds.$$

Якщо процес задано на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$, то визначимо невласний інтеграл:

$$\int_a^{+\infty}\xi(t)dt=\underset{b\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_a^b\xi(t)dt\ . \tag{6.10}$$

Для його існування досить, щоб функція $R(t,s)$ була інтегрованою по Ріману на $[a;b]\times[a;b], b>a$ і існував невласний інтеграл:

$$\int_a^{\infty}\int_a^{\infty} R(t,s)dtds.$$

Аналогічно визначається інтеграл від $-\infty$ до $+\infty$.

Розглянемо невизначений інтеграл:

$$\eta(t) = \int_a^t \xi(\tau)\, d\tau, \quad \tau \in [a;b].$$

Теорема. *В кожній точці* t, *в якій функція* $R(t,t)$ *неперервна, процес* $\eta(t)$ *диференційований в с. к. і* $\eta'(t) = \xi(t)$.

Характеристики інтегралу випадкового процесу із змінною верхньою межею $\eta(t) = \int_a^t \xi(\tau)\, d\tau$:

$$m_\eta(t) = \int_a^t m_\xi(\tau)d\tau\,; \tag{6.11}$$

$$R_\eta(t,s) = \int_a^t\int_a^s R_\xi(\tau,\tau')d\tau' d\tau; \tag{6.12}$$

$$D_\eta(t) = \int_a^t\int_a^t R_\xi(\tau,\tau')d\tau' d\tau. \tag{6.13}$$

Задачі

1. Дано математичне сподівання $m_\xi(t) = t^2 + 4$ випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти математичне сподівання випадкового процесу $\eta(t) = t\xi'(t) + $ $+t^2$.

2. Дано випадковий процес $\xi(t) = Ue^{3t}\cos 2t$, де $U-$ випадкова величина, $MU = 4$, $DU = 1$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію процесу $\xi'(t)$.

3. В умовах задач 5.8 і 5.9 знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію процесу $\xi'(t)$.

4. Кореляційна функція випадкового процесу $\xi(t)$ $R_{\xi}(t,s) = 3^{-0,5(s-t)^2}$, а $m_{\xi}(t) = 5\sin t$. Знайти: математичне сподівання, кореляційну функцію процесу $\xi'(t)$.

5. Кореляційна функція $\xi(t)$ дорівнює $R_{\xi}(t,s) =$ $= (D\cos\omega(s-t))/(t+s)$. Знайти кореляційну функцію процесу $\xi'(t)$.

6. На площині рухається випадкова точка M так, що її полярний кут φ є випадковою функцією часу з кореляційною функцією $R_{\varphi}(t,s) = a^2 e^{-b^2(s-t)^2}$. Знайти дисперсію кутової швидкості ω полярного радіуса-вектора M.

Вказівка: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

7. Дано випадковий процес $\xi(t) = 1 + t + Ut + Vt^2 + Wt^3;$ $DU = 2;\ DV = 1; DW$. Випадкові величини U, V, W попарно некорельовані і $MU = MV = MW = 0$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію процесу $\xi'(t)$.

8. Дано кореляційні функції: а) $R_{\xi}(t,s) = e^{-(s-t)^2}$; б) $R_{\xi}(t,s) = tse^{t+s}$. Знайти взаємні кореляційні функції випадкового процесу $\xi(t)$ і його похідної.

9. Дано взаємну кореляційну функцію $R_{\xi\xi'}(t,s) = t(s+1)e^{t+s}$ випадкового процесу $\xi(t)$ і його похідної. Знайти кореляційну функцію похідної.

10. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $\eta(t) = \xi(t) +$ $+\xi'(t)$; якщо $R_{\xi}(t,s) = 5e^{-(s-t)^2}$.

11. Довести:

$$R_{\xi''\xi}(t,s) = \frac{\partial^2 R_{\xi}(t,s)}{\partial t^2}, \quad R_{\xi\xi''}(t,s) = \frac{\partial^2 R_{\xi}(t,s)}{\partial s^2}.$$

12. Дано кореляційну функцію $R_{\xi}(t,s) = e^{-(s-t)^2}$. Знайти взаємні кореляційні функції випадкового процесу $\xi(t)$ і його другої похідної.

13. Дано кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти взаємну кореляційну функцію $R_{\eta\chi}$ випадкових процесів $\eta(t) = a\xi(t) + $ $+b\xi'(t)$ і $\chi(t) = c\xi'(t) + d\xi(t)$, де a, b, c, d – сталі дійсні числа.

14. Знайти математичне сподівання інтеграла $\eta(t) = \int_a^t \xi(\tau)d\tau$, знаючи математичне сподівання випадкового процесу $\xi(t)$:

а) $m_\xi = \cos t$;

б) $m_\xi = 4\cos^2 t$;

в) $m_\xi = t - \sin 2t$.

15. Дано випадковий процес $\xi(t) = U\cos^2 t$, де U – випадкова величина, $MU = 2$. Знайти математичне сподівання випадкового процесу

$$\eta(t) = (t^2 + 1)\int_0^t \xi(\tau)d\tau.$$

16. Дано випадковий процес $\xi(t) = 1 + Ut + Vt^2$. $DU = 3; DV = 1;$ $MU = MV = 0$; $M(UV) = 0$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію процесу $\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau$.

17. Дано кореляційну функцію $R_\xi(t,s) = \sin\omega t \cdot \sin\omega s$ випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти дисперсію інтеграла $\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau$.

18. Знайти дисперсію інтеграла $\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau$, знаючи кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t)$:

а) $R_\xi(t,s) = 2t^2s^2 + 3ts;$

б) $R_\xi(t,s) = tse^{t+s}$;

в) $R_\xi(t,s) = \dfrac{1}{1 + (s-t)^2}$;

г) $R_\xi(t,s) = e^{3(t+s)}\cos 2t \cdot \cos 2s$.

19. Випадковий процес $\xi(t)$ має характеристики: $m_\xi = \sin^2 t$, $R_\xi(t,s) = \cos\omega t \cdot \cos\omega s$. Знайти:

а) математичне сподівання;

б) кореляційну функцію;

в) дисперсію випадкового процесу $\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau) d\tau$.

20. Дано кореляційну функцію $R_\xi(t,s) = e^{-(s+t)}$. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau) d\tau$.

21. Задано випадковий процес $\xi(t) = U \sin 3t$, де U – випадкова величина, причому $MU = 2, DU = 1$. Знайти:

а) математичне сподівання;

б) кореляційну функцію;

в) дисперсію випадкового процесу $\eta(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \xi(\tau) d\tau$.

22. Знайти взаємні кореляційні функції випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau) d\tau$, якщо відома кореляційна функція $R_\xi(t,s)$ випадкового процесу $\xi(t)$:

а) $R_\xi(t,s) = 2ts + t^3 s^3$;

б) $R_\xi(t,s) = \sin 2t \cdot \sin 2s$;

в) $R_\xi(t,s) = tse^{t+s}$.

VII. СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

7.1. Означення. Властивості кореляційної функції

Означення. *Комплекснозначний процес* $\xi(t)$ *на* $R(R+, Z, Z+)$ *називається стаціонарним в широкому розумінні, якщо* $M\xi(t) = \text{const}$, $R_\xi(t,s) = R(s-t)$.

Найпростішим прикладом стаціонарного процесу є випадкове гармонійне коливання (випадкова амплітуда). Цей стаціонарний процес має вигляд

$$\xi(t) = \zeta e^{i\lambda t},$$

де $M\zeta = 0,\ M|\zeta|^2 > 0$. Тоді

$$M\xi(t) = 0,\ \ R_\xi(t,s) = M\xi(t) \cdot \overline{\xi(s)} = M|\zeta|^2 e^{i\lambda(t-s)} = R(t-s).$$

Із стаціонарності у вузькому розумінні випливає стаціонарність в широкому розумінні, але не навпаки. Для стаціонарних і нормальних процесів ці поняття співпадають.

Властивості кореляційної функції стаціонарного в широкому розумінні випадкового процесу:

1°. $R_\xi(-\tau) = R_\xi(\tau)$, де $\tau = s - t$.

2°. $D\xi(t) = R_\xi(0)$,

3°. $|R_\xi(\tau)| \leq R_\xi(0)$.

Нормованою кореляційною функцією стаціонарного випадкового процесу називається невипадкова функція

$$\rho_\xi(\tau) = \frac{R_\xi(\tau)}{R_\xi(0)}, \qquad (7.1)$$

З властивості 3° маємо:

$$|\rho_\xi(\tau)| \leq 1. \qquad (7.2)$$

Стаціонарно зв'язаними називають два випадкові процеси $\xi(t)$ і $\eta(t)$, взаємна кореляційна функція яких залежить лише від різниці аргументів

$$R_{\xi\eta}(t, s) = R_{\xi\eta}(s - t).$$

Два стаціонарні в широкому розумінні випадкові процеси не обов'язково стаціонарно зв'язані, але стаціонарно зв'язаними можуть бути нестаціонарні в широкому розумінні випадкові процеси. Стаціонарні і нормальні випадкові процеси є стаціонарно зв'язані .

Для неперервності стаціонарного в широкому розумінні процесу $\xi(t)$ необхідна і достатня неперервність його кореляційної функції $R_\xi(\tau)$ в точці $\tau = 0$.

Для диференційованості стаціонарного процесу $\xi(t)$ необхідно і достатньо існування $R_{\xi''}(0)$ в точці $\tau = 0$, при цьому:

$$M\xi'(t) \equiv 0; \;\; R_{\xi'}(\tau) = -R''_\xi(\tau)\,. \qquad (7.3)$$

Взаємні кореляційні функції стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ і його похідних знаходять за формулами:

$$R_{\xi\xi'}(\tau) = R'_\xi(\tau), \quad R_{\xi'\xi}(\tau) = -R'_\xi(\tau), \tag{7.4}$$

$$R_{\xi\xi''}(\tau) = R_{\xi''\xi}(\tau) = R''_\xi(\tau). \tag{7.5}$$

7.2. Спектральні зображення стаціонарних процесів

Стаціонарним процесом з дискретним спектром є всякий процес, який представляється у вигляді

$$\xi(t) = m_\xi + \sum_k U_k \cos\omega_k t + V_k \sin\omega_k t, \tag{7.6}$$

де сума може містити скінченну чи зчисленну кількість членів, ω_k – додатні сталі, U_k і V_k – випадкові величини з умовами:

$$MU_k = MV_k = 0, \quad DU_k = DV_k = \sigma_k^2 > 0, \quad k = 1,2,\dots;$$

$$M(U_k \cdot U_{j)} = M\big(V_k \cdot V_j\big) = 0 \text{ при } k \neq j, \quad M(U_k \cdot V_j) = 0.$$

Кореляційна функція такого процесу є сума тригонометричного ряду з коефіцієнтами $DU_k = DV_k = \sigma_k^2$:

$$R_\xi(\tau) = \sum_k \sigma_k^2 \cos\omega_k\tau. \tag{7.7}$$

Дисперсія $\xi(t)$ дорівнює

$$D\xi(t) = \sum_k \sigma_k^2 . \tag{7.8}$$

Комплексним випадковим процесом з дискретним спектром є процес виду

$$\xi(t) = m_\xi + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k e^{i\omega_k\tau}, \tag{7.9}$$

де ω_k – різні дійсні числа, η_k – випадкові величини з умовами:

$$M\eta_k = 0, \qquad D\,\eta_k = M|\,\eta_k|^2 = \sigma_k^2, \qquad M\,\eta_k\,\overline{\eta_j} = 0, \qquad k \neq j.$$

В цьому випадку:

$$R_\xi(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_k^2\, e^{-i\omega_k\tau}, \tag{7.10}$$

$$D\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_k^2 \ . \tag{7.11}$$

Стаціонарні процеси, кореляційні функції яких не представляються у вигляді (7.7) чи (7.10) на всій осі τ, називаються *процесами з неперервним спектром.* Для них кореляційні функції представляються у вигляді інтеграла Фур'є

$$R_\xi(\tau) = 2\int_0^\infty s(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega, \tag{7.12}$$

де $s(\omega)$ – невід'ємна функція. Функція $s(\omega)$ називається *спектральною щільністю* процесу $\xi(t)$. Спектральну щільність можна виразити через кореляційну функцію оберненим перетворенням Фур'є:

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R_\xi(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \tag{7.13}$$

В комплексній формі ці співвідношення мають вигляд

$$R_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega; \quad s(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{7.14}$$

Взаємно обернені перетворення Фур'є (7.14) називають *формулами Вінера-Хінчина.*

$$D\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\omega)\ d\omega \tag{7.15}$$

Якщо $\eta(t) = \xi'(t)$, то $s_\eta(\omega) = \omega^2 \cdot s_\xi(\omega)$.

Нехай $\xi(t)$ і $\eta(t)$ – стаціонарні і стаціонарно зв'язані випадкові процеси з неперервним спектром. Справедливі формули:

$$R_{\xi\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi\eta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \qquad S_{\xi\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{7.16}$$

Функція $S_{\xi\eta}(\omega)$ називається *взаємною спектральною щільністю* процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$.

7.3. Ергодична властивість стаціонарних в широкому розумінні випадкових процесів.

Означення. *Випадковий процес* $\xi(t)$ *називається ергодичним відносно математичного сподівання, якщо*

1) *математичне сподівання стале:* $m_\xi(t) = m_\xi = \mathrm{const}$,
2) *має місце границя*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \xi\,(t)dt = m_\xi. \tag{7.17}$$

Необхідною і достатньою умовою ергодичності процесу $\xi(t)$ є рівність:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_\xi\,(t,s)dtds = 0. \tag{7.18}$$

Достатня умова $R_\xi(t,s) \to 0$ при $|s-t| \to \infty$

Якщо $\xi(t)$ стаціонарний в широкому розумінні випадковий процес, то необхідною і достатньою умовою його ергодичності відносно математичного сподівання є

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})\,R_\xi(\tau)d\tau = 0. \tag{7.19}$$

Достатньою умовою є

$$\lim_{\tau\to\infty} R_\xi\,(\tau) = 0. \tag{7.20}$$

Для ергодичного стаціонарного в ш.р. випадкового процесу $\xi(t)$ математичне сподівання можна як завгодно точно визначити по одній реалізації процесу $\xi^\circ(t)$. За оцінку математичного сподівання беруть

$$m^*(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \xi^\circ(t)\,dt. \tag{7.21}$$

А за оцінку кореляційної функції $R(\tau)$:

$$R^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \xi_1^\circ(t)\cdot\xi_1^\circ(t+\tau)dt, \tag{7.22}$$

Тоді

$$D^*\xi(t) = \frac{1}{T}\int_0^T (\overset{\circ}{\xi}_1(t))^2 dt\,, \qquad (7.23)$$

де $\xi_1(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$.

На практиці інтеграли (7.21)–(7.23) обчислюють наближено.

Задачі

1. Чи стаціонарний випадковий процес $\xi(t) = U\cos 2t$, де U – випадкова величина?

2. Дано випадковий процес $\xi(t) = \sin(t+\varphi)$, де φ – випадкова величина, розподілена рівномірно в інтервалі (0;2π). Довести, що $\xi(t)$ – стаціонарний процес.

3. Чи стаціонарний випадковий процес $\xi(t) = U\sin 2t + V\cos 2t$, де U і V – некорельовані випадкові величини, причому $MU = MV = 0, DU = DV = D.$

4. Дано випадковий процес $\xi(t) = t^2 + U\sin t\, V\cos t$, де U і V – випадкові величини, причому $MU = MV = 0, M(U\cdot V) = 0$; $DU = DV = 10$. Довести, що:

а) $\xi(t) -$ нестаціонарний процес;

б) $\xi_1(t) = \xi(t) - M\xi(t) -$ стаціонарний процес.

5. Нехай $\varphi -$ випадкова величина зі щільністю $p_\varphi(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $\xi(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ $-$ випадковий процес, a і ω – додатні сталі. Чи стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$?

6. Нехай $\varphi -$ випадкова величина, рівномірно розподілена на $[0; 2\pi]$, a і ω – додатні сталі. Довести, що випадковий процес $\xi(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ стаціонарний (в ш. р.).

7. Довести, що процес в задачі 6 ергодичний відносно свого математичного сподівання.

8. Дано випадковий процес $\xi(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$, де a і ω – додатні сталі, $\varphi -$ нормальна величина з $M\varphi = 0$, $D\varphi = 1$. Чи буде $\xi(t)$ стаціонарним процесом?

9. Знайти нормовану кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t)$:

а) $R_\xi(\tau) = 3e^{-\tau^2}$;

б) $R_\xi(\tau) = 5e^{-|\tau|} \cdot (1 + 2|\tau|)$.

10. Задано два стаціонарні процеси $\xi(t) = \cos(t + \varphi)$ і $\eta(t) = \sin(t + \varphi)$, де $\varphi -$ випадкова величина, розподілена рівномірно в інтервалі $(0;2\pi)$. Довести, що $\xi(t)$ і $\eta(t)$ стаціонарно зв'язані.

11. Дано випадкові процеси $\xi(t) = V\cos 3t - U\sin 3t$, $\eta(t) = U\cos 3t + {}$ $+V\sin 3t$, де U і V – некорельовані випадкові величини, причому їх математичні сподівання рівні нулю, а дисперсії рівні 5. Довести що дані процеси стаціонарні і стаціонарно зв'язані.

12. Дано випадкові процеси:

а) $\xi(t) = U\sin t + V\cos t$, $\eta(t) = W\sin t + V\cos t$;

б) $\xi(t) = U\cos t + V\cos t$, $\eta(t) = U\cos 2t + V\sin 2t$;

де U, V і W – некорельовані випадкові величини з математичними сподіваннями, рівними нулю, і дисперсіями, рівними 6. Чи стаціонарно зв'язані дані випадкові процеси?

13. Нехай $\xi(t) -$ стаціонарний і нормальний процес з математичним сподіванням m і кореляційною функцією $R_\xi(\tau)$. Написати вираз одновимірної і двовимірної щільності цього процесу.

14. Чи будуть неперервними і диференційованими стаціонарні процеси, які мають кореляційні функції

1) $De^{-a|\tau|}\cos b\tau$;

2) $De^{-a|\tau|}(\cos b\tau + \frac{a}{b}\sin b|\tau|)$?

15. Дано кореляційну функцію $R_\xi(\tau) = 2e^{-0,5\tau^2}$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти кореляційну функцію і дисперсію похідної $\xi'(t)$.

16. Довести, що якщо відома кореляційна функція $R_\xi(\tau)$ диференційованого стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, то кореляційна функція його похідної то кореляційна функція його похідної $R_{\xi'}(\tau) =$ $= -R''_\xi(\tau)$.

17. Дано кореляційну функцію $R_\xi = 5e^{-3|\tau|}(1 + 3|\tau|)$. Знайти кореляційну функцію $\xi'(t)$. Знайти відношення дисперсій $\xi(t)$ і $\xi'(t)$.

18. Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ $R_\xi(\tau) = e^{-2|\tau|}(\mathrm{ch}\tau + 2\mathrm{sh}\tau)$. Знайти кореляційну функцію $\xi'(t)$ і її найбільше значення.

19. Відома кореляційна функція $R_\xi(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Довести $R_{\xi''}(\tau) = R_\xi^{IV}(\tau)$.

20. Стаціонарний і нормальний процес $\xi(t)$ має математичне сподівання $m_\xi = 5$ і кореляційну функцію $R_\xi(\tau) = e^{-2|\tau|}(\cos 2\tau + \sin 2|\tau|)$. Знайти

а) одновимірну щільність процесу $\eta(t) = \xi'(t)$;

б) ймовірність того, що $|\eta(t)| < \sqrt{3}$.

21. Дано математичне сподівання $m_\xi = 12$ і кореляційна функція $R_\xi(\tau) = 4e^{-|\tau|}(\cos 2\tau + 0,5\sin 2|\tau|)$ нормального стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти ймовірність, що $\eta(t) = \xi'(t)$ прийме значення, більші, ніж $\sqrt{5}$.

22. Дано математичне сподівання $m_\xi = 6$ і кореляційна функція $R_\xi = 10e^{-|\tau|}\left(\cos 3\tau + \frac{1}{3}\sin 3|\tau|\right)$ нормального стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти щільність похідної $\eta(t) = \xi'(t)$.

23. Довести, що для диференційовного стаціонарного випадкового процесу:

а) $R_{\xi\xi'}(\tau) = R'_{\xi}(\tau)$;

б) $R_{\xi'\xi} = -R'_{\xi}(\tau)$.

24. Знайти взаємні кореляційні функції випадкового процесу $\xi(t)$ і його похідної, якщо:

а) $R_{\xi}(\tau) = 9e^{-3|\tau|}(1 + 3|\tau|)$;

б) $R_{\xi}(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}$.

25. Диференційований стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ має кореляційну функцію $R_{\xi}(\tau)$ і математичне сподівання m_{ξ},

$\eta(t) = \xi(t) + \xi'(t)$.

а) Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію $\eta(t)$;

б) те ж для процесу з $R_{\xi}(\tau) = 5\mathrm{e}^{-3\tau^2}$ і m_{ξ}=4.

26. Відома кореляційна функція $R_{\xi}(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти взаємні кореляційні функції випадкового процесу $\xi(t)$ і його другої похідної.

27. Дана кореляційна функція $R_{\xi}(\tau) = 5\mathrm{e}^{-2|\tau|}(1 + 2|\tau|) + \frac{4}{3}\tau^2$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти $R_{\xi\xi''}(\tau)$ і $R_{\xi''\xi}(\tau)$.

28. Двічі диференційований стаціонарний процес має кореляційну функцію $R_{\xi}(\tau)$. Знайти кореляційну функцію процесу $\eta(t) = \xi(t) + \xi''(t)$.

29. $\xi(t)$ – стаціонарний процес з кореляційною функцією $R_{\xi}(\tau)$. Знайти кореляційну функцію і дисперсію випадкового процесу $\eta(t) = a\xi(t) +$ $+b\xi'(t) + c\xi''(t)$, де a, b і с – дійсні сталі.

30. Відома кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Знайти взаємну кореляційну функцію першої і другої похідних.

31. Стаціонарний випадковий процес з дискретним спектром заданий своїм спектральним розкладом $\xi(t) = m_{\xi}$+$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos\omega_k t + V_k \sin\omega_k t$, де

ω_k – дійсні сталі, U_k і V_k – випадкові величини з умовами $MU_k = MV_k = 0$, $MU_k^2 = MV_k^2 = \sigma_k^2$, $M(U_k V_j) = 0$, $M(U_k U_j) = 0$, $M(V_k V_j) = 0$ при $k \neq j$. В якому випадку $\xi(t)$ можна почленно диференціювати?

32. Знайти спектральну щільність дійсного стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, знаючи його кореляційну функцію $R_\xi(\tau) = 1 - \frac{1}{3}|\tau|$ при $|\tau| \leq 3$; кореляційна функція рівна нулю при $|\tau| > 3$.

33. Знайти спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, якщо $R_\xi(\tau) = 5e^{-2|\tau|}$.

34. Стаціонарний процес $\xi(t)$ має спектральну щільність $R_\xi(\tau) = = \sigma^2 \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$. Знайти його спектральну щільність.

35. Знайти спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу, знаючи його кореляційну функцію $R_\xi(\tau) = 5e^{-2|\tau|} cos\tau$.

36. Знайти дисперсію стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, якщо $S_\xi(\omega) = \frac{10}{\pi(1+\omega^2)}$.

37. Довести, що $S_{\xi'}(\omega) = \omega^2 S_\xi(\omega)$.

38. Задано спектральну щільність $S_\xi(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2+a^2)^2}$. Знайти дисперсію процесу ξ'(t).

39. Знайти спектральну щільність стаціонарного процесу, якщо $R_\xi(\tau) = 10e^{-4\tau^2}$.

40. Чи може кореляційна функція $R_\xi(\tau) = e^{-|\tau|}(1 + |\tau| + \tau^2)$ бути кореляційною функцією щільність стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$?

41. а) Довести, що функція $R_\xi(\tau)$=5$\mathrm{e}^{-2|\tau|^2}$ може бути кореляційною функцією стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$.

б) Довести методом від супротивного,що не існує такого стаціонарного випадкового процесу, кореляційна функція якого зберігає стале значення в інтервалі $(-\tau_1, \tau_1), \tau_1 > 0$ і яка дорівнює нулю поза цим інтервалом.

42. Знайти кореляційну функцію дійсного стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, знаючи його спектральну щільність $S_\xi(\omega) = S_0$ в інтервалі $-\omega_0 \le \omega \le \omega_0$; поза цим інтервалом $S_\xi(\omega) = 0$.

43. Знайти кореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу, знаючи його спектральну щільність: $S_\xi(\omega) = S_0$ в інтервалі $(-2\omega_0, -\omega_0)$ і $(\omega_0, 2\omega_0)$; поза цими інтервалами $S_\xi(\omega) = 0$.

44. Знайти кореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу, знаючи його спектральну щільність $S_\xi(\omega) = \frac{2}{\pi(4+\omega^2)}$.

45. Стаціонарний процес $\xi(t)$ має кореляційну функцію $R_\xi(\tau) = = Ae^{-\alpha^2\tau^2}$. Знайти взаємно спектральну щільність $S_{\xi\eta}(\omega)$, якщо $\eta(t) = \xi'(t)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. − М. : Академия, 2003. – 488 с. – ISBN 5-7695-1054-4.

2. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5-06-005820-8.

3. Волощенко, А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладов. – К. : КНЕУ, 2005. – 256 с. – ISBN 966–574–459–3.

4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 1998. – 400 с. – ISBN 5-06-003465-8.

5. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 1998. – 479 с. – ISBN 5-06-003464-Х.

6. Жлуктенко, В. І. Стохастичні моделі в економіці: монографія / В.І.Жлуктенко, А. В.Бєгун. – К. : КНЕУ, 2005. – 352 с. – ISBN 966-574-744-4.

7. Жлуктенко, В. І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології: навч. посіб. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С.С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2002. – 226 с. – ISBN 966-574-346-5.

8. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2005. – 351 с. – ISBN 966-574-855-6.

9. Сеньо, П. С. Випадкові процеси: підручник / С. П. Сеньо; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – Львів : Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с. – ISBN 966-96414-7-0.

Навчально-методичне видання

Сорока Лілія Іванівна, **Кальчук** Інна Володимирівна

Випадкові процеси

Методичні рекомендації

Друкується в авторській редакції