

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**Фізико-математичний факультет**  
**Кафедра математики та методики її навчання**

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Д. Є. Бобилєв

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 р.

Реєстраційний № \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 р.

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З  
ЕЛЕМЕНТАМИ КВАДРАТА «ТАНГРАМ»**

Кваліфікаційна робота  
студентки групи МІм-15  
ступінь вищої освіти магістр  
спеціальності: 014.04  
середня освіта (математика)

Комарова Аліна Андріївна

Керівник:

кандидат техн. наук, професор

Корольський Володимир Вікторович

Оцінка: \_\_\_\_\_

Національна шкала \_\_\_\_\_

Шкала ECTS \_\_\_\_ Кількість балів \_\_\_\_

Голова ЕК \_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК \_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис) (прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис) (прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис) (прізвище, ініціали)

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ.....	6
1.1. Історичні відомості про числові ряди.....	6
1.2. Види числових рядів.....	13
1.3. Методи дослідження числових рядів на збіжність.....	18
Висновки до розділу 1.....	31
РОЗДІЛ 2. ПОБУДОВА ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТА ТАНГРАМ.....	32
2.1. Генерація числових рядів за допомогою танграмів та описаних кіл.....	33
2.2. Генерація числових рядів за допомогою танграмів та їх паралелограмів.....	53
2.3. Генерація числових рядів за допомогою танграмів та вписаних кіл.....	72
Висновки до розділу 2.....	91
ВИСНОВКИ.....	92
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	94
ДОДАТОК.....	99

## ВСТУП

Теорія рядів є невід'ємною частиною курсу математичного аналізу, оскільки широко використовується в теоретичних дослідженнях та є незамінною при розв'язуванні цілої низки задач прикладного характеру. Числові ряди дають шляхи розвитку таким галузям як архітектура, економіка, інженерія, також таким наукам як фізика, хімія, оскільки надають можливість за допомогою наближених обчислень прийти до точних результатів.

В математиці числові ряди також використовуються досить широко. Зокрема, при обчисленні значень функцій та інтегралів, розв'язуванні трансцендентних та алгебраїчних рівнянь, дослідженні різноманітних технічних проблем, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь.

Протягом історії питанням вивчення теорії рядів займалися такі вчені, як Жан Лерон д'Аламбер, Огюстен-Луї Коші, Леонард Ейлер, Даніель Бернуллі, Йозеф Людвіг Раабе, Ернст Едуард Куммер, П'єтро Менгорі, Готфрід Вільгельм Лейбніц, та інші [1, 29, 30].

Проаналізувавши значну кількість вітчизняної та зарубіжної літератури, варто відмітити, що більшість посібників та підручників пропонують студентам значний об'єм теоретичної бази вивчення теорії рядів, низку стандартних та нестандартних задач на застосування знань з методичними вказівками та систему задач для самостійного опрацювання [5,11]. Але майже відсутня візуалізація побудови числових рядів.

Проте в останній час опубліковано роботи, спрямовані на побудову числових рядів за допомогою елементів різних геометричних об'єктів [26,27,28]. В такому ж напрямку розроблена і ця робота.

Тому тема «Побудова і дослідження числових рядів, пов'язаних з елементами квадрата “танграм”» є актуальною.

**Мета роботи:** побудова і дослідження числових рядів, члени яких пов'язані з параметрами елементів множини вкладених квадратів «танграм».

**Об'єкт дослідження:** числові знакододатні ряди.

**Предмет дослідження:** числові ряди, члени яких пов'язані з числовими параметрами елементів послідовності вкладених квадратів «танграм».

**Завдання роботи:**

- 1) провести аналіз положень теорії числових знакододатних рядів;
- 2) обґрунтувати можливість реалізації дидактичного принципу наочності при вивченні розділу математичного аналізу «Числові ряди»;
- 3) побудувати систему числових рядів за допомогою параметрів елементів послідовності вкладених квадратів «танграм»;
- 4) дослідити одержані числові ряди на збіжність.

**Методи дослідження:**

- аналіз науково-методичних джерел, пов'язаних з розділом математичного аналізу «Числові ряди»;
- евристичний пошук алгоритмів, за якими змінюються величини певних геометричних об'єктів, що є елементами квадрата «Танграм»;
- чисельні експерименти, що пов'язані з обчисленням частинних сум рядів з метою дослідження залежності їх значень від кількості членів ряду;
- евристичні дослідження збіжності числових рядів за допомогою геометричної інтерпретації його членів;
- порівняння графіків залежності значень частинних сум від меншої і більшої кількості доданків, що побудовані для геометричної інтерпретації поняття «збіжності числового ряду».

**Наукова новизна:** досліджені та обґрунтовані можливості зв'язку між параметрами елементів геометричних об'єктів з елементами числових

знакододатних рядів. Запропоновано систему числових рядів та їх дослідження за допомогою реалізації дидактичного принципу наочності.

### **Практичне значення роботи:**

1. Побудована низка числових рядів і на основі них представлена система практичних завдань для підвищення ефективності і зацікавленості вивчення розділу «Числові ряди» в рамках курсу «Математичний аналіз».

2. Практична частина роботи може бути фрагментарно запропонована для складання шкільних олімпіадних задач з математики.

3. Теоретична частина і алгоритм побудови числових рядів з елементів квадрата «танграм» можуть бути використані при написанні учнем старших класів науково-дослідницької роботи в Малу академію наук.

### **Апробація дослідження:**

1) Опубліковані матеріали в «Збірнику наукових праць здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету» (приурочено до 90-річчя КДПУ) з назвою «Побудова числових рядів за допомогою квадрата танграм» м. Кривий Ріг.

2) Отримана система числових рядів була використана на практичних заняттях групи МІ-19 з курсу «Математичний аналіз» в розділі «Числові знакододатні ряди».

3) Розроблені і запропоновані методичні рекомендації для застосування одержаної системи знакододатних рядів на практичних заняттях при вивченні розділу «Числові ряди».

### **Структура магістерської роботи:**

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містять 43 найменування, та додатків. Основний текст викладено на 93 сторінках. Повний обсяг роботи 100 сторінок.

## РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

### 1.1. Історичні відомості про числові ряди

Історія математики завжди цікавила дослідників. Існує велика кількість робіт, які розглядають її в цілому з точки зору наукознавства, але чимало праць присвячено і окремим її розділам. Теорія нескінчених числових рядів є дуже цікавою частиною математики, яка має численні практичні застосування. Саме тому треба знати історію її розвитку [29, с. 117].

Математична нескінченність, як стверджують дослідники історії розвитку математики, з'явилася в давньогрецькій або елінській культурі в VIII – VI ст. до н.е. як принципово новий елемент мислення. Відомо, що ще з часів Стародавнього Єгипту існували арифметичні та геометричні прогресії. Зокрема, єгиптяни вже використовували дроби, а отже їх послідовність складала числовий ряд [29, с. 117].

Так в Стародавньому Єгипті вміли по-своєму виражати частку  $m:n$ . В цьому їм допомагали аліквотні дроби – долі одиниці виду  $1/n$ , які записувались у вигляді  $\bar{n}$  (– така риска означала «1 поділити на число  $n$ »). Також дроби  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$  позначались спеціальними ієрогліфами [43, с. 25].

Нескінченні послідовності використовували і в грецькій математиці, хоча вони намагалися представляти їх, як скінченні суми  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ , замість нескінчених  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  [29, с. 117].

Для тренувань учнів в Єгипті використовували задачі розважального характеру. Найбільш цікава з них – задача на геометричну прогресію, яку називали «задача-мандрівниця». В ній мова йде про 7 кішок в кожній з 7 домівок, кожна з яких з'їла по 7 мишей, кожна з яких в свою чергу з'їла по 7 колосків ячменю, в той час як кожен колос міг дати 7 мір хліба. В подальшому ця

жартівлива задача зустрічається в різні епохи в різних народах з невеликими модифікаціями [43, с. 23].

Встановити, коли вперше ряди виникли в математиці, вочевидь, неможливо. Проте вже вавилонські математики вміли сумувати геометричну та арифметичну прогресії, а також знали формули для обчислення деяких кінцевих сум, наприклад [1, с. 163]:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Наступні відомості про розвиток числових рядів надходять нам с Китаю.

Математики Китаю займались складанням так званих магічних квадратів, тобто квадратів з таким розподіленням  $n^2$  послідовних натуральних чисел  $1, 2, 3, \dots, n^2$  в квадратній таблиці, при якому суми чисел в кожному стовпчику і в кожному рядочку однакові, а, отже, дорівнюють  $\frac{n}{2}(n^2 + 1)$ . Зокрема це питання розглядається в працях Яна Хуея (1275 р.) [43, с. 174].

Питанням сумування рядів займались китайські математики, можливо, під впливом індійців. Шень Ко (XI ст.) в «Рассуждениях Мэн-Си» підрахував кількість предметів, які утворюють  $n$ -шарову ступінчасту усічену піраміду, в якій сторони прямокутних шарів послідовно збільшуються на одиницю. Передумовами розв'язання цієї задачі повинні були стати правила сумування арифметичної прогресії і ряда натуральних квадратів. В XIII ст. Чжу Ши-цзе сумує ряди, які виникли при множенні натуральних, трикутних та квадратних чисел з членами зростаючої або спадної прогресій [43, с. 175].

В творі, написаним китайським математиком в 1303 р., зустрічається наступна таблиця чисел (рис 1.1.):

									1										
								1		1									
							1	2		1									
						1	3		3		1								
					1	4		6		4		1							
				1	5		10		10		5		1						
			1	6		15		20		15		6		1					
		1	7		21		35		35		21		7		1				
1	8		28		56		70		56		28		8		1				

Рис. 1.1. Арифметичний трикутник

Дана таблиця містить біноміальні коефіцієнти до 8-ї степені бінома включно. Цей факт був підтверджений формулою Ньютона, яку він знайшов близько 1665 року:

$$\begin{aligned}
 (1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1} \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdot x^3 + \\
 &+ \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{k!} \cdot x^k + \\
 &+ \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)(m-k)}{k!} \cdot x^{k+1} + \dots + \\
 &+ \frac{m(m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2}{(m-1)!} \cdot x^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{m!} \cdot x^m \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

$$A_k = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+2)(m-k+1)}{k!} \quad (1.2)$$

Ньютон знайшов співвідношення між коефіцієнтами двох рядів:  $A_{k+1} = A_k \cdot \frac{m-n}{k+1}$ , де  $m$  – степінь многочлена,  $k$  – індекс многочлена. Далі таблиця Чжу Ши-цзе не продовжується, але можна спостерігати певну закономірність, яка дозволить записувати нові рядки: «Сума довільних двох чисел, які стоять поряд



в одному і тому ж рядку, дорівнює числу яке стоїть в наступному рядку між ними». Наприклад  $1 + 2 = 3$ ,  $2 + 1 = 3$ ,  $1 + 3 = 4$ ,  $3 + 3 = 6$  і т. д. Формули (1.1.) і (1.2.) не були відомі в епоху Чжу Ши-цзе, а закономірність між числами спостерігалась лише шляхом спостереження. Трикутна таблиця називається арифметичним трикутником [34, с. 21].

Чималий внесок в розвиток теорії рядів внесли індійські математики. Сумування числових рядів цікавило багатьох вчених в Індії. Зокрема, Аріабхата наводив правила сумування рядів трикутних чисел, натуральних квадратів і кубів, а Магавира – правила сумування геометричної прогресії і таких рядів, як ряди квадратів і кубів членів арифметичної прогресії [43, с. 201].

З початку XVII століття розвиток теорії рядів базується на розгляді числового ряда як нескінченної суми певних доданків.

Пьетро Менголі (1626 — 1686) першим став досліджувати нескінченні ряди в загальному вигляді. Математик розглянув квадрат зі стороною 1 і площею, яка, відповідно, дорівнює 1. Поділивши площу квадрата навпіл, потім одну з половин знов навпіл і т.д., отримав нескінченну кількість прямокутників, площі яких утворили числовий ряд (рис. 1.2). Таким чином рисунок Менголі демонструє доведення того, що  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1$  [30].

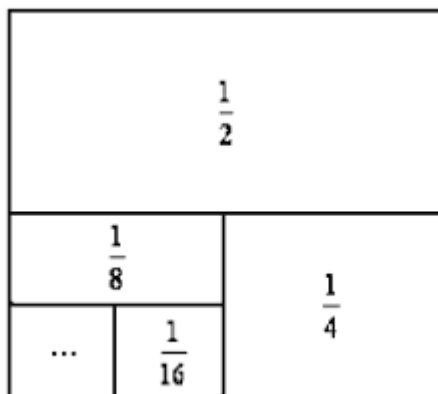


Рис. 1.2. Геометричне розкладання числового ряду

В 50-х роках XVII ст. термін «гармонічний ряд» запропонував у математик Броункер (1620 – 1684). Свою назву гармонічний ряд отримав з того факту, що кожний його член, починаючи з другого, є середнім гармонічним суміжних членів. Варто відмітити, що важливі результати були отримані Менголі, котрий довів розбіжність гармонійного ряду близько 1650 року [1, с. 163].

Але значно раніше в 1350р. французький математик Орем довів розбіжність гармонічного ряду. Його доведення дійшло до нашого часу і використовується в сучасних підручниках. Воно полягає в тому, що Н. Орем групує члени ряду наступним чином:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \\ + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Подвоюючи число членів, зібраних в послідовні групи, отримує нескінченну кількість груп з сумами більше  $\frac{1}{2}$  [29, с. 119].

Важливий метод, запропонований в XVIII ст. для розкладу функції в ряд, був винайдений Бруком Тейлором. Він мав на меті обґрунтувати правила обчислень флюксій за допомогою кінцевих різниць. На цій недостатній основі Тейлор і розвинув свій ряд, формально приєднуючись до інтерполяційної формули Ньютона. В своїй книзі Тейлор вивів більш просто і більш строго ряд Бернуллі. А також встановив спеціальний вид свого ряду, який пізніше стали називати «рядом Маклорена» [9, с. 138-139].

Вчення про ряди більшою мірою посилилось через потребу знайти для деяких функцій раціональні вирази, які дозволяли б здійснювати інтегрування. При обчисленні таких функцій для окремих значень змінних відчувалась необхідність в дослідженні їх на збіжність. Проте, при прагненні зберегти

застосовність ряду для всіх значень змінної, це відчуття було втрачене шляхом виникнення парадоксів та метафізичних міркувань. Серед небагатьох вчених, які займали строгу математичну позицію, був П. Варіньйон (1654 – 1722). В 1715 р. саме він звернув увагу на те, що члени, придатного для використання ряду, повинні безперервно зменшуватись, і остача ряду повинна ставати як завгодно малою [7, с. 138].

У 1812 році Карл Фрідріх Гаус (1777 – 1865) дає перший зразок дослідження збіжності ряду, в 1821 році наш хороший знайомий Огюстен Луї Коші (1789 – 1857) встановлює основні сучасні принципи теорії рядів. «Рядом називають необмежену послідовність чисел одержуваних один з одного за певним законом. Нехай  $s$  сума  $n$ -перших членів, де  $n$  – будь-яке ціле число. Якщо при постійному зростанні значень  $n$  сума необмежено наближається до відомої межі  $S$ , ряд називається збіжним, а ця межа – сумою ряду. Навпаки, якщо при необмеженому зростанні  $n$  сума не наближається ні до якої певного межі, ряд буде розбіжним і не буде мати суми» [33, с. 8-9].

Вагомий внесок було зроблено швейцарським математиком Леонардом Ейлером. Він встановив деякі ряди, суми яких виражаються визначеними інтегралами, а також вивів формулу сумування. Згідно його думки якщо  $S$  - сума перших  $n$  членів ряду і  $t$  це  $n$ -ий член, то [9, с. 143]:

$$S = \int tdn + \frac{t}{2} + \frac{dt}{12dn} - \frac{d^3t}{720dn^3} + \frac{d^5t}{30240dn^5} - \dots$$

Також Ейлеру вдалось обчислити суми таких рядів:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad S = \frac{1}{6} \pi^2$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \quad S = \frac{1}{90} \pi^4$$

В 1750 році він обчислив суми до  $2k=24$  та привів їх у вигляді:  

$$S_{2k} = \frac{2^{2k-1}}{(2k+1)!} A_{2k} \pi^{2k}$$
, де коефіцієнти  $A_{2k}$  знаходяться за допомогою суми виду:  
 $1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m$ , винайденою Бернуллі [9, с. 143-144].

Ейлер заявив, що необхідна та достатня умова збіжності ряду полягає у тому, що виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{kn} - S_n) = 0$ . Але, як було виявлено пізніше, виконання вказаної рівності може бути лише необхідною умовою збіжності ряду. Більша частина сучасників Ейлера була такої ж думки про збіжність рядів [9, с. 142-143].

Необхідність сформулювати достатні умови збіжності усвідомлювали великі математики. Для додатних числових рядів було сформульовано багато ознак збіжності. Ці ознаки базуються на порівнянні ряду з різними стандартними рядами.

Так у 1768 р. Ж. Даламбер сформулював таку ознаку на основі порівняння зі збіжним рядом, членами якого є члени геометричної прогресії. Він буде варіанту  $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Якщо при достатньо великому  $n$  виконується нерівність  $D_n \leq q$ , де  $q$  – стале число менше одиниці, то ряд збігається, а при  $D_n \geq 1$  – розбігається [14, с. 12].

Пізніше у 1821 р. була сформульована радикальна ознака Коші, у 1832 р. Жозеф Раабє запропонував ознаку збіжності, яка базується на порівнянні зі збіжним узагальнено гармонічним рядом і розбіжним гармонічним рядом, а у 1835 р. була сформульована ознака Кумера [29, с. 119-120].

Як видно, теорія нескінчених рядів зазнала в XVIII столітті потужний підйом, яким в більшій мірі зобов'язана творчим силам геніального Ейлера. Хоча сам він не створив теорію про розбіжні ряди, його широке розуміння сумування

ряду і методи узагальнюючого сумування були виправдані і строго обґрунтовані лише на рубежі XIX та XX століть Е.Чезаро, Е.Борелем, Л.Фейером [9, с. 153]

## 1.2. Види числових рядів

Ряди широко використовуються в математиці і її додатках як в теоретичних дослідженнях, так і наближених числових обчисленнях. Більшість чисел може бути записана у виді спеціальних рядів, за допомогою яких зручно обчислювати їх наближені значення з необхідною точністю. Також метод розкладу в ряд є ефективним методом при вивченні функцій. Він застосовується для обчислення наближених значень функцій, для обчислення інтегралів, а також для розв'язування різноманітних рівнянь [41, с. 6].

Для того, щоб ефективно використовувати ряди в математиці необхідно знати основні положення теорії рядів: означення, теореми і приклади.

### Означення 1.1

Нехай  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  - деяка числова послідовність. Вираз  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  називається **числовим рядом** і позначається  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Тобто [20, с. 6].:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

При цьому  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  називаються **членами числового ряду** [37 с. 4].

### Означення 1.2

Сума перших  $n$  доданків числового ряду  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  називається  **$n$ -ю частинною сумою ряду** і позначається  $S_n$ , тобто [38, с. 4]:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

### Означення 1.3

Ряд з невід'ємними членами називається **знакододатнім** рядом [4, с. 14].

Деякі приклади знакододатних рядів:

- Ряд геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^{n-1},$$

де  $a \neq 0, q$  – дійсне число

- Гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

### Означення 1.4

Число  $A \in \mathbb{R}$  називається **границею числової послідовності  $a_n$** , якщо для будь-якого околу  $V(A)$  точки  $A$  існує такий номер  $N$ , що всі члени послідовності, номери яких більші за  $N$ , знаходяться у вказаному околі точки  $A$  [21, с. 112].

Наприклад, доведемо, що границя послідовності  $\frac{1}{n}$  дорівнює 0.

Тобто необхідно показати, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$  – довільне число. Тоді  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ , якщо  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ .

З останньої рівності випливає, що за номер  $N$  можна взяти цілу частину числа  $\frac{1}{\varepsilon}$ , тобто  $N = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$ .

Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  [3, с. 15-16].

### **Означення 1.5**

Ряд називається **збіжним**, якщо існує скінчена границя суми  $S_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . При цьому число  $S$  називають сумою ряду [41, с. 7].

Можна дати і інше означення збіжного ряду.

### **Означення 1.6**

Ряд  $x_n$  називається збіжним, якщо існує число  $a$  таке, що для будь-якого додатного числа  $\varepsilon$  знайдеться номер  $N$  таке, що при всіх  $n \geq N$  елементи  $x_n$  цієї послідовності задовольняють нерівність [22, с. 76]:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

### **Означення 1.7**

Числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називається **розбіжним**, якщо послідовність частинних сум не має скінченої границі при  $n \rightarrow \infty$ , тобто ця границя або не існує, або вона дорівнює нескінченності [12, с. 24].

### **Приклад 1.1.**

Нехай дано ряд:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

Обчислимо границю суми цього ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty.$$

Як видно, границя суми цього ряду не існує, а значить за означенням ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  розбіжний.

### **Приклад 1.2.**

Нехай дано ряд:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

Обчислимо границю суми цього ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Як видно, границя суми цього ряду існує, дорівнює 1, а значить за означенням ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$  є збіжним.

### **Примітка 1.1.**

Питання про збіжність ряду рівносильне питанню про існування границі послідовності  $\{S_n\}$  часткових сум цього ряду.

З іншого боку, питання про збіжність довільної послідовності  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) рівносильне питанню про збіжність наступного числового ряду:

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1}) + \dots,$$



для якого  $b_1 = u_1, b_2 = u_2 - u_1, b_3 = u_3 - u_2, \dots, b_n = u_n - u_{n-1}, \dots$ ,

а послідовність часткових сум співпадає з членами послідовності  $\{u_n\}$ :

$$S_1 = u_1, S_2 = b_1 + b_2 = u_2, S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = u_3, \dots,$$

$$S_n = b_1 + \dots + b_n = u_n, \dots$$

При цьому границя послідовності  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots (n \in \mathbb{N})$  співпадає з сумою ряду.

Таким чином, вивчення нескінченного ряду і його суми – це просто інша форма вивчення послідовності і її границі, але ця форма має певні переваги як при дослідженні границі, так і при її обчисленні [40, с. 5-6].

### **Властивості збіжних числових рядів:**

1. Відкидання чи зміна скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність (розбіжність) [42, с. 260].

2. Якщо члени ряду помножити на деяку константу  $C$ , його збіжність не порушиться, сума множитья на  $C$  [13, с. 623].

3. Два збіжних ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  з сумами  $S_1$  та  $S_2$  можна почленно додавати або віднімати. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2$  [32, с. 20].

4. Якщо ряд збіжний, то його члени можна групувати за порядком їх послідовності. Отриманий ряд збігається і його сума дорівнює сумі вихідного ряду [35, с. 519].

5. Якщо, починаючи з деякого  $n$ , члени рядів  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  рівні між собою і один з цих рядів збіжний, то збіжний і другий [23, с. 17].

У багатьох випадках досліджувати на збіжність (розбіжність) числовий ряд значно простіше ніж числову послідовність.

### 1.3. Методи дослідження числових рядів на збіжність

#### Необхідна ознака збіжності ряду.

##### Теорема 1.1.

Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний, то його  $n$ -ий член прямує до нуля при необмеженому зростанні  $n$ , тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  [8, с. 39].

##### Доведення.

Доведення. Оскільки ряд збіжний, то існує границя послідовності частинних сум цього ряду, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , де  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

Тоді, використовуючи арифметичні дії збіжних послідовностей, отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Покажемо тепер, що умова  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  не є достатньою при дослідженні ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  на збіжність.

Для цього розглянемо контрприклад:

Нехай дано ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

Для даного ряду необхідна умова виконується, тобто:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$ . Для послідовності частинних сум  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  цього ряду справедлива наступна оцінка:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \frac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N},$$

оскільки  $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ , тому що для довільного  $k \leq n$ . Тоді згідно теоремі про граничний перехід в нерівності маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty,$$

тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ , і ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$  розбіжний.

*Що і треба було довести.*

Якщо необхідна умова збіжності ряду не виконується, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний. Якщо ж необхідна умова виконується, то дослідження проводять за допомогою достатніх ознак. Основні ознаки, які найчастіше використовуються, наведено нижче і доведено за допомогою теорем [31, с. 8].

### Достатня ознака збіжності ряду

Збіжність або розбіжність знакододатного ряду часто встановлюється шляхом порівняння його з іншим рядом, про який вже відомо, збіжний він чи розбіжний. В основі такого порівняння лежать наступні три теореми.

#### **Теорема 1.2.**

Нехай  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  – два знакододатних ряди. Нехай, починаючи з деякого  $n_0$  виконується умова

$$0 \leq a_n \leq b_n, \text{ тоді}$$

- а) із збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  слідує збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;
- б) із розбіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  слідує розбіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  [19, с. 9].

#### **Доведення.**

Позначимо через  $A_n$  і  $B_n$  відповідно частинну суму першого та другого рядів:

$$A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Відмітимо, що в силу невід'ємності членів заданих рядів послідовностей  $A_n$  і  $B_n$  будуть неспадними.

а) Із збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  слідує існування границі послідовності його частинних сум  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ .

Тобто для всіх  $n \in N$  виконується нерівність  $B_n \leq B$ . Звідси, використовуючи умову теореми отримуємо  $A_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq B$  для всіх  $n \in N$ .

Таким чином, послідовність частинних сум  $A_n$  ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  також обмежена зверху та, як було зазначено, є неспадною, а значить має границю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  і  $A \leq B$ .

б) Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  теж розбіжний. Припустимо протилежне. Нехай ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжний, тоді за доведеним в пункті (а) отримаємо, що збігається і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Але це заперечує умову, згідно якої ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний. Отримане протиріччя доводить дане твердження [2, с. 355].

*Що і треба було довести.*

### **Теорема (гранична ознака порівняння).**

#### **Теорема 1.3.**

Якщо  $a_n > 0$  та  $b_n > 0$  для всіх  $n \geq m$  ( $m$  – заданий номер) і  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ , де  $0 < k < \infty$ , то ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  або збіжні, або розбіжні [18, с. 16].

**Доведення.**

а) Припустимо, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжний. З умови існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$  для довільного додатного  $\varepsilon$  вірна нерівність  $\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon$ .

Розкриваючи знак модуля, запишемо нерівність у вигляді подвоєної нерівності:

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$$

З цього слідує нерівність:

$$a_n < (k + \varepsilon)b_n$$

Якщо так, то із збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  слідує збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon)b_n$ , із збіжності якого в силу подвоєної нерівності та попередньої теореми слідує збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

У випадку, коли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний, доведення будується аналогічно з тією лише різницею, що наслідок із останньої нерівності записується у вигляді:

$$b_n < \frac{1}{(k + \varepsilon)} a_n$$

б) Розглянемо тепер випадок, коли один із рядів розбіжний. Припустимо, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний. Очевидно, що із існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$  ( $k \neq 0$ ) слідує існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k}$ . Звідси слідує, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  повинен бути розбіжним, так як інакше в силу доведеного в пункті (а) цієї теореми був би збіжний і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . А це суперечить умові пункту (б) [6, с. 14].

*Що і треба було довести.*

**Теорема (ознака порівняння).****Теорема 1.4.**

Нехай  $a_n > 0$  і  $b_n > 0$  і існує такий номер, що  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  для всіх  $n \geq n_0$ , тоді справедливі наступні твердження:

1. Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжний, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  також збіжний.
2. Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  також розбіжний [24, с. 13].

**Доведення.**

Візьмемо довільне  $n > n_0$  і напишемо нерівність з умови теореми для  $k = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n - 1$ :

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}};$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}};$$

.....

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

Перемножуючи ці рівності, отримуємо:  $a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n, n \geq n_0$ .

Остання нерівність подібна нерівності виду:  $a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}$  виведена лише для значень  $n > n_0$ , але вона також вірна і для  $n = n_0$ .

Нехай ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжний. Так як ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n$  збіжний, то за ознакою порівняння ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  також збіжний. Це протиріччя доводить друге твердження [17, с. 30].

*Що і треба було довести.*

**Метод дослідження рядів на збіжність  
за допомогою відношення (n+1)-го та n-го членів ряду  
(ознака Даламбера)**

**Теорема 1.5.**

Нехай дано ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , де  $a_n > 0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Якщо існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ , то:

при  $\lambda < 1$  ряд збіжний,

при  $\lambda > 1$  ряд розбіжний,

при  $\lambda = 1$  ряд може бути і збіжним, і розбіжним, тобто питання залишається відкритим [16, с. 26].

**Доведення.**

1) Нехай для досліджуваного ряду  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ,  $\lambda < 1$ . Розглянемо число  $q$ , що задовольняє співвідношенню  $\lambda < q < 1$ . Тоді, починаючи з деякого номера  $N$  з визначення границі для всіх  $n \geq N$ , виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \text{ або } a_{n+1} < qa_n.$$

Запишемо нерівність для різних  $n$ , починаючи з номера  $N$ , тоді отримаємо:

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q \Rightarrow a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2 a_N;$$

$$\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < q \Rightarrow a_{N+3} < qa_{N+2} < q^3 a_N.$$

Розглянемо два ряди. Ряд  $a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + \dots$ , є рядом геометричної прогресії зі знаменником  $q$ :  $0 < q < 1$ . Отже, він збіжний. Так як члени другого ряду  $qa_N + q^2 a_N + q^3 a_N + \dots$  починаючи з  $a_{N+1}$  менше відповідних членів першого ряду, то на підставі ознаки порівняння ряд збіжний.

2) Нехай  $\lambda > 1$ . Тоді з нерівності  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$  ( $\lambda > 1$ ) слідує, що, починаючи з деякого номера  $N$  (для  $n \geq N$ ), буде мати місце нерівність  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  або  $a_{n+1} > a_n$ ,

а це значить, що члени ряду зростають і загальний член ряду не прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$ , тобто порушується необхідна ознака збіжності, що призводить до розбіжності досліджуваного ряду.

3) Нехай  $\lambda = 1$ . В цьому випадку ознака Даламбера не дає можливості встановити, розбіжний ряд чи ні, так як в цьому випадку він може бути і збіжним і розбіжним. Для вирішення питання про збіжність такого ряду, є потреба в використанні додаткових досліджень [40, с. 16-17].

*Що і треба було довести.*

### **Примітка 1.2.**

Варто відмітити, що існує інше формулювання ознаки Даламбера:

### **Теорема 1.6.**

а) Якщо існує таке число  $q \in (0,1)$ , що для будь-якого натурального числа  $n > n_0$  справедлива нерівність  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ , тоді ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний;

б) Якщо для будь-якого натурального числа  $n > n_0$  справедлива нерівність  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , тоді ряд розбіжний [39, с. 16].

### **Приклад 1.3.**

Дослідити на збіжність ряд  $\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \dots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots$

Використовуючи ознаку Даламбера, дослідимо ряд на збіжність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{(n!)^2 2^{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0$$

Оскільки границя дорівнює 0, що менше 1, то ряд збіжний.

### **Приклад 1.4.**



Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot n!}{(n+1)^2}$

Використовуючи ознаку Даламбера, дослідимо ряд на збіжність:

$$a_n = \frac{10^n \cdot n!}{(n+1)^2};$$

$$a_{n+1} = \frac{10^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+2)^2};$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{10^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+2)^2} : \frac{10^n \cdot n!}{(n+1)^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{10^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (n+1)^2}{(n+2)^2 \cdot 10^n \cdot n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (n+1)^2}{(n+2)^2 \cdot n!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(10n+10) \cdot (n^2+2n+1)}{n^2+4n+4} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3+10n^2+20n^2+20n+10n+10}{n^2+4n+4} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3+30n^2+30n+10}{n^2+4n+4} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (10n) = \infty. \end{aligned}$$

Оскільки  $\infty > 1$ , то за ознакою Даламбера даний ряд розбіжний.

### Радикальна ознака Коші

#### Теорема 1.7.

Нехай дано ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , де  $a_n \geq 0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді якщо існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ , то:

- 1) При  $\lambda < 1$  ряд збіжний,
- 2) При  $\lambda > 1$  ряд розбіжний,

3) При  $\lambda = 1$  ряд може бути і збіжним, і розбіжним, тобто питання залишається відкритим [10, с. 43-44].

### Доведення.

1) Нехай  $\lambda < 1$ . Розглянемо число  $q$  (таке число завжди можна знайти) таке, що задовольняє відношенню:  $\lambda < q < 1$ . Із існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  слідує, що, починаючи з деякого номера  $N$ , виконано нерівність  $|\sqrt[n]{a_n} - 1| < q - 1$ .

Розкриваючи модуль, можна записати нерівність у вигляді:  $\sqrt[n]{a_n} < q$  або  $a_n < q^n$  для всіх  $n \geq N$ .

Тепер розглянемо два ряди:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots$$

Другий з цих рядів є спадною геометричною прогресією, а, значить, ряд є збіжним. Але тоді за теоремою збігається і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{N+p}$ , звідки слідує збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , отриманого з ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{N+p}$ , додаванням кінцевого числа членів  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{N-1}$ .

2) Нехай  $\lambda > 1$ . Із існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  слідує що, починаючи з деякого номера  $n = N$ , виконано нерівність  $|\sqrt[n]{a_n} - 1| < \lambda - 1$ .

Розкриваючи модуль, можна записати нерівність у вигляді:  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  або  $a_n > 1$  для всіх  $n \geq N$ . Але, якщо всі члени ряду, починаючи з  $a_n$  більше 1, то цей ряд розбігається, так як його спільний член не наближується до нуля, тобто не виконується необхідна ознака збіжності ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ).

3) Нехай  $\lambda = 1$ . В цьому випадку радикальна ознака Коші не дає змоги встановити, чи ряд збіжним або розбіжним.

В такому випадку необхідні додаткові дослідження.

Проілюструємо це на прикладі двох рядів.

1) Як відомо, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  є збіжним. Обчислимо границю цього ряду

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$ , попередньо виконаємо логарифмування.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \ln n}{n}} = \left| \begin{array}{l} \text{застосуємо} \\ \text{правило} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right| = \\ &= e^{-2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

2) Як відомо, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  є розбіжним. При цьому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$  і обчислюється границя аналогічно [6, с. 20].

*Що і треба було довести.*

### **Приклад 1.5.**

Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{6n-1}{4n+3} \right)^{5n}.$$

Виконаємо дослідження ряду на збіжність за допомогою ознаки Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{6n-1}{4n+3} \right)^{5n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n-1}{4n+3} \right)^{5n \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n-1}{4n+3} \right)^5 = \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{4n+3} \right)^5 = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^5 = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{4n} \right)^5 = \left( \frac{3}{2} \right)^5 > 1. \end{aligned}$$

Оскільки  $\lambda = \left(\frac{3}{2}\right)^5 > 1$ , то за радикальною ознакою Коші ряд розбіжний.

**Дослідження рядів на збіжність  
за допомогою невласних інтегралів  
(інтегральна ознака Коші)**

**Теорема 1.8.**

Якщо члени знакододатного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  можуть бути представлені як числові значення деякої неперервної монотонно спадної на проміжку  $[1; +\infty]$  функції  $f(x)$  так, що

$$u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n) \dots, \text{ то:}$$

1) якщо інтеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  збіжний, то збіжний і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

2) якщо інтеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  розбіжний, то розбіжний і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

[15, с. 13].

**Доведення.**

Розглянемо криволінійну трапецію, що обмежена зверху графіком функції  $y = f(x)$ , основою якої служить відрізок вісі  $Ox$  від  $x=1$  до  $x=n$  (рис. 1.3) .

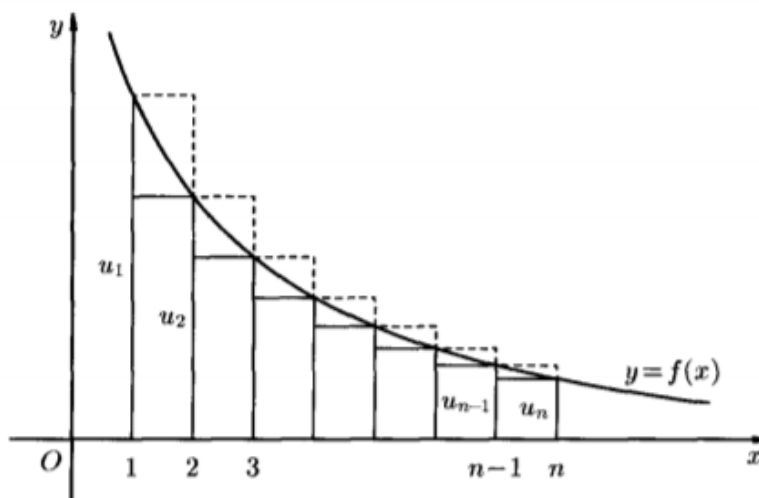


Рис. 1.3. Криволінійна трапеція, обмежена зверху графіком функції  $f(x)$

Побудуємо вхідні і вихідні прямокутники, основами яких служать відрізки  $[1;2]$ ,  $[2;3]$ , ... . Враховуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, запишемо:

$$\begin{aligned} f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + \dots + f(n) \cdot 1 &< \int_1^n f(x) dx < \\ &< f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + \dots + f(n-1) \cdot 1 \end{aligned}$$

Або з урахуванням, що  $u_1 = f(1)$ ,  $u_2 = f(2)$ , ...,  $u_n = f(n)$  ..., отримаємо:

$$u_2 + u_3 + \dots + u_n < \int_1^n f(x) dx < u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

Але, оскільки часткова сума  $S_n$  ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  дорівнює  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ , то отримаємо:

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x) dx < S_n - u_n.$$

*Випадок 1.*

Невласний інтеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  збіжний, тобто  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = A$ . Оскільки

$$\int_1^n f(x) dx < \int_1^{+\infty} f(x) dx = A, \text{ то маємо } S_n - u_1 < A, \text{ тобто } S_n < u_1 + A.$$

Так як послідовність часткових сум монотонно зростає і обмежена вгорі, то за ознакою існування границі, ця послідовність має границю. Відповідно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  збіжний.

*Випадок 2.*

Невласний інтеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  розбіжний, тоді  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = +\infty$ . І інтеграл  $\int_1^n f(x) dx$  необмежено зростають при  $n \rightarrow \infty$ . Враховуємо, що

$$S_n > \int_1^n f(x) dx + u_n.$$

Тоді маємо, що  $S_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . З цього випливає, що  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  розбіжний [35].

*Що і треба було довести.*

### **Приклад 1.6.**

Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ .

Скористуємося інтегральною ознакою Коші. Функція  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$  задовольняє вимогам теореми. Тоді знайдемо інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \ln |\ln x| \Big|_2^{\infty} = \infty$$

Оскільки невластний інтеграл  $= \infty$ , він є розбіжним, а значить, ряд з загальним членом  $u_n = \frac{1}{x \cdot \ln x}$  розбіжний.

### **Приклад 1.7.**

Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+1}$ .

Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Розглянемо відповідний невластний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{6}{n^2+1} dn &= 6 \operatorname{arctg} n \Big|_1^{+\infty} = 6 \operatorname{arctg} \infty - 6 \operatorname{arctg} 1 = 6 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 6 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \neq \infty. \end{aligned}$$

Оскільки невластний інтеграл  $\neq \infty$ , то він є збіжним, а значить, і даний ряд теж є збіжним.

## Висновки до розділу 1

1. Проаналізувавши велику кількість вітчизняної та зарубіжної літератури, було з'ясовано, що точної дати виникнення числових рядів немає і чіткої періодизації їх розвитку теж. Але варто відмітити, що ще у часи існування Стародавнього Єгипту та Стародавньої Греції вже існували певні відомості про арифметичні і геометричні прогресії, а отже про числові ряди.

2. Вагомий внесок у розвиток теорії числових рядів зробили такі вчені, як: П'єтро Менголі (геометричне розкладання ряду поділом прямокутника), Броункер і Орем (гармонічний ряд і його розбіжність), Брук Тейлор (розкладання функції в ряд), Огюстен Луї Коші (основні сучасні положення теорії рядів), Леонард Ейлер (обчислення суми рядів, необхідна і достатня ознаки збіжності), Даламбер, Раабе, Кумер та інші (ознаки збіжності рядів).

3. Було наведено основні положення теорії числових рядів. Представлено необхідні означення: числовий ряд, границя числового ряду, збіжний і розбіжний ряд, сума ряду та інші.

4. Представлено декілька теорем для дослідження числових рядів на збіжність. Серед них достатня ознака збіжності, ознака порівняння, радикальні та інтегральна ознаки Коші, ознака Даламбера та інші. Теореми викладені з доведенням, наведено багато прикладів на застосування зазначених теорем.

5. Також було проаналізовано більш сучасну літературу щодо теорії рядів, розглянуті геометричні інтерпретації числових рядів та достатні ознаки їх збіжності.

## РОЗДІЛ 2. ПОБУДОВА ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТА ТАНГРАМ

Танграм – це китайська головоломка (рис. 2.1), що існує вже понад 1000 років. Танграм містить сім гральних кісток (танів), з яких необхідно скласти фігури, використовуючи всі елементи і не накладаючи один на один.

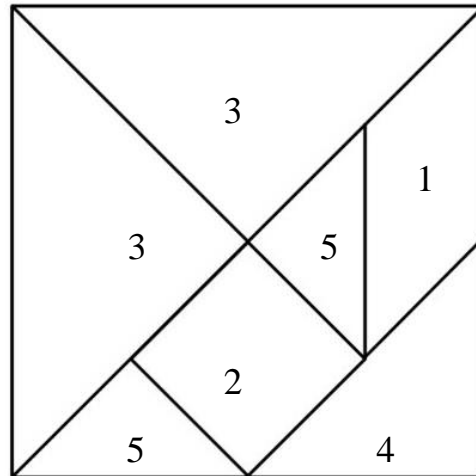


Рис. 2.1. Головоломка «Танграм»

Якщо припустити, що всі сім елементів можуть бути зібрані в квадрат зі стороною одиниця та площею – квадратна одиниця, то елементи будуть мати такі розміри:

- паралелограм (сторони  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , площа  $\frac{1}{8}$ ) – 1;
- квадрат (сторона  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , площа  $\frac{1}{8}$ ) – 2;
- 2 великих прямокутних трикутника (гіпотенуза 1, катети  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , площа  $\frac{1}{4}$ ) – 3;
- 1 середній прямокутний трикутник (гіпотенуза  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , катети  $\frac{1}{2}$ , площа  $\frac{1}{8}$ ) – 4;
- 2 малих прямокутний трикутники (гіпотенуза  $\frac{1}{2}$ , катети  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , площа  $\frac{1}{16}$ ) – 5.

Будемо використовувати елементи квадрата «танграм» для побудови і дослідження числових рядів.



## 2.1. Генерація рядів за допомогою танграмів та описаних кіл

Розглянемо танграм  $T=ABCD$  (рис. 2.2). Навколо цього танграма опишемо коло  $K = \text{коло}(M; AM)$ . В квадрат  $KLMN$ , який є елементом танграма  $T$ , впишемо танграм  $T_1 = A_1B_1C_1D_1$ , навколо якого в свою чергу також опишемо коло  $K_1 = \text{коло}(M_1; A_1M_1)$ . Припускаємо, що дана процедура виконується нескінченну кількість разів.

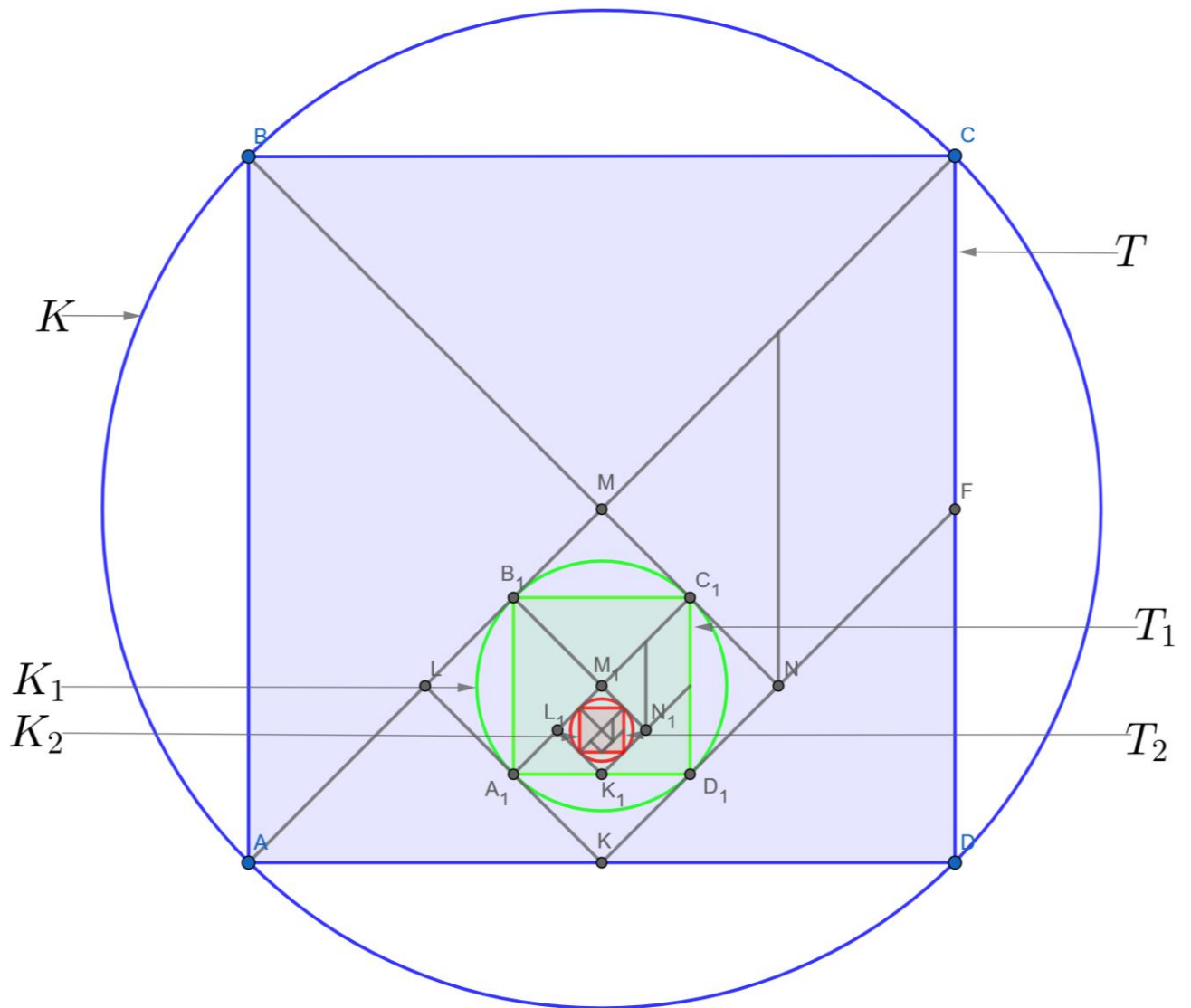


Рис. 2.2. Кола описані навколо танграмів

З цієї умови ми можемо розглянути значну кількість задач, спрямованих на побудову числових рядів за допомогою параметрів елементів танграмів. Завдання полягає в побудові:

1. ряда сторін танграмів  $T_n$ .
2. ряда діагоналей танграмів  $T_n$ .
3. ряда площ танграмів  $T_n$ .
4. ряда радіусів описаних кіл  $K_n$ .
5. ряда діаметрів описаних кіл  $K_n$ .
6. ряда довжин описаних кіл  $K_n$ .
7. ряда площ описаних кіл  $K_n$ .
8. ряда відношень відповідних сторін танграмів  $T_n$  до радіусів описаних кіл  $K_n$ .
9. ряда відношень відповідних радіусів описаних кіл  $K_n$  до довжин сторін танграмів  $T_n$ .
10. ряда відношень відповідних площ кіл  $K_n$  до площ танграмів  $T_n$ .

Розв'яжемо кожну із запропонованих задач.

Нехай танграм  $T$  має сторону довжиною  $a = 1$ . Діагональ танграма  $T$  можна порахувати за формулою  $d = \sqrt{2}a = \sqrt{2}$ .

Очевидно, що площа танграма  $T$  обчислюється наступним чином:  $S = a^2 = 1^2 = 1$ .

Радіус першого описаного кола  $K$  (за формулою радіуса описаного кола навколо квадрата) дорівнює  $R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Діаметр кола  $K$  легко порахувати за формулою:  $D = 2R = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ .

Довжина кола  $K$ , описаного навколо танграма  $T$  обчислюється так:  $C = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$ . Очевидно, що площу описаного кола  $K$  можна легко

порахувати наступним чином:  $S = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$ .

Далі обчислимо для танграма  $T$  відношення таких елементів:

- Відношення довжини сторони танграма  $T$  до радіуса описаного кола  $K$ :

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

- Відношення радіуса описаного кола  $K$  до довжини сторони танграма  $T$ :

$$\frac{R}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Відношення площі кола  $K$  до площі танграма  $T$ :

$$\frac{S_{\text{кола}}}{S_{\text{танграма}}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$$

Перші елементи шуканих рядів знайдені. Тепер необхідно знайти залежність між елементами танграма  $T$  і елементами танграма  $T_1$ . Для цього відшукаємо залежність між стороною  $a$  танграма  $T$  і стороною  $a_1$  танграма  $T_1$ .

Виразимо головну діагональ танграма  $T$  через його сторону  $AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}a$ . Очевидно, що відрізок  $LM = \frac{1}{4}AC$ . Враховуючи попередню залежність,  $LM = \frac{1}{4}\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}a}{4}$ .

Легко бачити, що коло  $K$ , описане навколо танграма  $T$ , є вписаним в квадрат  $KLMN$ . Тоді його радіус можна обчислити за формулою радіуса кола, вписаного в квадрат:  $r = \frac{a}{2}$ . Тобто  $A_1M_1 = \frac{LM}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{4}}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{8}$ .

З іншого боку цей радіус є радіусом кола  $K_1$ , описаного навколо танграма  $T_1$ . Тоді сторону цього танграма можна виразити за формулою  $a = \sqrt{2}R$ .

Тобто маємо залежність:

$$a_1 = A_1B_1 = \sqrt{2}A_1M_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{8} = \frac{2a}{8} = \frac{1}{4}a.$$

$$a_1 = \frac{1}{4}a$$

Очевидно, що дана залежність буде виконуватись для всіх танграмів  $T_n$ . І дійсно, дана залежність дозволяє знайти всі шукані елементи танграмів  $T_n$  та кіл  $K_n$ , описаних навколо них.

Отже, маємо такі дані за кожним танграмом:

- Танграм  $T$ : сторона дорівнює 1, діагональ дорівнює  $\sqrt{2}$ , площа танграма дорівнює 1, радіус описаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , діаметр описаного кола дорівнює  $\sqrt{2}$ , довжина кола дорівнює  $\sqrt{2}\pi$ , а площа кола дорівнює  $\frac{\pi}{2}$ .
- Танграм  $T_1$ : сторона дорівнює  $\frac{1}{4}$ , діагональ дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{16}$ , радіус описаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ , діаметр описаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , довжина кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ , а площа кола дорівнює  $\frac{\pi}{32}$ .
- Танграм  $T_2$ : сторона дорівнює  $\frac{1}{16}$ , діагональ дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{16}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{256}$ , радіус описаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{32}$ , діаметр описаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{16}$ , довжина кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}\pi}{16}$ , а площа кола дорівнює  $\frac{\pi}{512}$ .
- Танграм  $T_3$ : сторона дорівнює  $\frac{1}{64}$ , діагональ дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{64}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{4096}$ , радіус описаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{128}$ , діаметр описаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{64}$ , довжина кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}\pi}{64}$ , а площа кола дорівнює  $\frac{\pi}{8192}$ .

- Танграм  $T_4$ : сторона дорівнює  $\frac{1}{256}$ , діагональ дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{256}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{65536}$ , радіус описаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{512}$ , діаметр описаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{256}$ , довжина кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}\pi}{256}$ , а площа кола дорівнює  $\frac{\pi}{131072}$ .

Таким чином, можемо записати наступні ряди:

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots \quad (2.1)$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

$$\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{64} + \frac{\sqrt{2}}{256} + \dots \quad (2.2)$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{65536} + \dots \quad (2.3)$$

- Ряд радіусів описаних кіл  $K_n$ :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{32} + \frac{\sqrt{2}}{128} + \frac{\sqrt{2}}{512} + \dots \quad (2.4)$$

- Ряд діаметрів описаних кіл  $K_n$ :

$$\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{64} + \frac{\sqrt{2}}{256} + \dots \quad (2.5)$$

- Ряд довжин описаних кіл  $K_n$ :

$$\sqrt{2}\pi + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{\sqrt{2}\pi}{64} + \frac{\sqrt{2}\pi}{256} + \dots \quad (2.6)$$

- Ряд площ описаних кіл  $K_n$ :

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{512} + \frac{\pi}{8192} + \frac{\pi}{131072} + \dots \quad (2.7)$$

Запишемо «сігма-моделі» отриманих рядів:

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (2.1')$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (2.2')$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} \quad (2.3')$$

- Ряд радіусів описаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (2.4')$$

- Ряд діаметрів описаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (2.5')$$

- Ряд довжин описаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (2.6')$$

- Ряд площ описаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} \quad (2.7')$$

Після перетворень отримаємо ці ряди в наступному вигляді:

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n} \quad (2.1'')$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{5-4n}{2}} \quad (2.2'')$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{4-4n} \quad (2.3'')$$

- Ряд радіусів описаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{3-4n}{2}} \quad (2.4'')$$

- Ряд діаметрів описаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{5-4n}{2}} \quad (2.5'')$$

- Ряд довжин описаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot 2^{\frac{5-4n}{2}} \quad (2.6'')$$

- Ряд площ описаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot 2^{3-4n} \quad (2.7'')$$

- Ряд відношень відповідних сторін танграмів  $T_n$  до радіусів описаних кіл  $K_n$ :

Позначимо відношення через  $M$ . Тоді отримаємо:

$$M_n = \frac{2^{2-2n}}{2^{\frac{3-4n}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Отже, маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}n \quad (2.8)$$

- Ряд відношень відповідних радіусів описаних кіл  $K_n$  до довжин сторін танграмів  $T_n$ :

Позначимо відношення через  $L$ . Тоді отримаємо:

$$L_n = \frac{2^{\frac{3-4n}{2}}}{2^{2-2n}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} n \quad (2.9)$$

- Ряд відношень відповідних площ кіл  $K_n$  до площ танграмів  $T_n$ :

Позначимо відношення через  $G$ . Тоді отримаємо:

$$G_n = \frac{\pi \cdot 2^{3-4n}}{2^{4-4n}} = \pi \cdot 2^{-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} n \quad (2.10)$$

Щоб дослідити ряди (2.1-2.10) на збіжність, перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності рядів.

- Ряд сторін танграмів  $T_n$  (2.1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$  (2.2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{5-4n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$  (2.3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{4-4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд радіусів описаних кіл  $K_n$  (2.4):



$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{3-4n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд діаметрів описаних кіл  $K_n$  (2.5):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{5-4n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд довжин описаних кіл  $K_n$  (2.6):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot 2^{\frac{5-4n}{2}} = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = \pi \cdot 0 = 0$$

- Ряд площ описаних кіл  $K_n$  (2.7):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot 2^{3-4n} = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = \pi \cdot 0 = 0$$

Для рядів (2.1-2.7) необхідна умова збіжності ряду виконується, а значить ряди можуть бути збіжними, а можуть бути розбіжними. Тому дослідимо одержані числові ряди на збіжність за допомогою достатньої ознаки. Вона полягає в тому що, якщо ряд збіжний, то виконується рівність:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , де  $S$  має скінченне значення, а  $S_n$  – частинні суми ряду, які обчислюються за формулою суми геометричної прогресії. Оскільки ряди (2.1-2.7) є рядами геометричної прогресії, то  $S_n$  (частинні суми ряду) обчислюються за формулою:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

- Ряд сторін танграмів  $T_n$  (2.1):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n} \right) = \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1 \right) = \\ &= \frac{4}{3} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} \right) = \frac{4}{3} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} \right) = \frac{4}{3} (1 - 0) = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{4}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.1)

збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$  (2.2):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \\ &= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \sqrt{2} \cdot \frac{4}{3} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1\right) = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} (1 - 0) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.2)

збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд площ танграмів  $T_n$  (2.3):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{16}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n}{\frac{15}{16}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{16^n}}{\frac{15}{16}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 16^{-n}}{\frac{15}{16}} = \frac{16}{15} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 16^{-n}\right) = \frac{16}{15} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} - 16^{-n} + 1\right) = \\ &= \frac{16}{15} \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 16^{-n}\right) = \frac{16}{15} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 16^{-n}\right) = \frac{16}{15} (1 - 0) = \frac{16}{15} \cdot 1 = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{16}{15}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.3)

збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд радіусів описаних кіл  $K_n$  (2.4):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1 \right) = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} (1 - 0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.4) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд діаметрів описаних кіл  $K_n$  (2.5):

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \cdot \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n}{\frac{3}{4}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \\
&= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \sqrt{2} \cdot \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1 \right) = \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} (1 - 0) = \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.5) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд довжин описаних кіл  $K_n$  (2.6):

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}\pi \cdot \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{2}\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n}{\frac{3}{4}} = \sqrt{2}\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \\
&= \sqrt{2}\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \sqrt{2}\pi \cdot \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n} \right) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1 \right) = \\
&= \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} \right) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} \right) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} (1 - 0) = \\
&= \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \cdot 1 = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.6)

збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд площ описаних кіл  $K_n$  (2.7):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n}{\frac{15}{16}} = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{16^n}}{\frac{15}{16}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 16^{-n}}{\frac{15}{16}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{16}{15} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 16^{-n}\right) = \frac{8\pi}{15} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} -16^{-n} + 1\right) = \\ &= \frac{8\pi}{15} \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} -16^{-n}\right) = \frac{8\pi}{15} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 16^{-n}\right) = \frac{8\pi}{15} (1 - 0) = \frac{8\pi}{15} \cdot 1 = \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{8\pi}{15}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.7)

збігається до своєї скінченної суми.

Отже, ряди (2.1-2.7) є збіжними.

Тепер дослідимо ряди (2.8-2.10) на збіжність за допомогою необхідної ознаки.

- Ряд відношень відповідних сторін танграмів  $T_n$  до радіусів описаних кіл  $K_n$  (2.8):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}n = \infty$$

- Ряд відношень відповідних радіусів описаних кіл  $K_n$  до довжин сторін танграмів  $T_n$  (2.9):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{2}n = \infty$$

- Ряд відношень відповідних площ кіл  $K_n$  до площ танграмів  $T_n$  (2.10):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}n = \infty$$

Отже, необхідна ознака збіжності ряду не виконується, значить ряди (2.8-2.10) є розбіжними.

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми довжин сторін танграмів
1	1
2	1,25
3	1,3125
4	1,328125
5	1,332031
6	1,333008
7	1,333252
8	1,333313
9	1,333328
10	1,333332

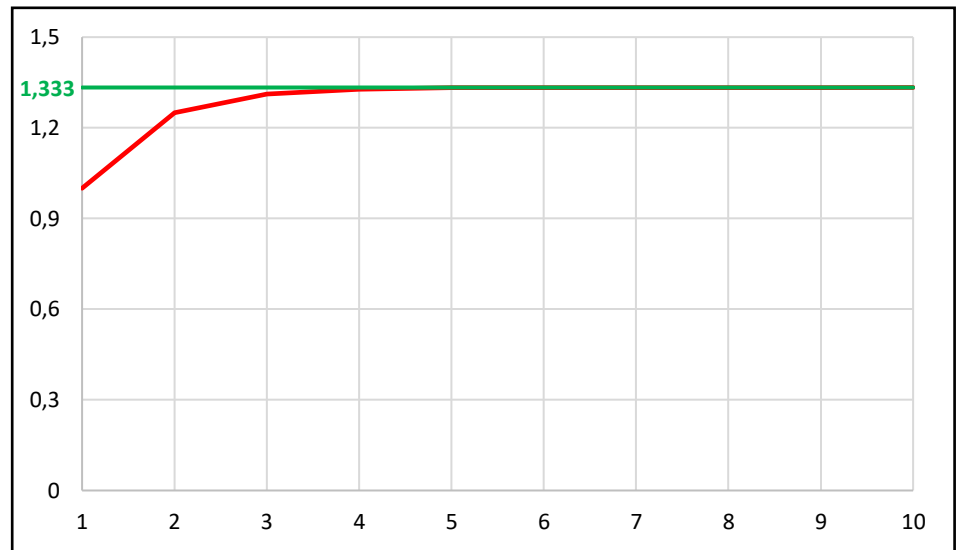


Рис. 2.3. Графік залежності частинних сум ряду (2.1) від кількості доданків

Легко бачити, що графік спочатку стрімко зростає, а потім із збільшенням доданків набуває постійної швидкості (рис. 2.3). Таким чином графік наближається до значення скінченної суми ряду досить інтенсивно, тобто ряд довжин сторін танграмів збігається до своєї скінченної суми  $S = \frac{4}{3}$ .

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми довжин діагоналей танграмів
1	1,414214
2	1,767767
3	1,856155
4	1,878252
5	1,883777
6	1,885158
7	1,885503
8	1,885589
9	1,885611
10	1,885616

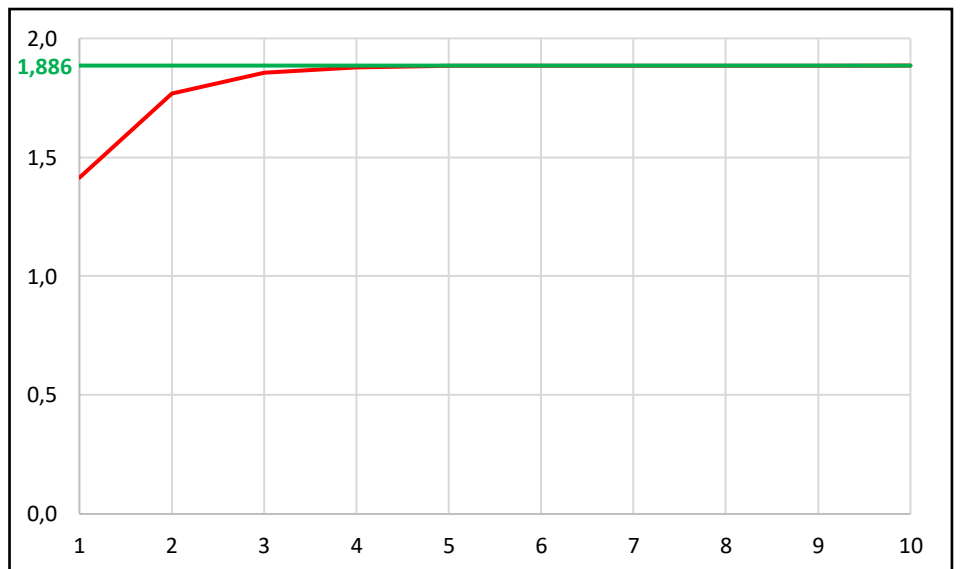


Рис. 2.4. Графік залежності частинних сум ряду (2.2) від кількості доданків

Можна побачити, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду діагоналей танграмів в залежності від кількості доданків. За (рис. 2.4) видно, що графік спочатку різко зростає, а потім поступово набуває постійної швидкості.

Таким чином видно, що графік частинних сум ряду довжин діагоналей танграмів інтенсивно наближується до значення скінченної суми ряду. Тобто геометрично доведено, що ряд діагоналей танграмів збігається до своєї скінченної суми  $S = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ .

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми площ танграмів
1	1
2	1,0625
3	1,06640625
4	1,066650391
5	1,066665649
6	1,066666603
7	1,066666663
8	1,066666666
9	1,066666667
10	1,066666667

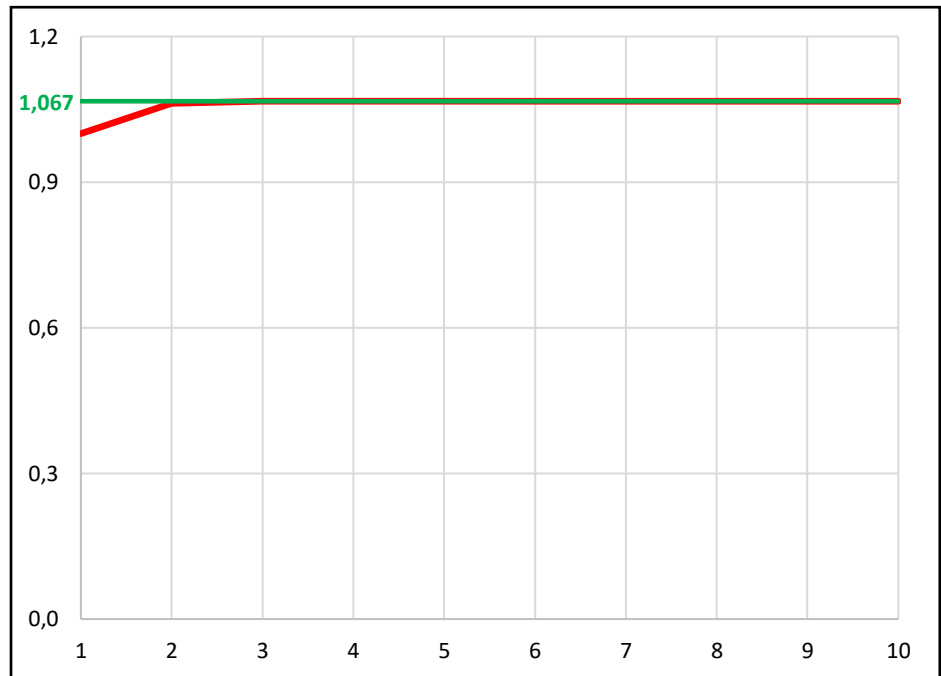


Рис. 2.5. Графік залежності частинних сум ряду (2.3) від кількості доданків

Побудувавши графік частинних сум ряду площ танграмів, можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків (рис. 2.5). Легко бачити, що графік спочатку зростає, а потім поступово набуває постійної швидкості. Таким чином проілюстровано, що графік частинних сум інтенсивно наближається до значення скінченної суми ряду, тобто ряд збігається до своєї скінченної суми  $S = \frac{16}{15}$ .

- Ряд радіусів описаних кіл  $K_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми радіусів описаних кіл
1	0,707106781
2	0,883883476
3	0,92807765
4	0,939126194
5	0,94188833
6	0,942578864
7	0,942751497
8	0,942794655
9	0,942805445
10	0,942808142

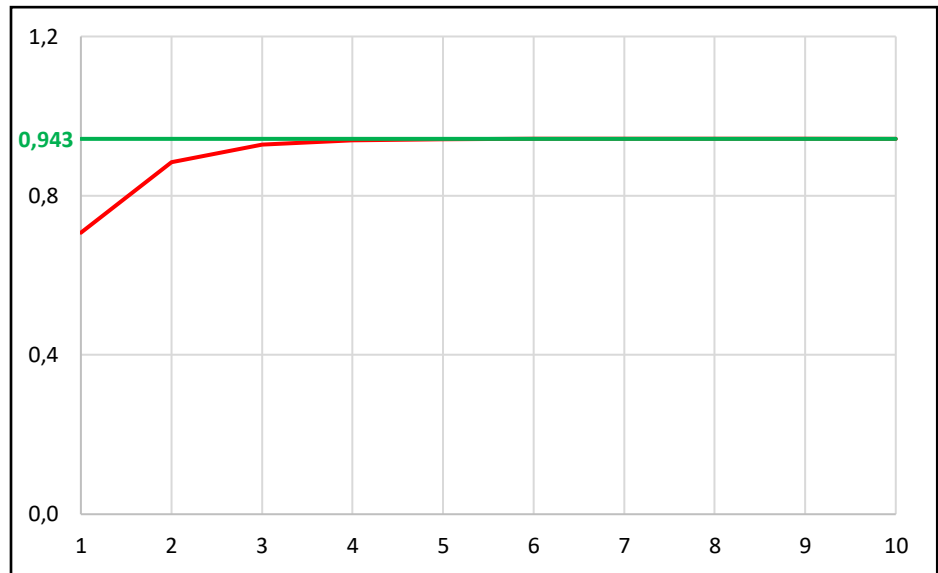


Рис. 2.6. Графік залежності частинних сум ряду (2.4) від кількості доданків

Можна побачити, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду радіусів кіл описаних навколо танграмів в залежності від кількості доданків. За (рис. 2.6) видно, що графік спочатку зростає, а потім поступово набуває постійної швидкості і дуже інтенсивно наближається до значення скінченної суми ряду. Тобто проілюстровано, що ряд збігається до своєї скінченної суми  $S = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

- Ряд діаметрів описаних кіл  $K_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми діаметрів кіл
1	1,414213562
2	1,767766953
3	1,856155301
4	1,878252388
5	1,883776659
6	1,885157727
7	1,885502994
8	1,885589311
9	1,88561089
10	1,885616285

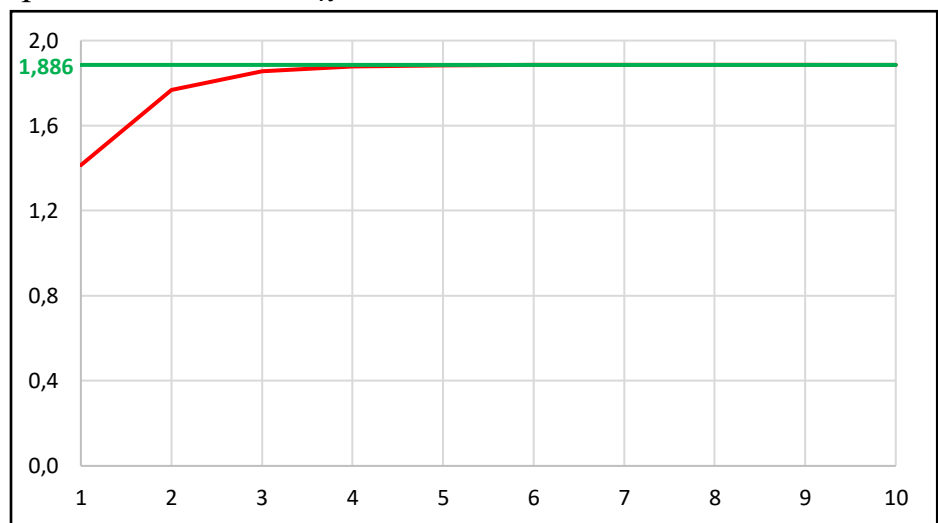


Рис. 2.7. Графік залежності частинних сум ряду (2.5) від кількості доданків

Проаналізувавши графік (рис. 2.7), можна побачити, як змінюється значення частинних сум ряду діаметрів кіл описаних навколо танграмів в залежності від кількості доданків. Помітно, що графік частинних сум ряду (2.5) наближується до значення його скінченної суми досить інтенсивно, тобто геометрично проілюстровано, що ряд збігається до своєї скінченної суми  $S = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ .

- Ряд довжин описаних кіл  $K_n$ :

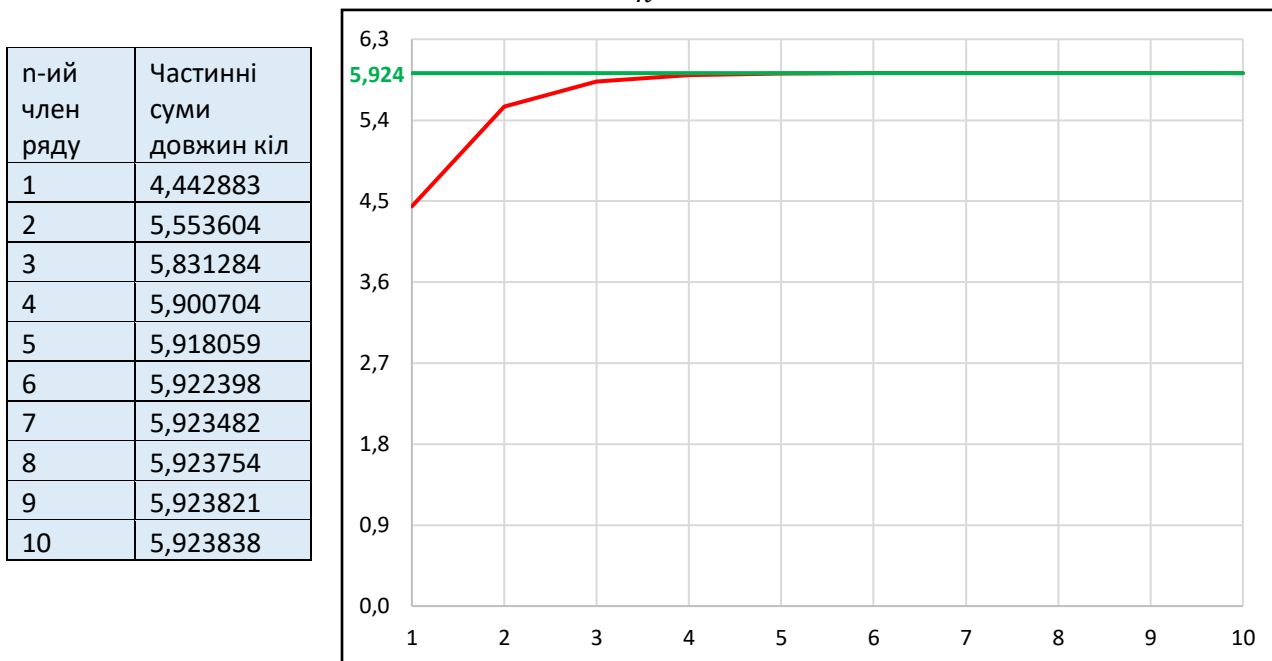


Рис. 2.8. Графік залежності частинних сум ряду (2.6) від кількості доданків

Можна побачити, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. За (рис. 2.8) видно, що графік спочатку різко зростає, а потім поступово набуває постійної швидкості.

Таким чином видно, що графік частинних сум ряду довжин кіл, описаних навколо танграмів, дуже інтенсивно наближується до значення скінченної суми ряду.

Тобто доведено, що ряд довжин кіл збігається до своєї скінченної суми

$$S = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}.$$



- Ряд площ описаних кіл  $K_n$ :

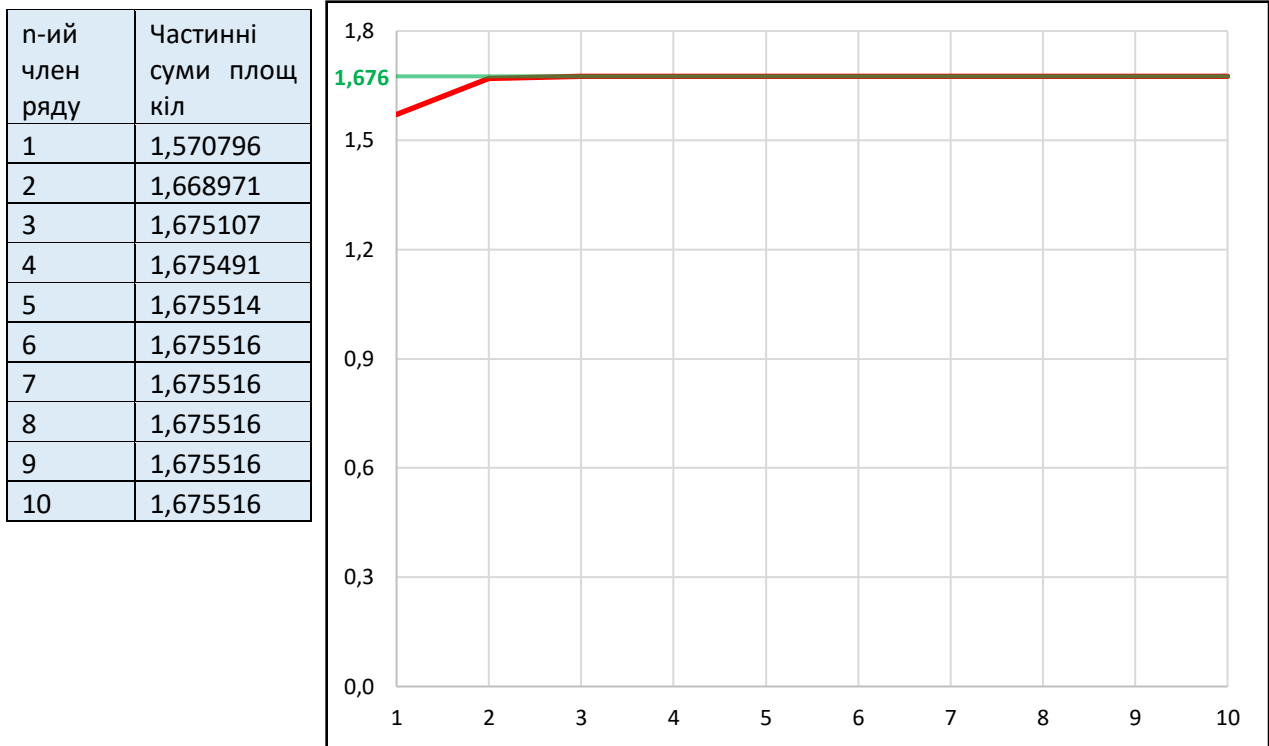


Рис. 2.9. Графік залежності частинних сум ряду (2.7) від кількості доданків

Можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду площ кіл, описаних навколо танграмів, в залежності від кількості доданків (рис. 2.9).

Легко бачити, що графік спочатку незначно зростає, а потім набуває постійної швидкості. Таким чином видно, що графік частинних сум ряду досить інтенсивно наближується до значення скінченної суми ряду.

Тобто доведено, що ряд площ кіл, описаних навколо танграмів, збігається до своєї скінченної суми  $S = \frac{8\pi}{15}$ .

- Ряд відношень відповідних сторін танграмів  $T_n$  до радіусів описаних

кіл  $K_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми відношення сторони танграма до радіуса описаного кола
1	1,414213562
2	4,242640687
3	8,485281374
4	14,14213562
5	21,21320344
6	29,69848481
7	39,59797975
8	50,91168825
9	63,63961031
10	77,78174593

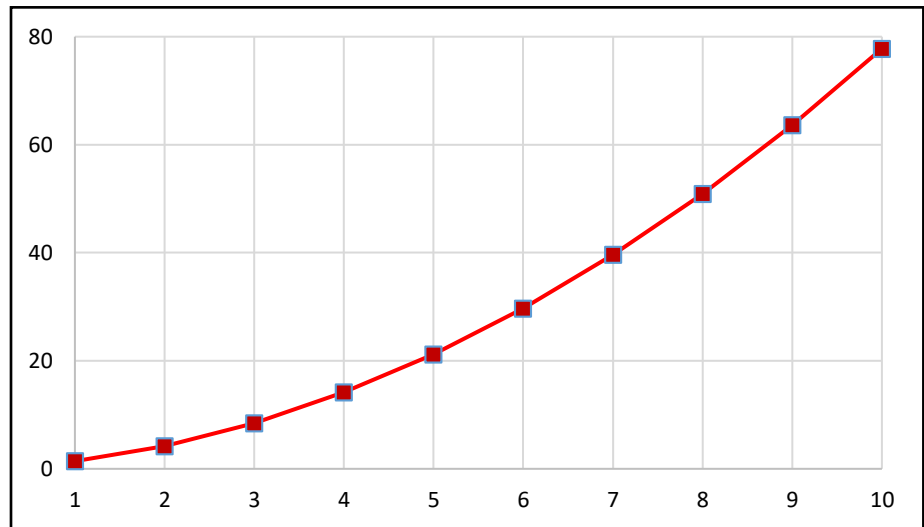


Рис. 2.10.а. Графік залежності частинних сум ряду (2.8) від кількості доданків

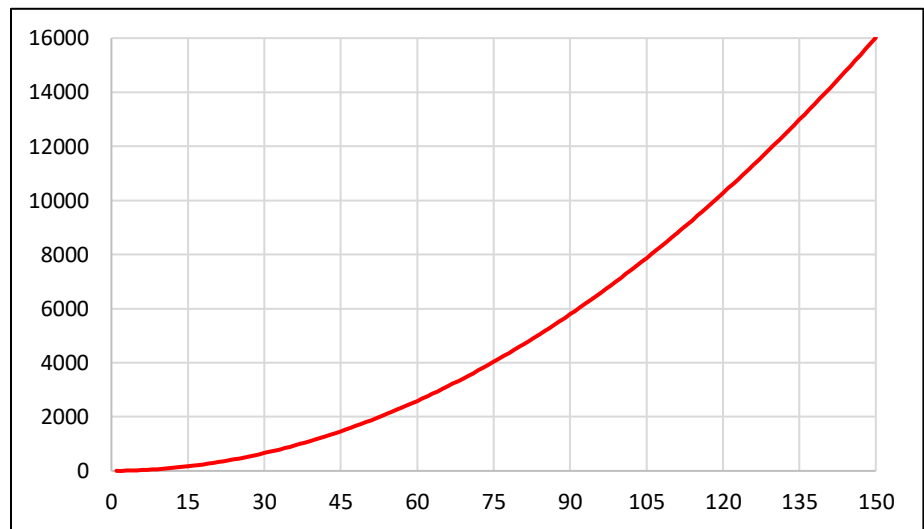


Рис. 2.10.б. Графік залежності частинних сум ряду (2.8) від кількості доданків

Побудувавши графіки частинних сум для 10 (рис. 2.10.а) та 150 (рис. 2.10.б) доданків, можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. Легко бачити, що графіки зростають з постійною швидкістю і не вирівнюються до певного скінченного значення. Таким чином геометрично доведено, що ряд відношення відповідних сторін танграмів до радіусів описаних кіл є розбіжним.

• Ряд відношень відповідних радіусів описаних кіл  $K_n$  до довжин сторін танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми відношення радіуса описаного кола до сторони танграма
1	0,707106781
2	2,121320344
3	4,242640687
4	7,071067812
5	10,60660172
6	14,8492424
7	19,79898987
8	25,45584412
9	31,81980515
10	38,89087297

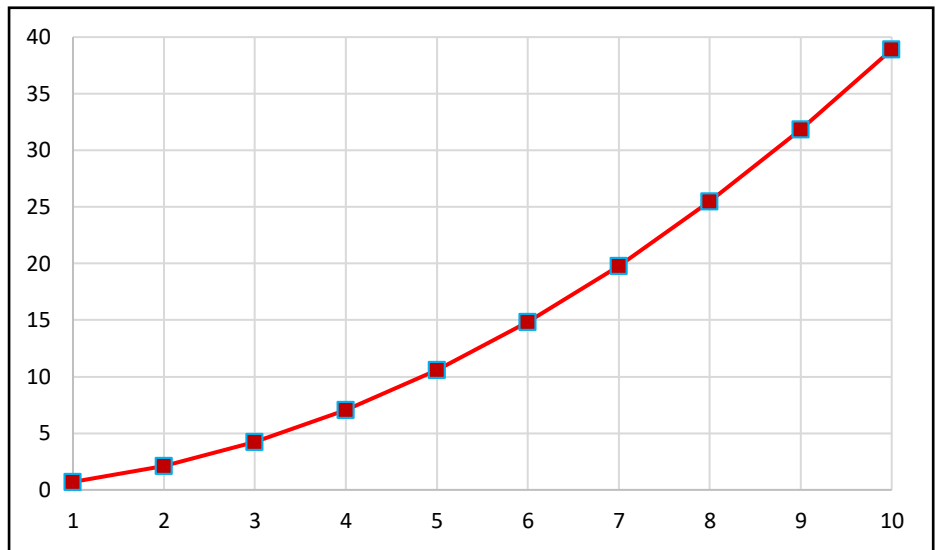


Рис. 2.11.а. Графік залежності частинних сум ряду (2.9) від кількості доданків

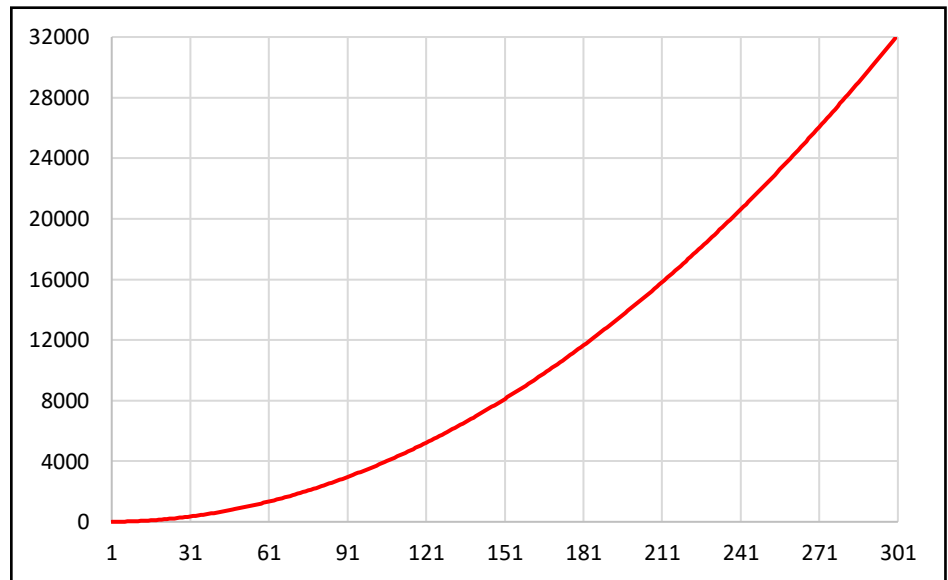


Рис. 2.11.б. Графік залежності частинних сум ряду (2.9) від кількості доданків

Побудувавши графіки частинних сум для 10 (рис. 2.11.а) та 300 (рис. 2.11.б) доданків, можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. Легко бачити, що графіки зростають з постійною швидкістю. Таким чином видно, що ряд (2.9) не збігається до певного скінченного значення суми і є розбіжним.

- Ряд відношень відповідних площ кіл  $K_n$  до площ танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми відношення площі описаного кола до площі танграма
1	1,570796327
2	4,71238898
3	9,424777961
4	15,70796327
5	23,5619449
6	32,98672286
7	43,98229715
8	56,54866776
9	70,68583471
10	86,39379797

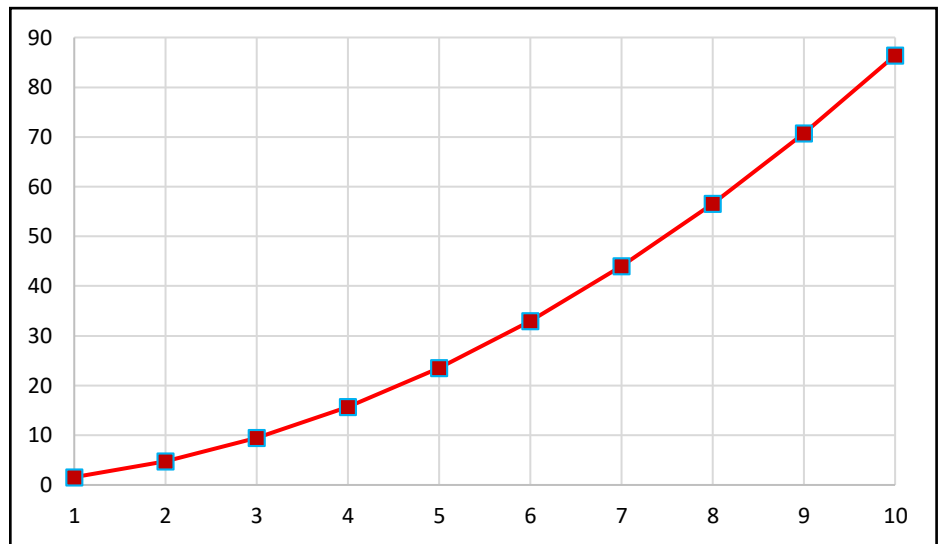


Рис. 2.12.а. Графік залежності частинних сум ряду (2.10) від кількості доданків

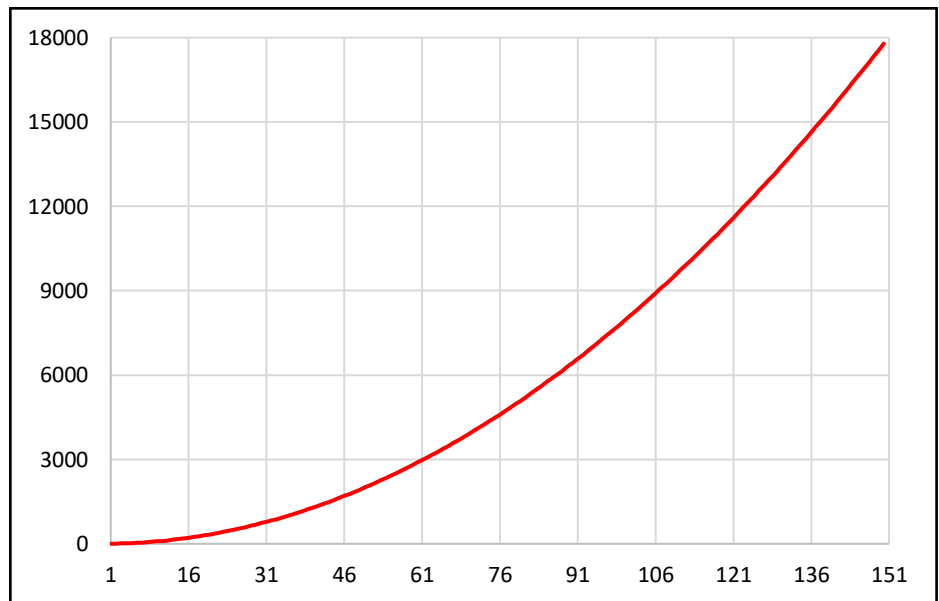


Рис. 2.12.б. Графік залежності частинних сум ряду (2.10) від кількості доданків

Побудувавши графіки частинних сум для 10 (рис. 2.12.а) та 150 (рис. 2.12.б) доданків, можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. Легко бачити, що графік зростає з постійною швидкістю, тобто доведено, що ряд відношення площ описаних кіл до площ танграмів є розбіжним.

## 2.2. Генерація числових рядів за допомогою танграмів та їх паралелограмів

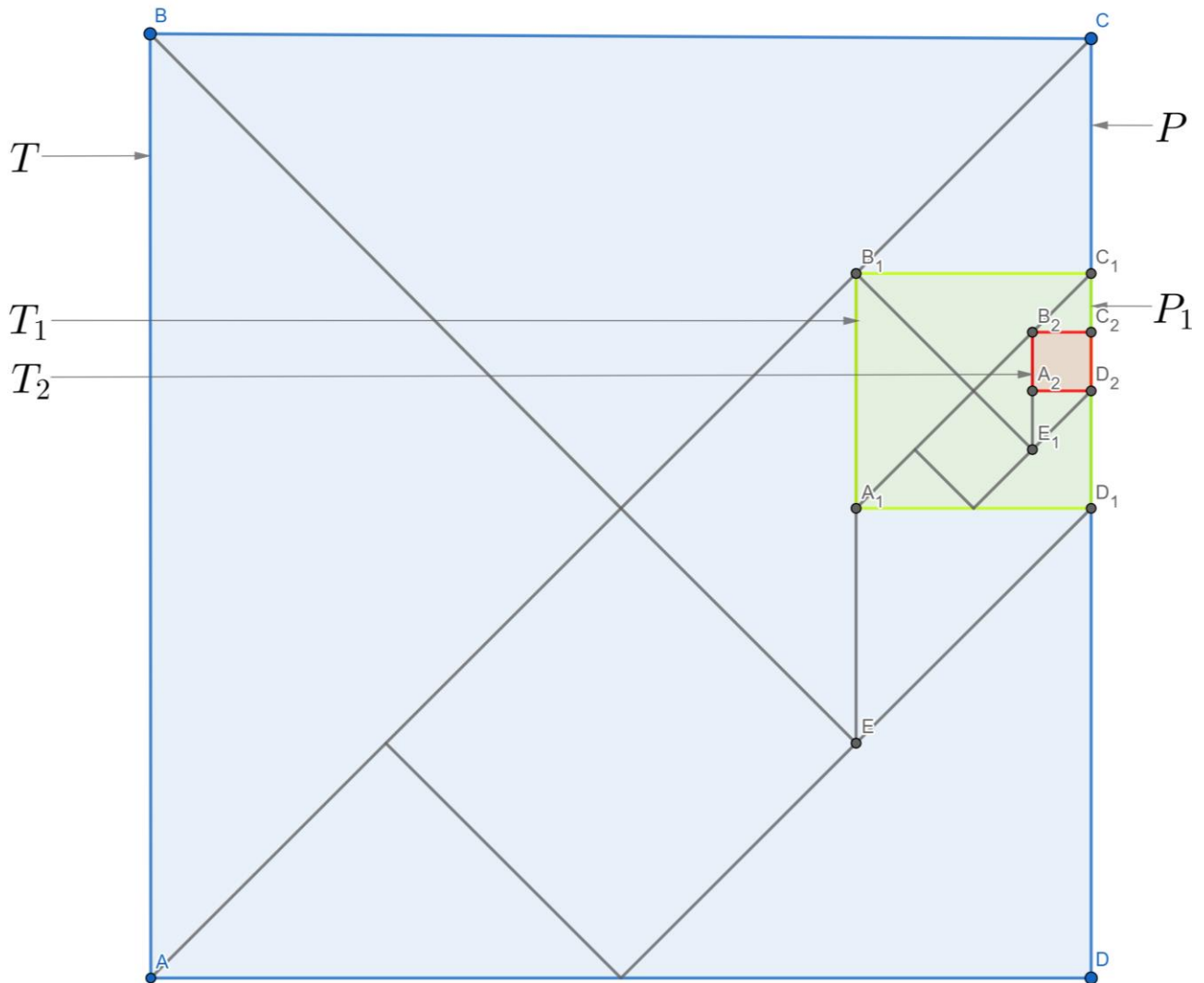


Рис. 2.13. Танграми вписані в паралелограми попередніх танграмів

Розглянемо танграм  $T = ABCD$  (рис. 2.13).

В танграмі  $T$  маємо паралелограм  $P = EB_1CD_1$ . В паралелограм  $P$  впишемо танграм  $T_1$  так, що дві сторони танграма  $T_1$  належать протилежним сторонам паралелограма  $P$ .

Отримали новий танграм  $T_1 = A_1B_1C_1D_1$ . В свою чергу танграм  $T_1$  має паралелограм  $P_1 = E_1B_2C_1D_2$ . Впишемо і в цей паралелограм танграм  $T_2 = A_2B_2C_2D_2$ .

Припускаємо, що дана процедура виконується нескінченну кількість разів.

З цієї умови ми можемо розглянути значну кількість задач, спрямованих на побудову числових рядів за допомогою параметрів елементів танграмів. Завдання полягає в побудові:

1. ряда сторін танграмів  $T_n$ .
2. ряда діагоналей танграмів  $T_n$ .
3. ряда площ танграмів  $T_n$ .
4. ряда висот паралелограмів  $P_n$ .
5. ряда більших сторін паралелограмів  $P_n$ .
6. ряда менших сторін паралелограмів  $P_n$ .
7. ряда площ паралелограмів  $P_n$ .
8. ряда менших діагоналей паралелограмів  $P_n$ .
9. ряда більших діагоналей паралелограмів  $P_n$ .
10. ряда відношень відповідних площ танграмів  $T_n$  до площ паралелограмів  $P_n$ .

Розв'яжемо кожен із запропонованих задач.

Нехай танграм  $T$  має сторону довжиною  $a = 1$ . Діагональ танграма  $T$  можна порахувати за формулою  $d = \sqrt{2}a = \sqrt{2}$ . Очевидно, що площа танграма  $T$  обчислюється наступним чином:  $S = a^2 = 1^2 = 1$ .

Легко бачити, що висота паралелограма  $P$  паралельна стороні танграма  $T$  і обчислюється так:  $h = \frac{1}{4}a = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$ . Більша сторона паралелограма  $P$  дорівнює  $b = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$ . Меншу сторону обчислимо за допомогою діагоналі танграма  $T$ :  $c = \frac{1}{4}d = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Площу паралелограма  $P$  знайдемо за формулою:  $S = b \cdot h$ , де  $b$  – більша сторона паралелограма. Тоді  $S = b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ .

Використовуючи теорему косинусів і враховуючи, що гострий кут між сторонами паралелограма  $45^\circ$  (оскільки діагональ танграма розбиває кут  $90^\circ$  навпіл), обчислимо меншу діагональ паралелограма  $P$ :

$$B_1D_1^2 = B_1C^2 + CD_1^2 - 2 \cdot B_1C \cdot CD_1 \cdot \cos B_1CD_1$$

$$B_1D_1 = \sqrt{B_1C^2 + CD_1^2 - 2 \cdot B_1C \cdot CD_1 \cdot \cos B_1CD_1}$$

$$B_1D_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 45^\circ}$$

$$B_1D_1 = \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Враховуючи, що в паралелограмі сума кутів, що прилягають до однієї сторони дорівнює  $180^\circ$ , то  $CD_1E = 180^\circ - B_1CD_1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ . Тоді аналогічно обчислимо більшу діагональ паралелограма  $P$ :

$$CE^2 = CD_1^2 + ED_1^2 - 2 \cdot CD_1 \cdot ED_1 \cdot \cos CD_1E$$

$$CE = \sqrt{CD_1^2 + ED_1^2 - 2 \cdot CD_1 \cdot ED_1 \cdot \cos CD_1E}$$

$$CE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 135^\circ}$$

$$CE = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Обчислимо відношення площі танграма  $T$  до площі паралелограма  $P$ :

$$\frac{S_{\text{танграма}}}{S_{\text{паралелограма}}} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

Перші елементи шуканих рядів знайдені. Тепер необхідно знайти залежність між елементами танграма  $T$  і елементами танграма  $T_1$ . Для цього відшукаємо залежність між стороною  $a$  танграма  $T$  і стороною  $a_1$  танграма  $T_1$ .

Легко бачити, що сторона танграма  $T_1$  паралельна стороні танграма  $T$ . А значить

$$a_1 = B_1C_1 = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4}a.$$

Очевидно, що дана залежність буде виконуватись для всіх танграмів  $T_n$ . І дійсно, отримана залежність дозволяє знайти всі шукані елементи танграмів  $T_n$  та паралелограмів  $P_n$ , в які вони вписані.

Отже, маємо такі дані за кожним танграмом:

- Танграм  $T$ : сторона дорівнює 1, діагональ дорівнює  $\sqrt{2}$ , площа танграма дорівнює 1, висота паралелограма дорівнює  $\frac{1}{4}$ , більша сторона паралелограма дорівнює  $\frac{1}{2}$ , а менша сторона  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ , площа паралелограма дорівнює  $\frac{1}{8}$ , менша діагональ паралелограма дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , а більша діагональ  $-\frac{\sqrt{10}}{4}$ .
- Танграм  $T_1$ : сторона дорівнює  $\frac{1}{4}$ , діагональ дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{16}$ , висота паралелограма дорівнює  $\frac{1}{16}$ , більша сторона паралелограма дорівнює  $\frac{1}{8}$ , а менша сторона  $-\frac{\sqrt{2}}{16}$ , площа паралелограма дорівнює  $\frac{1}{128}$ , менша діагональ паралелограма дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{16}$ , а більша діагональ  $-\frac{\sqrt{10}}{16}$ .
- Танграм  $T_2$ : сторона дорівнює  $\frac{1}{16}$ , діагональ дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{16}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{256}$ , висота паралелограма дорівнює  $\frac{1}{64}$ , більша сторона



паралелограма дорівнює  $\frac{1}{32}$ , а менша сторона  $-\frac{\sqrt{2}}{64}$ , площа паралелограма дорівнює  $\frac{1}{2048}$ , менша діагональ паралелограма дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{64}$ , а більша діагональ  $-\frac{\sqrt{10}}{64}$ .

- Танграм  $T_3$ : сторона дорівнює  $\frac{1}{64}$ , діагональ дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{64}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{4096}$ , висота паралелограма дорівнює  $\frac{1}{256}$ , більша сторона паралелограма дорівнює  $\frac{1}{128}$ , а менша сторона  $-\frac{\sqrt{2}}{256}$ , площа паралелограма дорівнює  $\frac{1}{32768}$ , менша діагональ паралелограма дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{256}$ , а більша діагональ  $-\frac{\sqrt{10}}{256}$ .

Таким чином, можемо записати наступні ряди:

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \quad (2.11)$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

$$\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{64} + \dots \quad (2.12)$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} + \dots \quad (2.13)$$

- Ряд висот паралелограмів  $P_n$ :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots \quad (2.14)$$

- Ряд більших сторін паралелограмів  $P_n$ :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \dots \quad (2.15)$$

- Ряд менших сторін паралелограмів  $P_n$ :

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{64} + \frac{\sqrt{2}}{256} + \dots \quad (2.16)$$

- Ряд площ паралелограмів  $P_n$ :

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{128} + \frac{1}{2048} + \frac{1}{32768} + \dots (2.17)$$

- Ряд менших діагоналей паралелограмів  $P_n$ :

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{64} + \frac{\sqrt{2}}{256} + \dots (2.18)$$

- Ряд більших діагоналей паралелограмів  $P_n$ :

$$\frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{16} + \frac{\sqrt{10}}{64} + \frac{\sqrt{10}}{256} + \dots (2.19)$$

Запишемо отримані ряди у вигляді їх «сігма-моделей»:

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (2.11')$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (2.12')$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} (2.13')$$

- Ряд висот паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (2.14')$$

- Ряд більших сторін паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (2.15')$$

- Ряд менших сторін паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (2.16')$$

- Ряд площ паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} \quad (2.17')$$

- Ряд менших діагоналей паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (2.18')$$

- Ряд більших діагоналей паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (2.19')$$

Після перетворень отримаємо ці ряди в наступному вигляді:

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n} \quad (2.11'')$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{5-4n}{2}} \quad (2.12'')$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{4-4n} \quad (2.13'')$$

- Ряд висот паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} \quad (2.14'')$$

- Ряд більших сторін паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-2n} \quad (2.15'')$$

- Ряд менших сторін паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1-4n}{2}} \quad (2.16'')$$

- Ряд площ паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-4n} \quad (2.17'')$$

- Ряд менших діагоналей паралелограмів  $P_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1-4n}{2}} \quad (2.18'')$$

- Ряд більших діагоналей паралелограмів  $P_n$ :

$$\sqrt{5} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1-4n}{2}} \quad (2.19'')$$

- Ряд відношень відповідних площ танграмів  $T_n$  до площ паралелограмів  $P_n$ :

Позначимо відношення через  $M$ . Тоді отримаємо:

$$M_n = \frac{2^{4-4n}}{2^{1-4n}} = 2^3 = 8.$$

Отже, маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} 8n \quad (2.20)$$

Щоб дослідити ряди (2.11-2.20) на збіжність, перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності рядів.

- Ряд сторін танграмів  $T_n$  (2.11):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$  (2.12):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{5-4n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$  (2.13):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{4-4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд висот паралелограмів  $P_n$  (2.14):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд більших сторін паралелограмів  $P_n$  (2.15):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд менших сторін паралелограмів  $P_n$  (2.16):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1-4n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд площ паралелограмів  $P_n$  (2.17):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1-4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд менших діагоналей паралелограмів  $P_n$  (2.18):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1-4n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд більших діагоналей паралелограмів  $P_n$  (2.19):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5} \cdot 2^{\frac{1-4n}{2}} = \sqrt{5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = \sqrt{5} \cdot 0 = 0$$

Для рядів (2.11-2.19) необхідна умова збіжності ряду виконується, а значить ряди можуть бути збіжними, а можуть бути розбіжними.

Тому дослідимо одержані числові ряди на збіжність за допомогою достатньої ознаки. Вона полягає в тому що, якщо ряд збіжний, то виконується рівність:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , де  $S$  має скінченне значення, а  $S_n$  – частинні суми ряду, які обчислюються за формулою суми геометричної прогресії. Оскільки ряди (2.11-2.19) є рядами геометричної прогресії, то  $S_n$  (частинні суми ряду) обчислюються за формулою:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

- Ряд сторін танграмів  $T_n$  (2.11):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n} \right) = \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1 \right) = \\ &= \frac{4}{3} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} \right) = \frac{4}{3} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} \right) = \frac{4}{3} (1 - 0) = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{4}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.11) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$  (2.12):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \\ &= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \sqrt{2} \cdot \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1 \right) = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} (1 - 0) = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot 1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.12) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд площ танграмів  $T_n$  (2.13):

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{16}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n}{\frac{15}{16}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{16^n}}{\frac{15}{16}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 16^{-n}}{\frac{15}{16}} = \frac{16}{15} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 16^{-n} \right) = \frac{16}{15} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 16^{-n} + 1 \right) = \\
&= \frac{16}{15} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 16^{-n} \right) = \frac{16}{15} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 16^{-n} \right) = \frac{16}{15} (1 - 0) = \frac{16}{15} \cdot 1 = \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{16}{15}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.13)

збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд висот паралелограмів  $P_n$  (2.14):

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n} \right) = \frac{1}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1 \right) = \\
&= \frac{1}{3} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} \right) = \frac{1}{3} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} \right) = \frac{1}{3} (1 - 0) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{1}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.14)

збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд більших сторін паралелограмів  $P_n$  (2.15):

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n} \right) = \frac{2}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1 \right) = \\
&= \frac{2}{3} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} \right) = \frac{2}{3} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} \right) = \frac{2}{3} (1 - 0) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{2}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.15)

збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд менших сторін паралелограмів  $P_n$  (2.16):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{3} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} (1 - 0) = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{\sqrt{2}}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.16)

збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд площ паралелограмів  $P_n$  (2.17):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{8} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{8} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n}{\frac{15}{16}} = \frac{1}{8} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{16^n}}{\frac{15}{16}} = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 16^{-n}}{\frac{15}{16}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{15} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 16^{-n}\right) = \frac{2}{15} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} - 16^{-n} + 1\right) = \\ &= \frac{2}{15} \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 16^{-n}\right) = \frac{2}{15} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 16^{-n}\right) = \frac{2}{15} (1 - 0) = \frac{2}{15} \cdot 1 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{2}{15}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.17)

збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд менших діагоналей паралелограмів  $P_n$  (2.18):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1 \right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} (1 - 0) = \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{\sqrt{2}}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.18) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд більших діагоналей паралелограмів  $P_n$  (2.19):

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \\
&= \frac{\sqrt{10}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4^{-n}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{4}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 4^{-n} \right) = \frac{\sqrt{10}}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} + 1 \right) = \\
&= \frac{\sqrt{10}}{3} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 4^{-n} \right) = \frac{\sqrt{10}}{3} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} \right) = \frac{\sqrt{10}}{3} (1 - 0) = \frac{\sqrt{10}}{3}
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{\sqrt{10}}{3}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.19) збігається до своєї скінченної суми.

Отже, ряди (2.11-2.19) є збіжними.

Тепер дослідимо ряд (2.20) на збіжність за допомогою необхідної ознаки.

Ряд відношень відповідних площ танграмів  $T_n$  до площ паралелограмів  $P_n$  (2.20):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 8n = \lim_{n \rightarrow \infty} \infty = \infty$$

Отже, необхідна ознака збіжності ряду не виконується, значить ряд (2.20) є розбіжним.

Побудуємо графіки залежності частинних сум ряду від кількості доданків.

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми довжин сторін танграмів
1	1
2	1,25
3	1,3125
4	1,328125
5	1,33203125
6	1,333007813
7	1,333251953
8	1,333312988
9	1,333328247
10	1,333332062

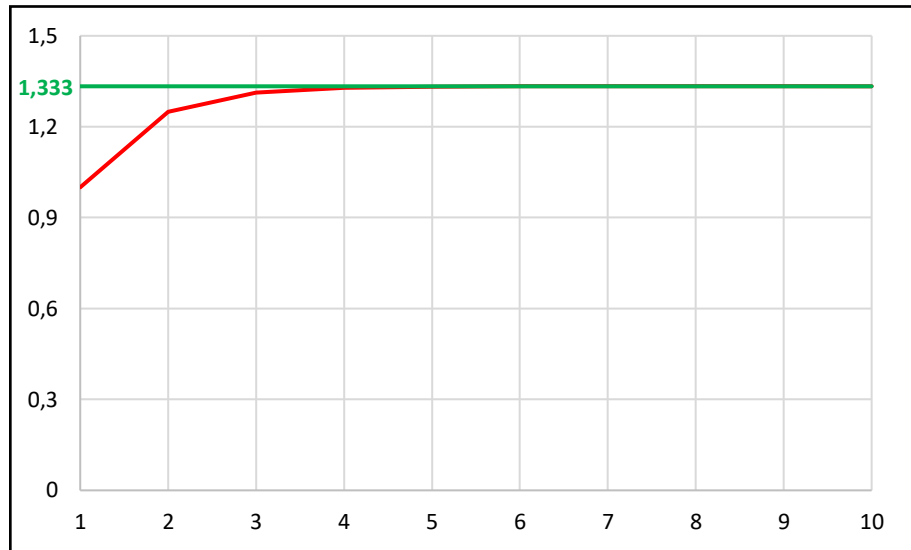


Рис. 2.14. Графік залежності частинних сум ряду (2.11) від кількості доданків

Можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду сторін танграмів в залежності від кількості доданків (рис. 2.14). Легко бачити, що графік спочатку різко зростає, а потім поступово набуває постійної швидкості і інтенсивно наближується до значення скінченної суми ряду  $S = \frac{4}{3}$ .

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми довжин діагоналей танграмів
1	1,414213562
2	1,767766953
3	1,856155301
4	1,878252388
5	1,883776659
6	1,885157727
7	1,885502994
8	1,885589311
9	1,88561089
10	1,885616285

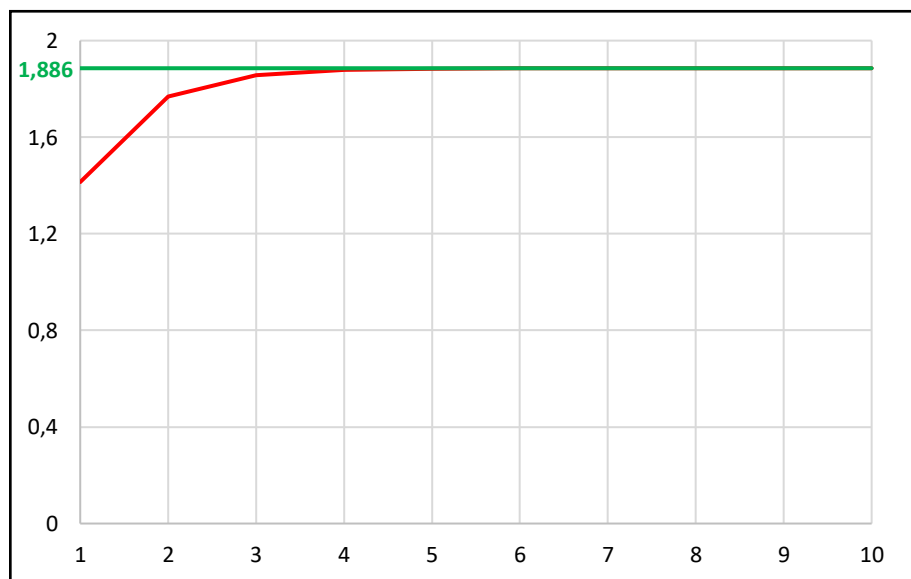


Рис. 2.15. Графік залежності частинних сум ряду (2.12) від кількості доданків

Проаналізувавши графік (рис. 2.15), можна побачити, як змінюється значення частинних сум в залежності від кількості доданків. Помітно, що графік частинних сум ряду (2.12) дуже інтенсивно наближується до значення його скінченної суми.

Таким чином геометрично проілюстровано, що ряд збігається до своєї скінченної суми  $S = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ .

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми площ танграмів
1	1
2	1,0625
3	1,06640625
4	1,066650391
5	1,066665649
6	1,066666603
7	1,066666663
8	1,066666666
9	1,066666667
10	1,066666667

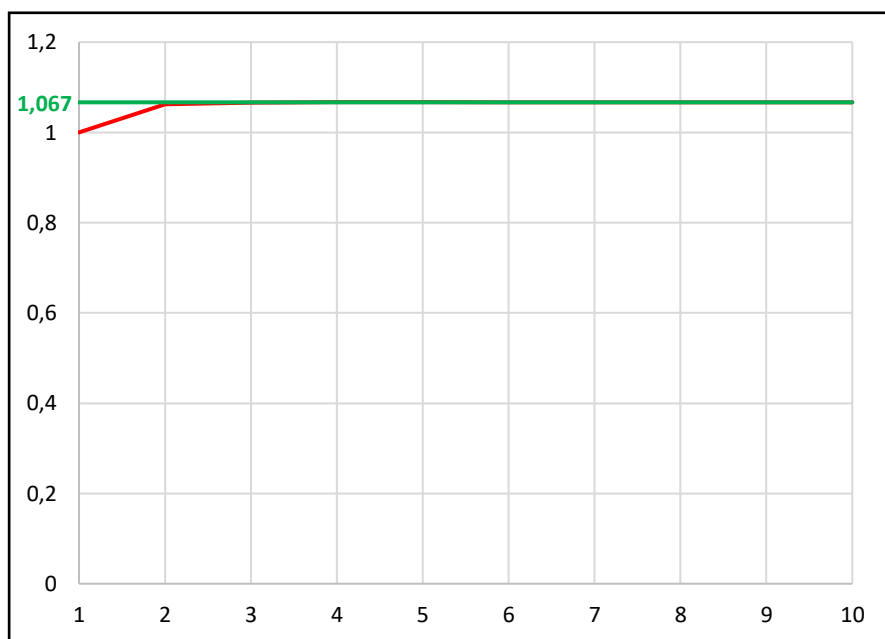


Рис. 2.16. Графік залежності частинних сум ряду (2.13) від кількості доданків

Побудувавши графік частинних сум для 10 доданків, можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків (рис. 2.16). Легко бачити, що графік спочатку трохи зростає, а потім взагалі поступово набуває постійної швидкості. Таким чином помітно, що графік дуже інтенсивно наближується до значення скінченної суми ряду, тобто доведено, що ряд площ танграмів збігається до значення  $S = \frac{16}{15}$ .

- Ряд висот паралелограмів  $P_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми висот паралелограмів
1	0,25
2	0,3125
3	0,328125
4	0,33203125
5	0,333007813
6	0,333251953
7	0,333312988
8	0,333328247
9	0,333332062
10	0,333333015

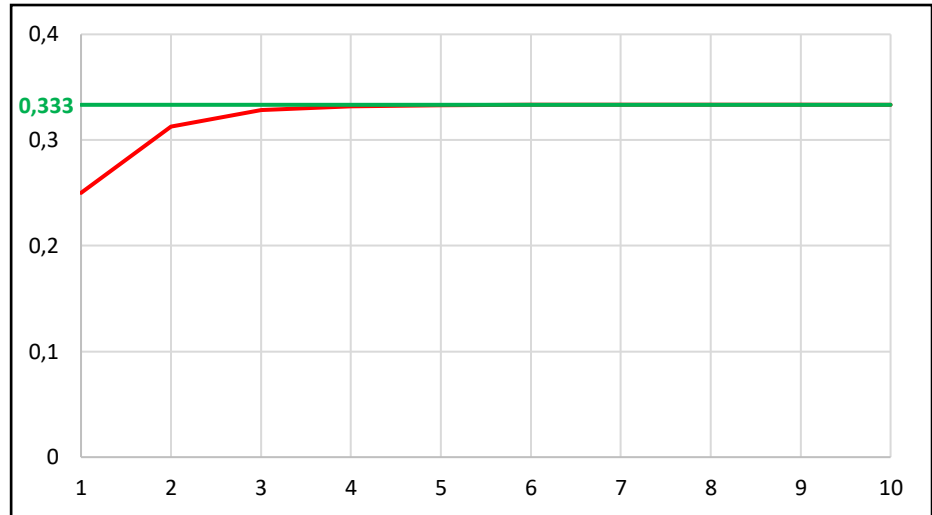


Рис. 2.17. Графік залежності частинних сум ряду (2.14) від кількості доданків

Можна побачити, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. За (рис. 2.17) видно, що графік спочатку поступово зростає, а потім взагалі набуває постійної швидкості і досить інтенсивно наближується до значення своєї скінченної суми  $S = \frac{1}{3}$ .

- Ряд більших сторін паралелограмів  $P_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми більших сторін паралелограмів
1	0,5
2	0,625
3	0,65625
4	0,6640625
5	0,666015625
6	0,666503906
7	0,666625977
8	0,666656494
9	0,666664124
10	0,666666031

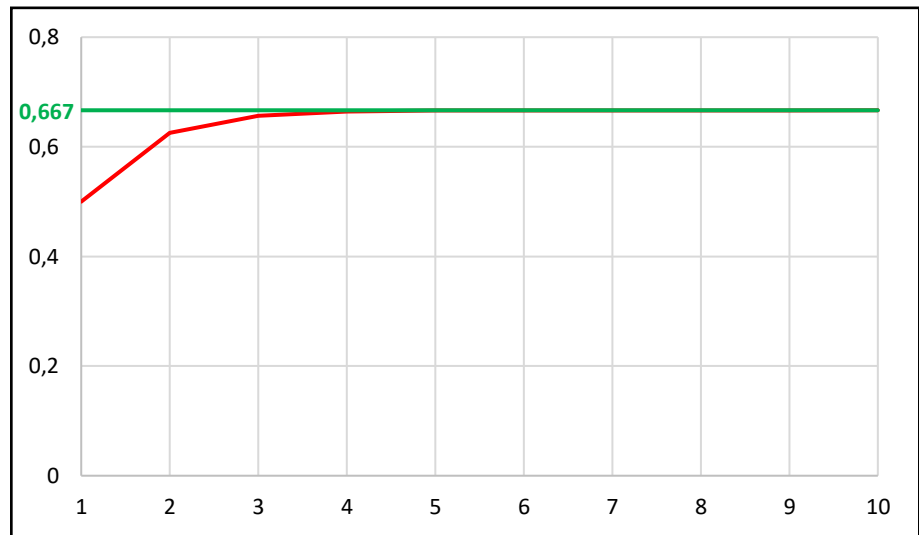


Рис. 2.18. Графік залежності частинних сум ряду (2.15) від кількості доданків

Побудувавши графік (рис. 2.18), можна побачити, що графік спочатку стрімко зростає, а зі збільшенням кількості доданків поступово набуває постійної швидкості і інтенсивно наближується до скінченного значення суми ряду  $S = \frac{2}{3}$ .

- Ряд менших сторін паралелограмів  $P_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми менших сторін паралелограмів
1	0,353553391
2	0,441941738
3	0,464038825
4	0,469563097
5	0,470944165
6	0,471289432
7	0,471375749
8	0,471397328
9	0,471402723
10	0,471404071

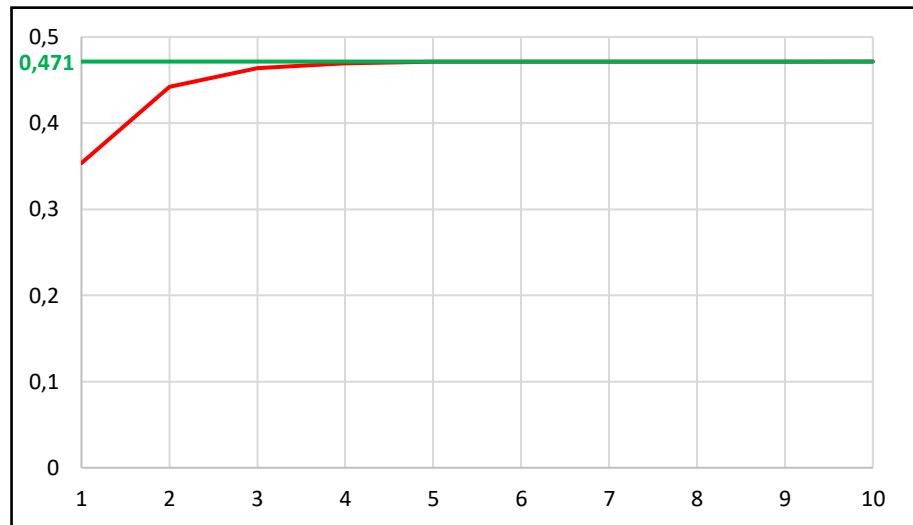


Рис. 2.19. Графік залежності частинних сум ряду (2.16) від кількості доданків

За (рис. 2.19) видно, що графік із збільшенням кількості доданків спочатку зростає, а потім інтенсивно наближується до значення скінченної суми  $S = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

- Ряд площ паралелограмів  $P_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми площ паралелограмів
1	0,125
2	0,1328125
3	0,133300781
4	0,133331299
5	0,133333206
6	0,133333325
7	0,133333333
8	0,133333333
9	0,133333333
10	0,133333333

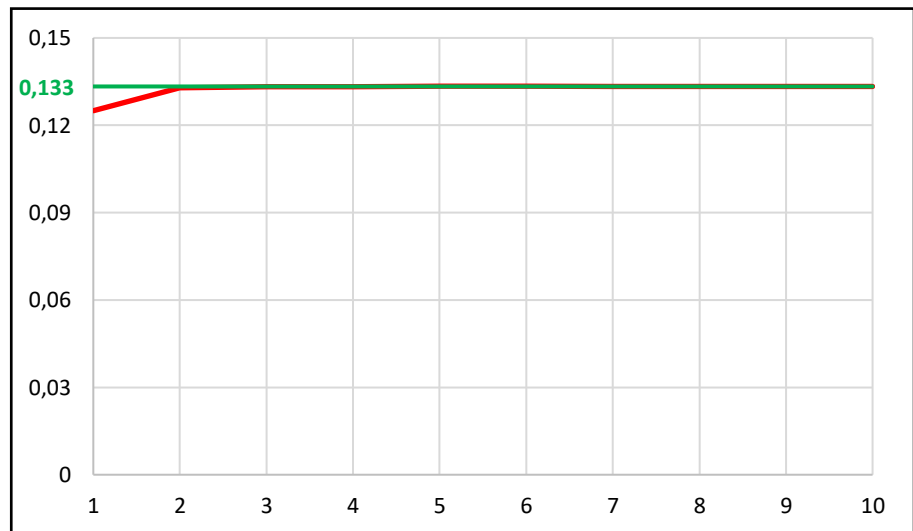


Рис. 2.20. Графік залежності частинних сум ряду (2.17) від кількості доданків

За (рис. 2.20) видно, що графік зростає на початку, а потім і зовсім набуває постійної швидкості і наближується до значення скінченної суми ряду  $S = \frac{2}{15}$ .

- Ряд менших діагоналей паралелограмів  $P_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми менших діагоналей паралелограмів
1	0,353553391
2	0,441941738
3	0,464038825
4	0,469563097
5	0,470944165
6	0,471289432
7	0,471375749
8	0,471397328
9	0,471402723
10	0,471404071

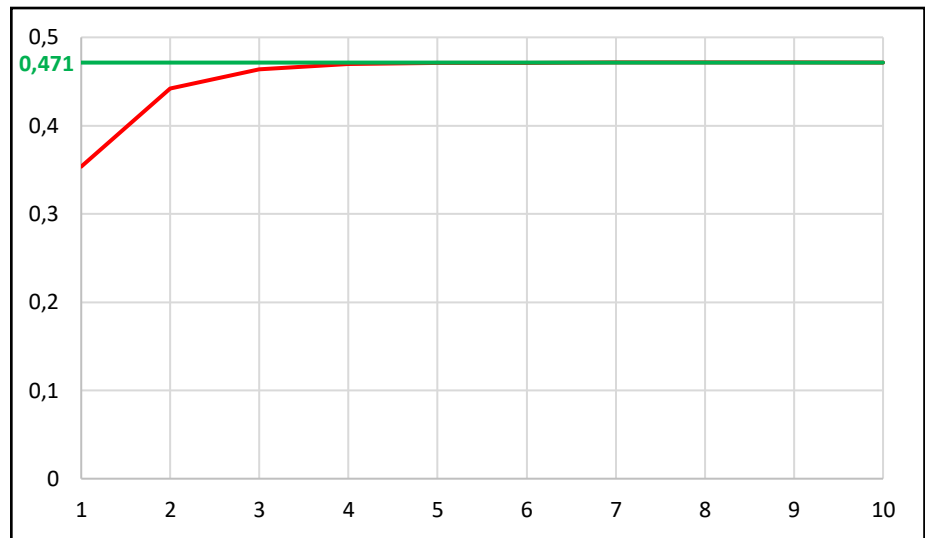


Рис. 2.21. Графік залежності частинних сум ряду (2.18) від кількості доданків

Можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду сторін танграмів в залежності від кількості доданків (рис. 2.21). Легко бачити, що графік спочатку стрімко зростає, а потім набуває постійної швидкості і інтенсивно наближується до значення скінченної суми ряду. Тобто ряд збігається до значення скінченної суми  $S = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

- Ряд більших діагоналей паралелограмів  $P_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми більших діагоналей паралелограмів
1	0,790569415
2	0,988211769
3	1,037622357
4	1,049975004
5	1,053063166
6	1,053835207
7	1,054028217
8	1,054076469
9	1,054088532
10	1,054091548

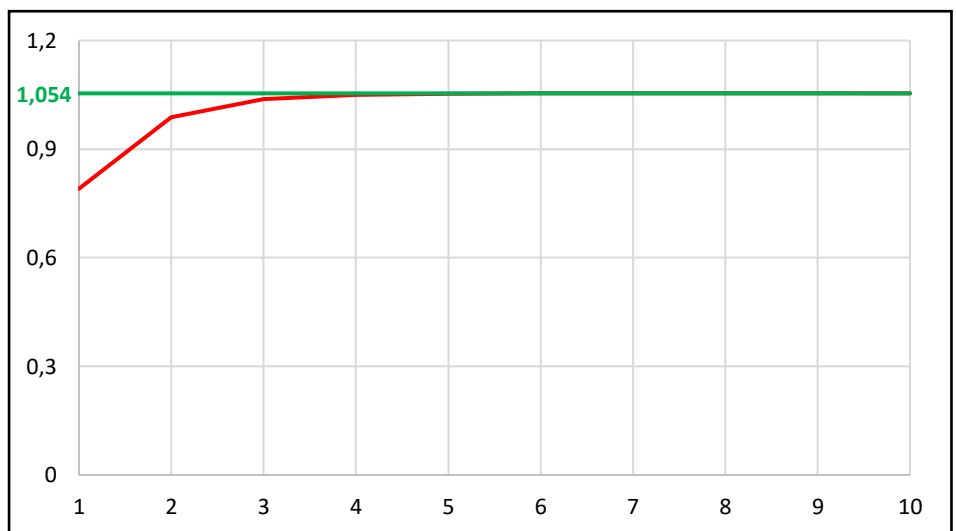


Рис. 2.22. Графік залежності частинних сум ряду (2.19) від кількості доданків

Проаналізувавши графік (рис. 2.22), можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. Видно, що графік спочатку стрімко зростає, а потім поступово набуває постійної швидкості і інтенсивно наближується до значення скінченної суми  $S = \frac{\sqrt{10}}{3}$ .

• Ряд відношень відповідних площ танграмів  $T_n$  до площ паралелограмів  $P_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми відношення площі танграма до площі паралелограма
1	8
2	24
3	48
4	80
5	120
6	168
7	224
8	288
9	360
10	440

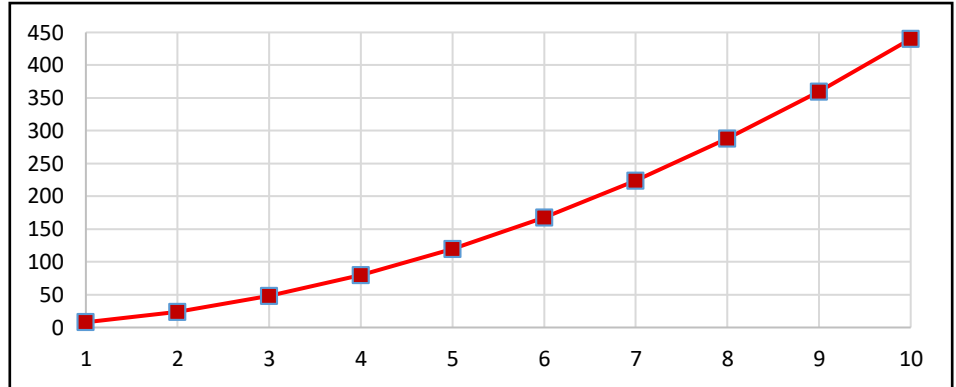


Рис. 2.23.а. Графік залежності частинних сум ряду (2.20) від кількості доданків

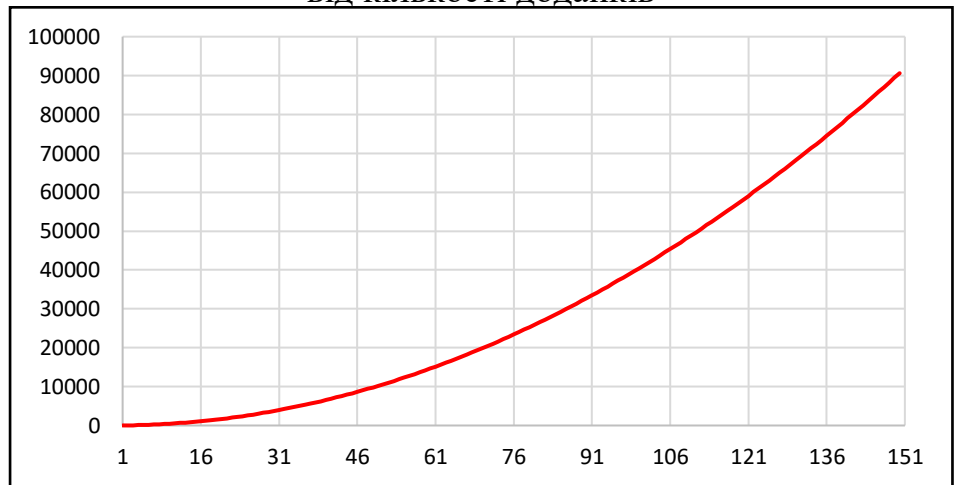


Рис. 2.23.б. Графік залежності частинних сум ряду (2.20) від кількості доданків

Побудувавши графік частинних сум для 10 (рис. 2.23.а) та 150 (рис. 2.23.б) доданків, можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. Легко бачити, що графіки зростають з постійною швидкістю. Таким чином доводиться, що ряд (2.20) не збігається до певного значення скінченної суми, а отже є розбіжним.

### 2.3. Генерація числових рядів за допомогою танграмів та вписаних кіл.

Розглянемо танграм  $T=ABCD$ . В цей танграм впишемо коло  $K$  з центром в точці  $C_1$ . В квадрат, який є елементом танграма  $T$ , впишемо танграм  $T_1 = A_1B_1C_1D_1$ , в який в свою чергу також впишемо коло  $K_1$  з центром в точці  $C_2$  (рис. 2.24).

Припускаємо, що дана процедура виконується нескінченну кількість разів.

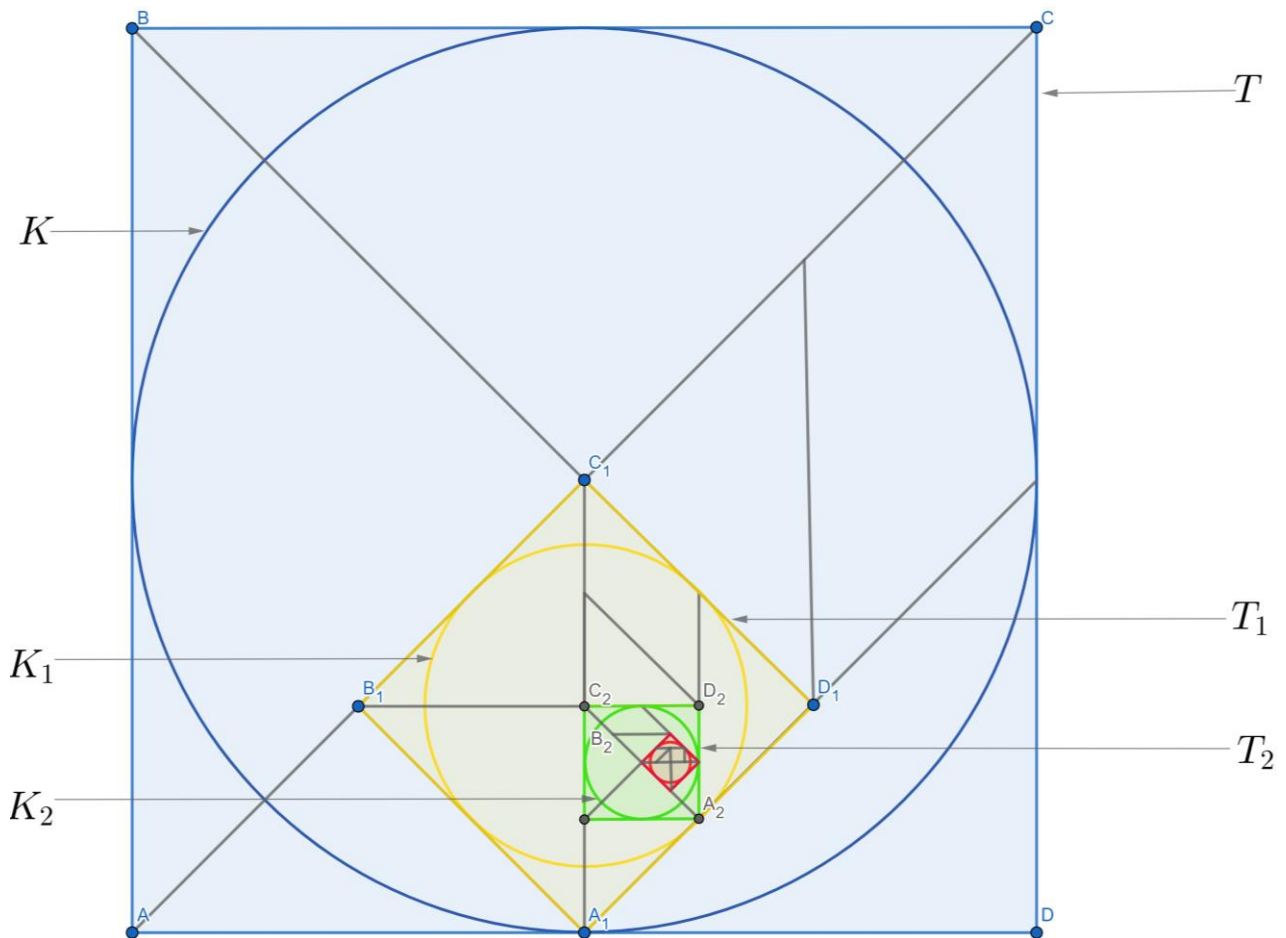


Рис. 2.24. Кола вписані в танграми

З цієї умови ми можемо розглянути значну кількість задач, спрямованих на побудову числових рядів за допомогою параметрів елементів танграмів. Завдання полягає в побудові:

1. ряда сторін танграмів  $T_n$ .



2. ряда діагоналей танграмів  $T_n$ .
3. ряда площ танграмів  $T_n$ .
4. ряда радіусів вписаних кіл  $K_n$ .
5. ряда діаметрів вписаних кіл  $K_n$ .
6. ряда довжин вписаних кіл  $K_n$ .
7. ряда площ вписаних кіл  $K_n$ .
8. ряда відношень відповідних сторін танграмів  $T_n$  до радіусів вписаних кіл  $K_n$ .
9. ряда відношень відповідних радіусів вписаних кіл  $K_n$  до довжин сторін танграмів  $T_n$ .
10. ряда відношень відповідних площ кіл  $K_n$  до площ танграмів  $T_n$ .

Розв'яжемо кожен із запропонованих задач.

Нехай танграм  $K$  має сторону довжиною  $a = 1$ . Діагональ танграма  $T$  можна порахувати за формулою  $d = \sqrt{2}a = \sqrt{2}$ . Очевидно, що площа танграма  $T$  обчислюється наступним чином:  $S = a^2 = 1^2 = 1$ .

Радіус вписаного кола  $K$  (за формулою радіуса кола вписаного в квадрат) дорівнює:  $r = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ . Діаметр вписаного кола  $K$  легко порахувати за формулою:  $D = 2r = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ . Довжина кола  $K$ , вписаного в танграм  $K$ , обчислюється так:  $C = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$ .

Очевидно, що площу вписаного кола  $K$  можна легко порахувати наступним чином:  $S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ .

Далі обчислимо для танграма  $T$  відношення таких елементів:

- Відношення довжини сторони танграма  $T$  до радіуса вписаного кола  $K$ :

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

- Відношення радіуса вписаного кола  $K$  до довжини сторони танграма  $T$ :

$$\frac{r}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

- Відношення площі кола  $K$  до площі танграма  $T$ :

$$\frac{S_{\text{кола}}}{S_{\text{танграма}}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$$

Перші елементи шуканих рядів знайдені. Тепер необхідно знайти залежність між елементами танграма  $T$  і елементами танграма  $T_1$ . Для цього відшукаємо залежність між стороною  $a$  танграма  $T$  і стороною  $a_1$  танграма  $T_1$ .

Виразимо головну діагональ танграма  $T$  через його сторону  $AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}a$ . Очевидно, що відрізок  $B_1C_1 = \frac{1}{4}AC$ . Враховуючи попередню рівність, будемо мати  $B_1C_1 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{4}AB$ .

Тоді, маємо рівність:

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}a$$

Очевидно, що дана залежність буде виконуватись для всіх танграмів  $T_n$ . І дійсно, дана залежність дозволяє знайти всі шукані елементи танграмів  $T_n$  та кіл  $K_n$ , вписаних в них.

Отже, маємо такі дані за кожним танграмом:

- Танграм  $T$ : сторона дорівнює 1, діагональ дорівнює  $\sqrt{2}$ , площа танграма дорівнює 1, радіус вписаного кола дорівнює  $\frac{1}{2}$ , діаметр вписаного кола дорівнює 1, довжина кола дорівнює  $\pi$ , а площа кола дорівнює  $\frac{\pi}{4}$ .

- Танграм  $T_1$ : сторона дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , діагональ дорівнює  $\frac{1}{2}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{8}$ , радіус вписаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ , діаметр вписаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , довжина кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ , а площа кола дорівнює  $\frac{\pi}{32}$ .
- Танграм  $T_2$ : сторона дорівнює  $\frac{1}{8}$ , діагональ дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{64}$ , радіус вписаного кола дорівнює  $\frac{1}{16}$ , діаметр вписаного кола дорівнює  $\frac{1}{8}$ , довжина кола дорівнює  $\frac{\pi}{8}$ , а площа кола дорівнює  $\frac{\pi}{256}$ .
- Танграм  $T_3$ : сторона дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{32}$ , діагональ дорівнює  $\frac{1}{16}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{512}$ , радіус вписаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{64}$ , діаметр вписаного кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{32}$ , довжина кола дорівнює  $\frac{\sqrt{2}\pi}{32}$ , а площа кола дорівнює  $\frac{\pi}{2048}$ .
- Танграм  $T_4$ : сторона дорівнює  $\frac{1}{64}$ , діагональ дорівнює  $\frac{\sqrt{2}}{64}$ , площа танграма дорівнює  $\frac{1}{4096}$ , радіус вписаного кола дорівнює  $\frac{1}{128}$ , діаметр вписаного кола дорівнює  $\frac{1}{64}$ , довжина кола дорівнює  $\frac{\pi}{64}$ , а площа кола дорівнює  $\frac{\pi}{16384}$ .

Таким чином, можемо записати наступні ряди:

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{32} + \frac{1}{64} + \dots (2.21)$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

$$\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{2}}{64} + \dots (2.22)$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \frac{1}{4096} + \dots (2.23)$$

- Ряд радіусів вписаних кіл  $K_n$ :

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{2}}{64} + \frac{1}{128} + \dots \quad (2.24)$$

- Ряд діаметрів вписаних кіл  $K_n$ :

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{32} + \frac{1}{64} + \dots \quad (2.25)$$

- Ряд довжин вписаних кіл  $K_n$ :

$$\pi + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}\pi}{32} + \frac{\pi}{64} + \dots \quad (2.26)$$

- Ряд площ вписаних кіл  $K_n$ :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{256} + \frac{\pi}{2048} + \frac{\pi}{16384} + \dots \quad (2.27)$$

Запишемо «сігма-моделі» отриманих рядів:

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} \quad (2.21')$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} \quad (2.22')$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad (2.23')$$

- Ряд радіусів вписаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} \quad (2.24')$$

- Ряд діаметрів вписаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} \quad (2.25')$$

- Ряд довжин вписаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} \quad (2.26')$$

- Ряд площ вписаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad (2.27')$$

Після перетворень отримаємо ці ряди в наступному вигляді:

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{3-3n}{2}} \quad (2.21'')$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{4-3n}{2}} \quad (2.22'')$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{3-3n} \quad (2.23'')$$

- Ряд радіусів вписаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1-3n}{2}} \quad (2.24'')$$

- Ряд діаметрів вписаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{3-3n}{2}} \quad (2.25'')$$

- Ряд довжин вписаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot 2^{\frac{3-3n}{2}} \quad (2.26'')$$

- Ряд площ вписаних кіл  $K_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot 2^{1-3n} \quad (2.27'')$$

- Ряд відношень відповідних сторін танграмів  $T_n$  до радіусів вписаних кіл  $K_n$ :

Позначимо відношення через  $M$ . Тоді отримаємо:

$$M_n = \frac{2^{\frac{3-3n}{2}}}{2^{\frac{1-3n}{2}}} = 2^1 = 2.$$

Отже, маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \quad (2.28)$$

- Ряд відношень відповідних радіусів вписаних кіл  $K_n$  до довжин сторін танграмів  $T_n$ :

Позначимо відношення через  $L$ . Тоді отримаємо:

$$L_n = \frac{2^{\frac{1-3n}{2}}}{2^{\frac{3-3n}{2}}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Отже, маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}n \quad (2.29)$$

- Ряд відношень відповідних площ кіл  $K_n$  до площ танграмів  $T_n$ :

Позначимо відношення через  $G$ . Тоді отримаємо:

$$G_n = \frac{\pi \cdot 2^{1-3n}}{2^{3-3n}} = \pi \cdot 2^{-2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4} n \quad (2.30)$$

Щоб дослідити ряди (2.21-2.30) на збіжність, перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності рядів.

- Ряд сторін танграмів  $T_n$  (2.21):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{3-3n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$  (2.22):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{4-3n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд площ танграмів  $T_n$  (2.23):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{3-3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд радіусів вписаних кіл  $K_n$  (2.24):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1-3n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд діаметрів вписаних кіл  $K_n$  (2.25):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{3-3n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = 0$$

- Ряд довжин вписаних кіл  $K_n$  (2.26):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot 2^{\frac{3-3n}{2}} = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = \pi \cdot 0 = 0$$

- Ряд площ вписаних кіл  $K_n$  (2.27):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot 2^{1-3n} = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\infty} = \pi \cdot 0 = 0$$

Для рядів (2.21-2.27) необхідна умова збіжності ряду виконується, а значить ряди можуть бути збіжними, а можуть бути розбіжними. Тому дослідимо одержані числові ряди на збіжність за допомогою достатньої ознаки. Вона

полягає в тому що, якщо ряд збіжний, то виконується рівність:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , де  $S$  має скінченне значення, а  $S_n$  – частинні суми ряду, які обчислюються за формулою суми геометричної прогресії. Оскільки ряди (2.21-2.27) є рядами геометричної прогресії, то  $S_n$  (частинні суми ряду) обчислюються за формулою:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

- Ряд сторін танграмів  $T_n$  (2.21):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = (1 - 0) \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = 1 \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \\ &= \frac{4 \cdot (4 + \sqrt{2})}{(4 - \sqrt{2}) \cdot (4 + \sqrt{2})} = \frac{16 + 4\sqrt{2}}{16 - 2} = \frac{16 + 4\sqrt{2}}{14} = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{7} = \\ &= \frac{2}{7}(4 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{2}{7}(4 + \sqrt{2})$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.21) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$  (2.22):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2} \cdot (1 - 0) \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{4 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4 \cdot (4 + \sqrt{2})}{(4 - \sqrt{2}) \cdot (4 + \sqrt{2})} = \frac{16\sqrt{2} + 8}{16 - 2} = \frac{16\sqrt{2} + 8}{14} = \\
&= \frac{8\sqrt{2} \cdot +4}{7} = \frac{4}{7}(2\sqrt{2} + 1)
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{4}{7}(2\sqrt{2} + 1)$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.22) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд площ танграмів  $T_n$  (2.23):

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{8}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n}{\frac{7}{8}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{8^n}}{\frac{7}{8}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 8^{-n}}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 8^{-n} \right) = \frac{8}{7} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} - 8^{-n} + 1 \right) = \\
&= \frac{8}{7} \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 8^{-n} \right) = \frac{8}{7} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 8^{-n} \right) = \frac{8}{7} (1 - 0) = \frac{8}{7} \cdot 1 = \frac{8}{7}
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{8}{7}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.23) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд радіусів вписаних кіл  $K_n$  (2.24):

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \cdot (1 - 0) \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \\
&= \frac{2}{4 - \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (4 + \sqrt{2})}{(4 - \sqrt{2}) \cdot (4 + \sqrt{2})} = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{16 - 2} = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{14} = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} = \frac{1}{7}(4 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{1}{7}(4 + \sqrt{2})$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.24) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд діаметрів вписаних  $K_n$  (2.25):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = (1 - 0) \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = 1 \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \\ &= \frac{4 \cdot (4 + \sqrt{2})}{(4 - \sqrt{2}) \cdot (4 + \sqrt{2})} = \frac{16 + 4\sqrt{2}}{16 - 2} = \frac{16 + 4\sqrt{2}}{14} = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{7} = \frac{2}{7}(4 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{2}{7}(4 + \sqrt{2})$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.25) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд довжин вписаних кіл  $K_n$  (2.26):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \\ &= \pi \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \pi \cdot \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\frac{3}{2}n}}{\frac{4 - \sqrt{2}}{4}} = \pi \cdot (1 - 0) \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \pi \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \\ &= \pi \cdot \frac{4 \cdot (4 + \sqrt{2})}{(4 - \sqrt{2}) \cdot (4 + \sqrt{2})} = \pi \cdot \frac{16 + 4\sqrt{2}}{16 - 2} = \pi \cdot \frac{16 + 4\sqrt{2}}{14} = \pi \cdot \frac{8 + 2\sqrt{2}}{7} = \\ &= \frac{2\pi}{7}(4 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{2\pi}{7}(4 + \sqrt{2})$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.26) збігається до своєї скінченної суми.

- Ряд площ вписаних кіл  $K_n$  (2.27):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\pi}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n}{\frac{7}{8}} = \frac{\pi}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{8^n}}{\frac{7}{8}} = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 8^{-n}}{\frac{7}{8}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{7} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 8^{-n}\right) = \frac{2\pi}{7} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} - 8^{-n} + 1\right) = \\ &= \frac{2\pi}{7} \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} - 8^{-n}\right) = \frac{2\pi}{7} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 8^{-n}\right) = \frac{2\pi}{7} (1 - 0) = \frac{2\pi}{7} \cdot 1 = \frac{2\pi}{7} \end{aligned}$$

Оскільки,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{2\pi}{7}$ , то достатня ознака виконується і ряд (2.27) збігається до своєї скінченної суми.

Отже, ряди (2.21-2.27) є збіжними.

Тепер дослідимо ряди (2.28-2.210) на збіжність за допомогою необхідної ознаки.

- Ряд відношень відповідних сторін танграмів  $T_n$  до радіусів вписаних кіл  $K_n$  (2.28):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$$

- Ряд відношень відповідних радіусів вписаних кіл  $K_n$  до довжин сторін танграмів  $T_n$  (2.29):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}n = \infty$$

- Ряд відношень відповідних площ кіл  $K_n$  до площ танграмів  $T_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4}n = \infty$$

Отже, необхідна ознака збіжності ряду не виконується, значить ряди (2.28-2.30) є розбіжними.

Побудуємо графіки залежності частинних сум ряду від кількості доданків.

- Ряд сторін танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми довжин сторін танграмів
1	1
2	1,353553391
3	1,478553391
4	1,522747564
5	1,538372564
6	1,543896836
7	1,545849961
8	1,546540495
9	1,546784636
10	1,546870952

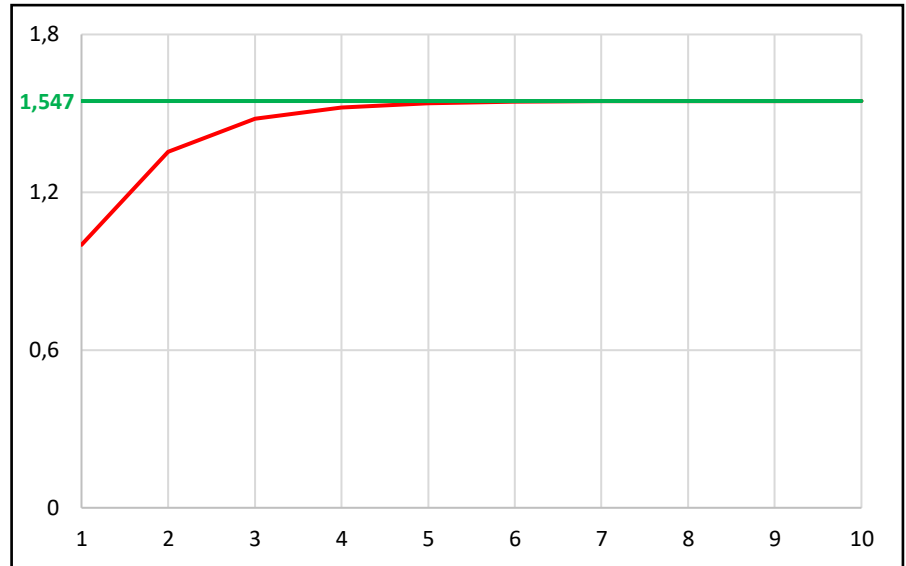


Рис. 2.25. Графік залежності частинних сум ряду (2.21) від кількості доданків

Можна побачити, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду сторін танграмів в залежності від кількості доданків. За (рис. 2.25) видно, що графік спочатку стрімко зростає, а потім поступово набуває постійної швидкості і інтенсивно наближується до скінченного значення суми ряду  $S = \frac{2}{7}(4 + \sqrt{2})$ .

- Ряд діагоналей танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми ряду довжин діагоналей танграмів
1	1,414214
2	1,914214
3	2,090990
4	2,153490
5	2,175587
6	2,183400
7	2,186162
8	2,187139
9	2,187484
10	2,187606

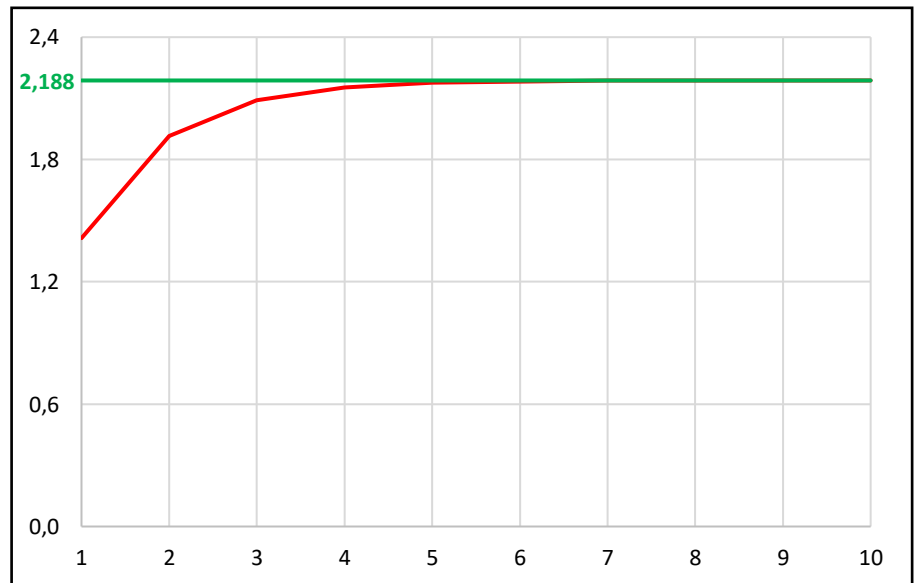


Рис. 2.26. Графік залежності частинних сум ряду (2.22) від кількості доданків

Можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду діагоналей в залежності від кількості доданків (рис. 2.26). Легко бачити, що графік спочатку різко зростає, а потім дуже інтенсивно наближується до значення  $S = \frac{4}{7}(2\sqrt{2} + 1)$ . Таким чином ряд (2.22) дійсно збіжний.

- Ряд площ танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми ряду площ танграмів
1	1
2	1,125
3	1,140625
4	1,142578125
5	1,142822266
6	1,142852783
7	1,142856598
8	1,142857075
9	1,142857134
10	1,142857142

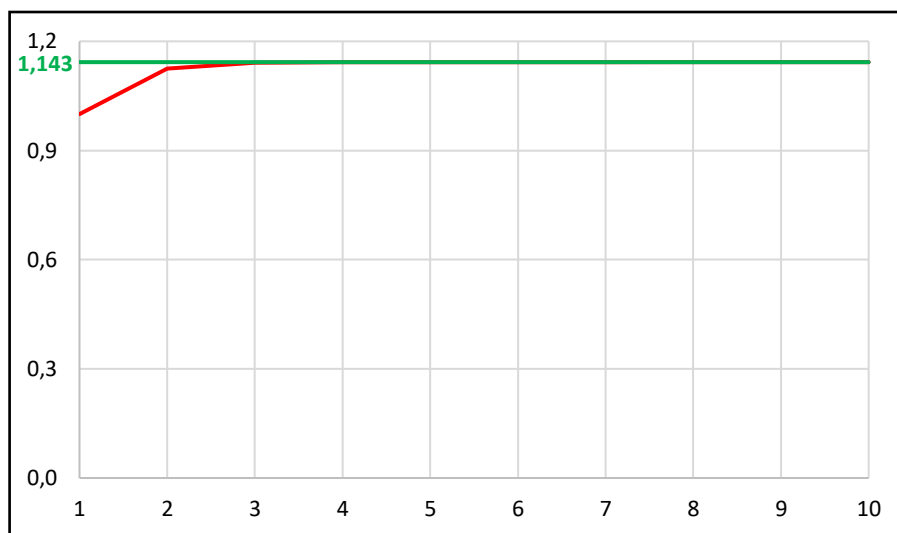


Рис. 2.27. Графік залежності частинних сум ряду (2.23) від кількості доданків

Легко бачити, що графік (рис. 2.27) незначно зростає, а потім набуває постійної швидкості і наближується до значення скінченної суми ряду  $S = \frac{8}{7}$ .

- Ряд радіусів вписаних кіл  $K_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми ряду радіусів вписаних кіл
1	0,5
2	0,676776695
3	0,739276695
4	0,761373782
5	0,769186282
6	0,771948418
7	0,772924981
8	0,773270248
9	0,773392318
10	0,773435476

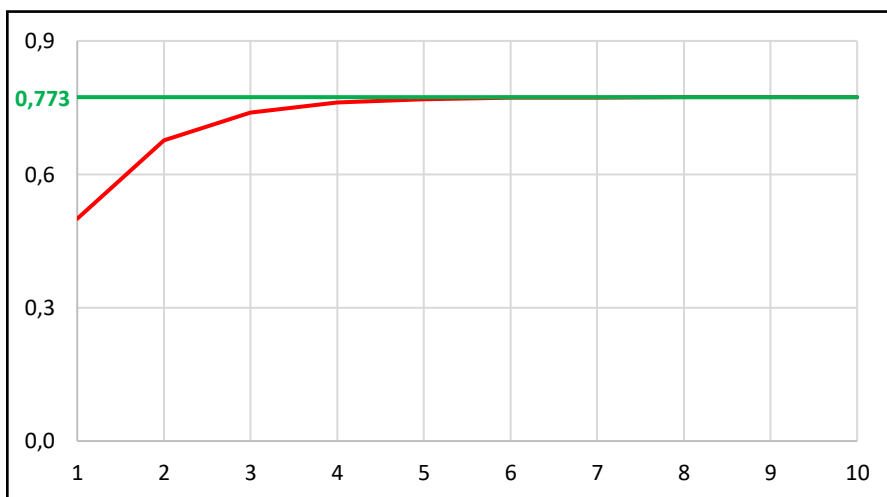


Рис. 2.28. Графік залежності частинних сум ряду (2.24) від кількості доданків

Проаналізувавши графік (рис. 2.28), можна побачити, що графік спочатку стрімко зростає, а потім інтенсивно набуває постійної швидкості. Таким чином ряд (2.24) збігається до скінченного значення його суми  $S = \frac{1}{7}(4 + \sqrt{2})$ .

- Ряд діаметрів вписаних кіл  $K_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми ряду діаметрів вписаних кіл
1	1
2	1,353553391
3	1,478553391
4	1,522747564
5	1,538372564
6	1,543896836
7	1,545849961
8	1,546540495
9	1,546784636
10	1,546870952

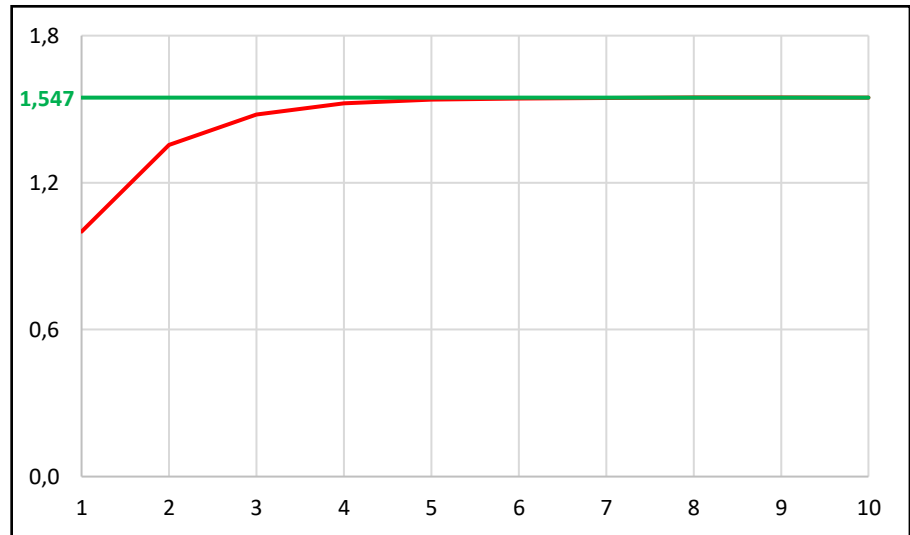


Рис. 2.29. Графік залежності частинних сум ряду (2.25) від кількості доданків

Побудувавши графік (рис. 2.29), можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. Видно, що графік зростає, але потім інтенсивно наближується до значення  $S = \frac{2}{7}(4 + \sqrt{2})$ .

- Ряд довжин вписаних кіл  $K_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми ряду довжин вписаних кіл
1	3,141593
2	4,252313
3	4,645012
4	4,783853
5	4,832940
6	4,850295
7	4,856431
8	4,858600
9	4,859367
10	4,859638

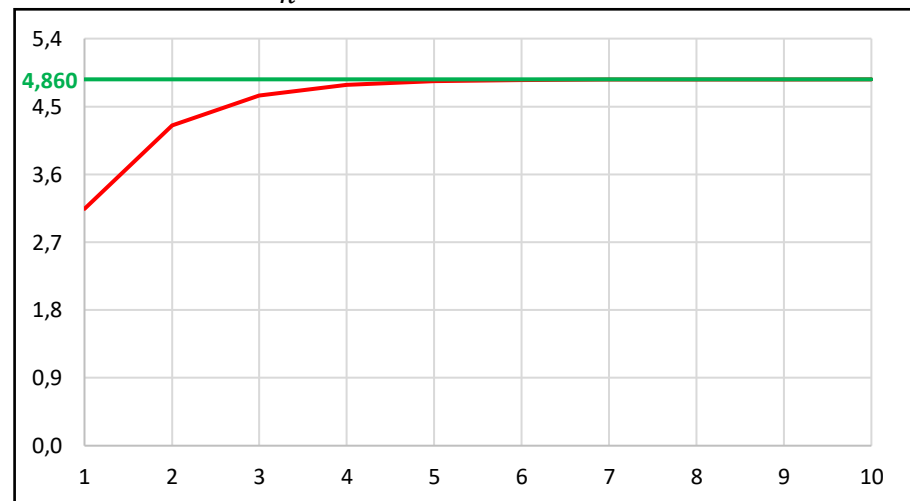


Рис. 2.30. Графік залежності частинних сум ряду (2.26) від кількості доданків

Можна побачити, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду довжин кіл вписаних в танграми в залежності від кількості доданків. За (рис. 2.30) видно, що графік спочатку різко зростає, а потім поступово набуває постійної швидкості.

Таким чином видно, що графік зміни частинних сум ряду довжин кіл вписаних в танграми інтенсивно наближується до значення скінченної суми ряду. Тобто геометрично доведено, що ряд довжин кіл збігається до своєї скінченної суми  $S = \frac{2\pi}{7}(4 + \sqrt{2})$ .

- Ряд площ вписаних кіл  $K_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми ряду площ вписаних кіл
1	0,785398
2	0,883573
3	0,895845
4	0,897379
5	0,897571
6	0,897594
7	0,897597
8	0,897598
9	0,897598
10	0,897598

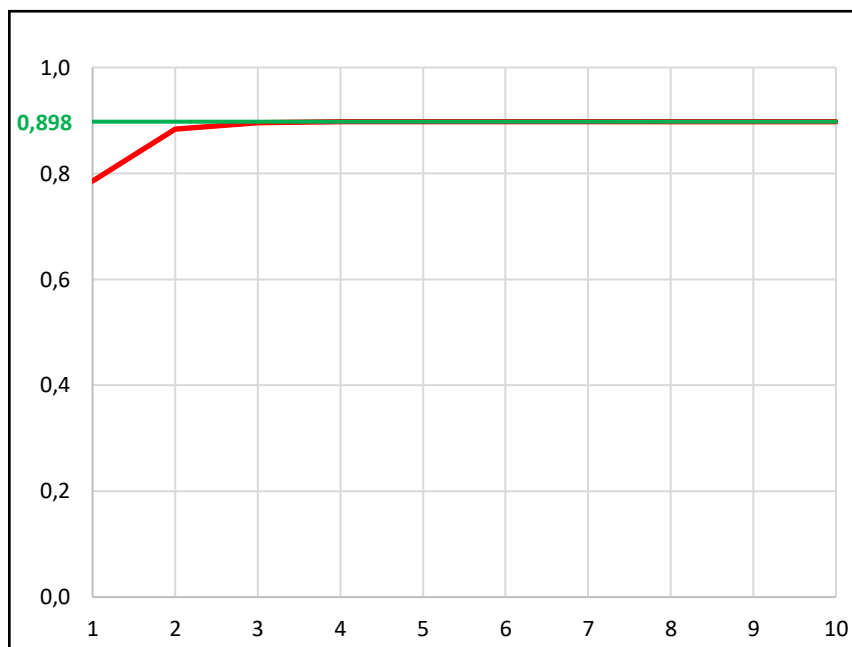


Рис. 2.31. Графік залежності частинних сум ряду (2.27) від кількості доданків

Можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду площ кіл в залежності від кількості доданків (рис. 2.31). Легко бачити, що графік спочатку незначно зростає, а потім інтенсивно набуває постійної швидкості і наближується до значення скінченної суми ряду. Тобто ряд збігається до значення скінченної суми  $S = \frac{2\pi}{7}$ .

- Ряд відношень відповідних сторін танграмів  $T_n$  до радіусів вписаних кіл  $K_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми ряду відношення сторони танграма до радіуса вписаного кола
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110

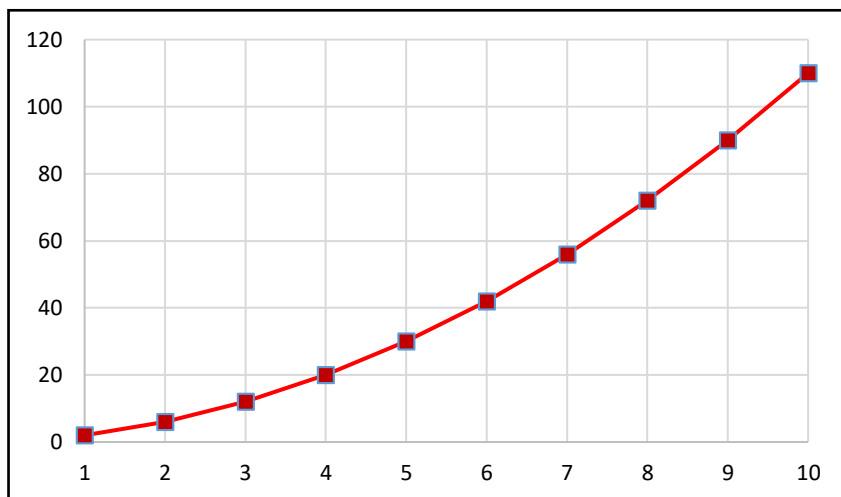


Рис. 2.32.а. Графік залежності частинних сум ряду (2.28) від кількості доданків

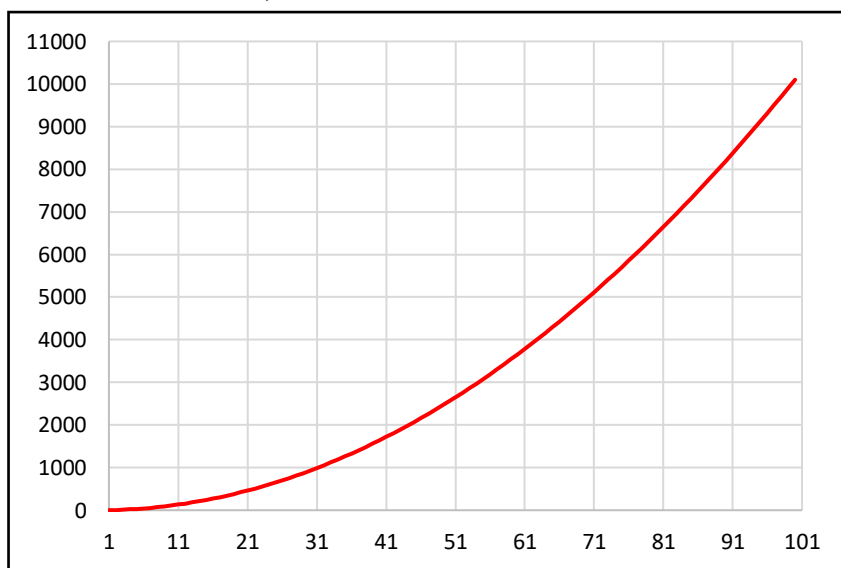


Рис. 2.32.б. Графік залежності частинних сум ряду (2.28) від кількості доданків

Побудувавши графіки частинних сум для 10 (рис. 2.32.а) та 100 (рис. 2.32.б) доданків, можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. Легко бачити, що графіки зростають з постійною швидкістю і не вирівнюються до певного скінченного значення. Таким чином геометрично доведено, що ряд відношення сторони танграма до радіуса вписаного кола є розбіжним.



- Ряд відношень відповідних радіусів вписаних кіл  $K_n$  до довжин сторін танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми ряду відношення радіуса вписаного кола до сторони танграма
1	0,5
2	1,5
3	3
4	5
5	7,5
6	10,5
7	14
8	18
9	22,5
10	27,5

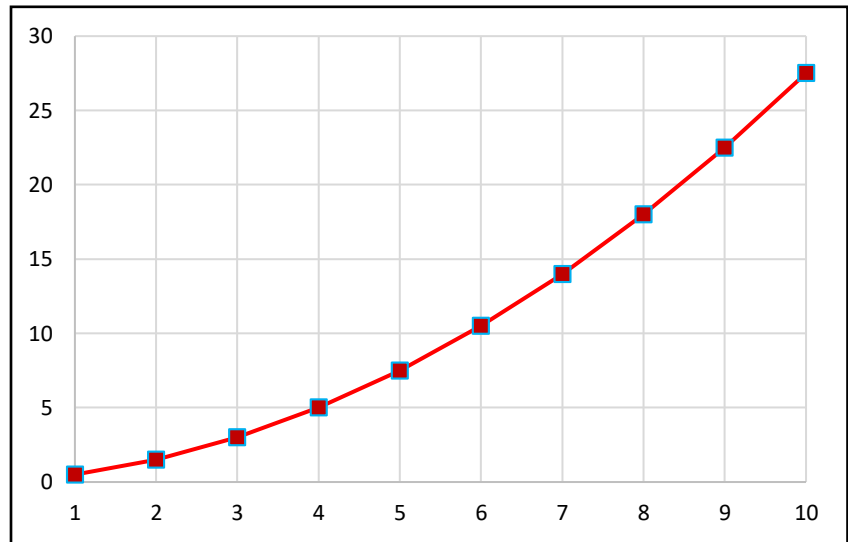


Рис. 2.33.а. Графік залежності частинних сум ряду (2.29) від кількості доданків

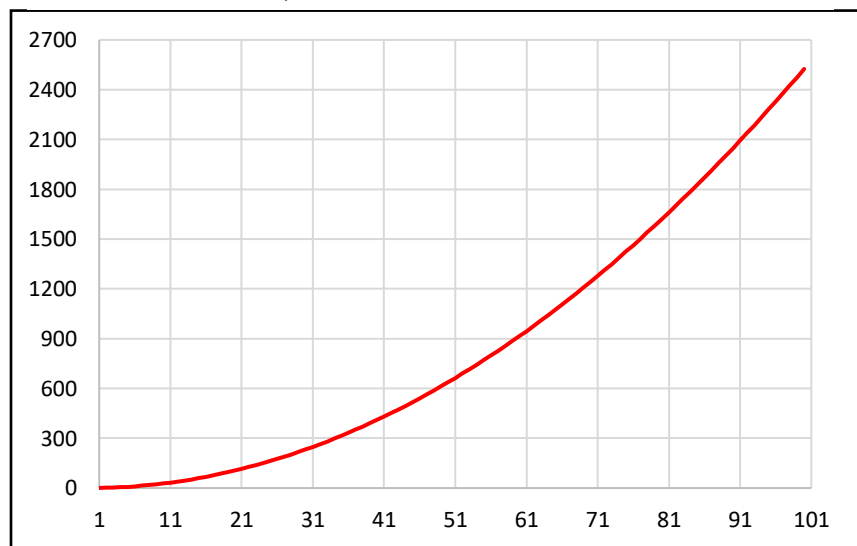


Рис. 2.33.б. Графік залежності частинних сум ряду (2.29) від кількості доданків

Побудувавши графіки частинних сум для 10 (рис. 2.33.а) та 100 (рис. 2.33.б) доданків, можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. Легко бачити, що графіки зростають з постійною швидкістю і не наближаються до певного скінченного значення, тобто ряд (2.29) є розбіжним.

- Ряд відношень відповідних площ кіл  $K_n$  до площ танграмів  $T_n$ :

п-ий член ряду	Частинні суми ряду відношення площі описаного кола до площі танграма
1	0,785398163
2	2,35619449
3	4,71238898
4	7,853981634
5	11,78097245
6	16,49336143
7	21,99114858
8	28,27433388
9	35,34291735
10	43,19689899

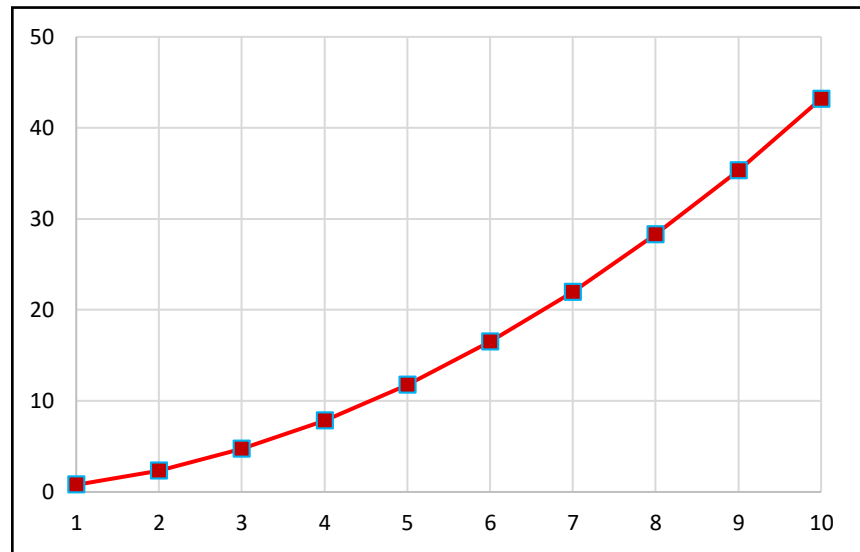


Рис. 2.34.а. Графік залежності частинних сум ряду (2.30) від кількості доданків

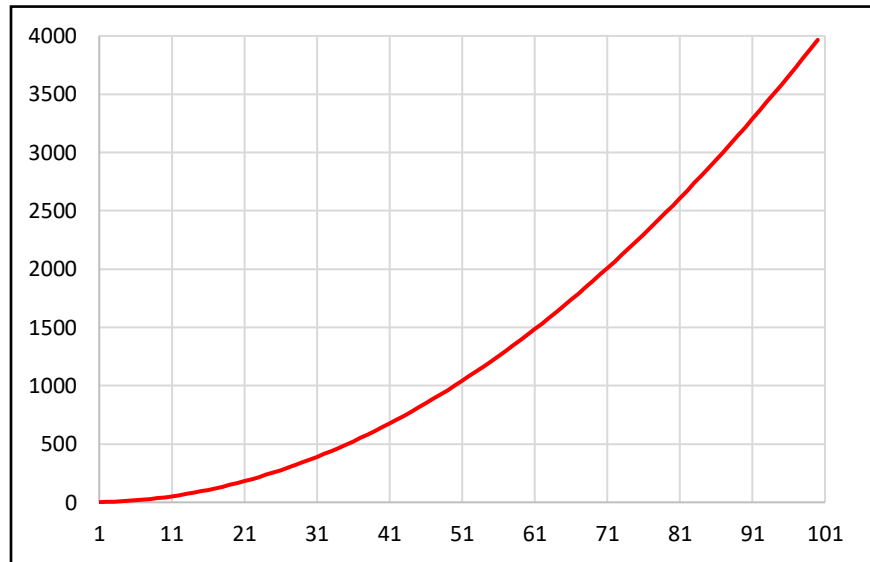


Рис. 2.34.б Графік залежності частинних сум ряду (2.30) від кількості доданків

Побудувавши графіки частинних сум для 10 (рис. 2.34.а) та 100 (рис. 2.34.б) доданків, можна прослідкувати, з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків. Легко бачити, що графіки зростають з постійною швидкістю і із значним збільшенням кількості доданків не змінюють свою поведінку і не наближаються до певного скінченного значення, тому ряд відношень відповідних площ кіл до площ танграмів є розбіжним.

## Висновки до розділу 2

1. Було з'ясовано, що танграм – це дуже давня китайська головоломка, яка містить сім гральних кісток — геометричних фігур, які складаються у різні форми. Фігурами танграма є два великих прямокутні трикутники, один середній прямокутний трикутник, два малих прямокутні трикутника, один квадрат і один паралелограм.

2. За результатами розв'язаних задач видно, що досліджуючи різні геометричні об'єкти, що є елементами квадрата «танграм», можна отримати велику кількість числових рядів.

3. В ході дослідження були виведені алгоритми побудови числових рядів і в результаті одержано «сігма-моделі» цілої низки числових рядів. Виведені числові ряди можна використовувати на заняттях з математичного аналізу при вивченні розділу «Числові ряди», при складанні олімпіадних задач з математики, а також для досліджень, що можуть бути використані при написанні учнями науково-дослідницьких робіт для Малої академії наук.

4. Велику увагу було приділено дослідженню отриманих рядів на збіжність за необхідною і достатньою ознаками. Було показано, що серед тридцяти числових рядів двадцять три є збіжними (виконувалась і необхідна, і достатня ознака) і сім розбіжними (необхідна ознака не виконувалась).

5. Для доведення збіжності були побудовані графіки залежності частинних сум рядів від кількості доданків та проаналізовані поведінки графіків. Щоб візуалізувати поняття «збіжності ряду» на графіках були нанесені значення скінченних сум, до яких збігаються отримані ряди.

6. Для реалізації дидактичних принципів доступності і наочності слід використовувати освітнє геометричне середовище GeoGebra та можливості програмного середовища Microsoft Excel.

## ВИСНОВКИ

1. За допомогою аналізу вітчизняної та зарубіжної літератури було з'ясовано, що історія та розвиток числових рядів не має чіткої періодизації. Точної дати виникнення числових рядів невідомо. Проте література свідчить, що ще в Стародавньому Єгипті існували арифметичні і геометричні прогресії, а в Древньому Вавилоні вміли обчислювати їх суми.

2. Швидкий розвиток теорії рядів розпочався у XVII столітті. Так, Пьетро Менголі запропонував геометричне розкладання числового ряду поділом квадрата на менші квадрати. В той же час Броункер вивів та активно досліджував гармонічний ряд. Пізніше Карл Гаус проводив дослідження рядів на збіжність. Дуже значимий внесок зробив Огюстен Луї Коші. Він представив сучасні принципи теорії рядів. Узагальнив поняття числового ряду, його суми, збіжного і розбіжного ряду.

3. Використовуючи наукові статі та підручники, в роботі були представлені такі означення: числовий ряд, члени числового ряду, сума числового ряду, знакододатний числовий ряд, збіжний ряд, розбіжний ряд та інші. Також із доведенням наведено такі ознаки збіжності числових рядів, як: ознака порівняння, гранична ознака порівняння, ознака Даламбера, інтегральна та радикальна ознаки Коші. Після теорем наведено приклади їх використання.

4. Проаналізувавши сучасні підручники, посібники та практикуми з математичного аналізу, було з'ясовано, що переважна їх кількість пропонує однотипні задачі та не надає візуального геометричного представлення числових рядів та їх збіжності. Тому в роботі представлені різні задачі, в яких за допомогою параметрів певних геометричних об'єктів одержані числові ряди.

5. Евристичним пошуком знайдено «сігма-моделі» знакододатних числових рядів, що побудовані за допомогою параметрів елементів послідовності вкладених квадратів «танграм».

6. Створена система числових рядів, які можуть бути застосовані на практичних заняттях з математичного аналізу при вивченні розділу «Числові ряди» або при складанні олімпіадних задач з математики. Алгоритм побудови числових рядів може бути використаний при написанні учнем старших класів науково-дослідницької роботи в Малу академію наук.

7. Одержані числові ряди було досліджено на збіжність за допомогою достатньої та необхідної ознаки. Для реалізації дидактичного принципу наочності при вивченні розділу математичного аналізу «Числові ряди» були побудовані графіки залежності частинних сум рядів від кількості доданків. Геометрично показано поняття «збіжності числового ряду до скінченного значення його суми».

8. Реалізовано комп'ютерні експерименти стосовно геометричної інтерпретації числових рядів за допомогою освітніх математичних програм GeoGebra та Microsoft Excel.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Александрова Н. В. Історія математичних термінів, поняття, позначення: словар – довідник. вид. 3-є, дод. і випр. / Н. В. Александрова. - Москва: Вид. ЛКІ, 2008. – 248с.
2. Архипов Г. И. «Лекции по математическому анализу»: Учебник для университетов и пед. вузов/ Под. ред. Г. И Архипов. В. А Садовничий. В.Н. Чубариков – Висш. шк. 1999. – 695 с.
3. Баврин, И. И. Математический анализ для педагогических вузов 2-е изд., испр. и доп. учебник и практикум для прикладного бакалаврата / Под. ред. И. И. Баврин. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 327 с.
4. Барбаумов В. Е., Попова Н. В. Числовые и функциональные ряды. Учебное пособие. – М.: Изд-во Рос. экон. акад., 2010. – 97с.
5. Беднаж В.А. Ряды: учебно-методическое пособие для студентов физико-математических факультетов / В.А. Беднаж, Е.Г. Родикова. – Электрон. дан. и прогр. – Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 65 с.
6. Бугрим О.В. Числові та степеневі ряди. Приклади їх застосування: навч. посіб. для студ. напряму підгот. 6.050301 Гірництво / О.В. Бугрим, Л.Й. Бойко; М-во освіти і науки України; Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2014. – 82 с.
7. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки ; пер. с фр. И. Г. Башмакова. – Москва : Изд-тво иностранной литературы, 1963. – 292 с.
8. Василего И.П. Ряды: Учебное пособие. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004. – 114 с.
9. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер ; пер. с нем. А. П. Юшкевич. – Москва : Гос. изд-тво физ-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.
10. Виленкин Н.Я. Ряды: учебное пособие для студентов-заочников 3 курса физико-математических факультетов педагогических институтов /

Виленкин Н.Я., Цукерман В.В., Доброхотова М.А., Сафонов А.Н. — М.: Просвещение, 1982. — 161 с.

11. Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: Пособие для университетов, пед. вузов / Под. ред. И. А., Виноградова С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. В 2 ч. 3-е изд., испр. М. 2001 г.

12. Власова Е. А. Ряды / Е. А. Власова. – 3-е изд., испр. – Москва : МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2006. – 616 с.

13. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский – 12-е изд. – М.: Наука, 1977.

14. Габ С. С. Геометрична інтерпретація рядів : кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 середня освіта (математика) / С. С. Габ ; наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2018. – 100 с.

15. Годун Б.В. Высшая математика. Ряды. – Херсон: В&G, 2005. – 80 с.

16. Горбунова, Н.Ю. Ряды : учебное пособие / Н.Ю. Горбунова, Н.Н. Платонова; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь: ИПЦ «Прокрость», 2017 – 156 с.

17. Горячев А. П. Числовые и функциональные ряды / А. П. Горячев. – Москва : МИФИ, 2007. – 264 с.

18. Гредасова Н.В. Ряды : учебное пособие / Н.В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М.А. Корешникова, Е.Г. Полищук, И.Ю. Андреева.— Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016.— 116 с.

19. Жулидова, Ю. В. Ряды : учеб, пособие / Ю. В. Жулидова, А. Е. Ключников; [науч. ред. В. А. Казинец]. - Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2019. – 84 с.

20. Замятин В. Н. Числовые и функциональные ряды: учебнометодическое пособие / В. Н. Замятин, С. М. Шаова. – Майкоп : АГУ, 2010. – 69 с.

21. Зорич В. А. Математический анализ. / В. А. Зорич . Часть II. –Изд. 4-е, испр.– М.: МЦНМО, 2002. –794с.
22. Ильин В.А. Математический анализ. Начальный курс/ В. А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Под ред. А. Н. Тихонова. – 2-е изд., перераб. – М.: Изд-во МГУ, 1985 г.– 622 с.
23. Камынин Л.И. Курс математического анализа. В 2-х томах. М.: Изд-во МГУ. Том 2: 1995 г.– 624 с.
24. Капитонова Н.А. Числовые ряды: учебно-методическое пособие. — Тверь: ТГУ, 2014. — 28 с.
25. Комарова А. А. Побудова числових рядів за допомогою квадрата танграм [Електронний ресурс] / Аліна Комарова // Збірник наукових праць здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету (приурочено до 90-річчя КДПУ). – Кривий Ріг : КДПУ, 2020. – Режим доступу : <http://elibrary.kdpu.edu.ua/>.
26. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів / В. В. Корольський. // Новітні комп'ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2017. – Том XV. – С. 57–63.
27. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський. // Новітні комп'ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 59–66.
28. Корольський В. В. Лінійна, квадратурна та кубатурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання / Корольський В. В., Габ С.С. // Новітні комп'ютерні технології. : Видавничий центр ДВНЗ «Криворізький національний університет». - Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 67-73.
29. Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Математичне моделювання – 2013. – № 6. – С. 117 – 120.



30. Крюков М. М. З історії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Історія науки і техніки. – 2013. – №3. - С. 166. - Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/ictnt\\_2013\\_3\\_25](http://nbuv.gov.ua/UJRN/ictnt_2013_3_25).

31. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. [Электронный ресурс] / Л.Д. Кудрявцев – Режим доступа: <http://alleng.org/d/math/math98.htm>

32. Кузьмина С.С. Числовые ряды / С.С. Кузьмина, О.Я. Шевалдина Екатеринбург: ГОУ–ВПО УГТУ–УПИ, 2005

33. Ляшко, И.И. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Том 2. Ряды: Учебное пособие [Электронный ресурс] / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай. – М.: ЛКИ, 2012. – 224 с. – Режим доступа: <http://alleng.org/d/math/math21.htm>

34. Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк / А. И. Маркушевич. – Москва – Ленинград : Изд-во НКТПСССР, 1936. – 103 с.

35. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 2008. – 640 с.

36. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. / Письменный Д. Т. – 6-е изд. Часть 2. — М.: Айрис-пресс, 2008.

37. Плужникова Е. Л. Математический анализ. Ряды : учебн. пособ. / Е. Л. Плужникова, Б. Г. Разумейко. – Москва : Издательский дом «МИСис», 2011. – 141 с.

38. Рудой Е. М. Математический анализ. Числовые и функциональные ряды : учебн. пособие / Е. М. Рудой. – Новосибирск : НГПУ, 2010. – 198 с.

39. Том 2. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. – Москва. Едиториал УРСС, 2003 – 224 с.

40. Трофимов В. К. Теория рядов : учебно пособие / В. К. Трофимов, Т. С. Мурзина, Т. Э. Захарова. – Новосибирск : СибГУТИ, 2013. – 145 с.

41. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]. Раздел 10. «Ряды». Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2007. - 113 с. – Режим доступа: <http://www.math.rusoil.net/files/UMKandKIM/umk10.pdf>

42. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. ( В 3-х томах). / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2003. т.1 – 680с.

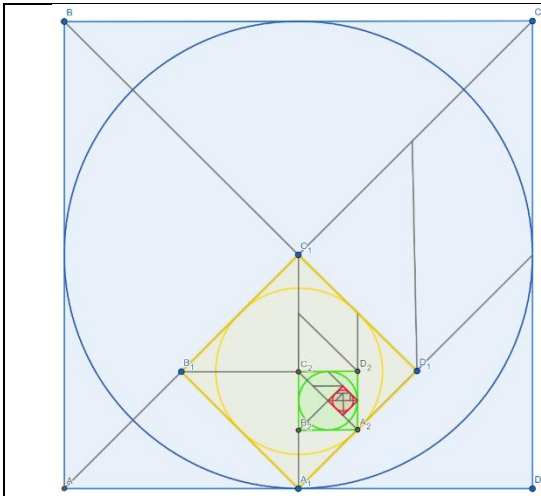
43. Юшкевич А. П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : в 3 т. Т. 1 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва : Наука, 1970. – 353 с.

## ДОДАТОК

## Приклади вправ на знаходження числових рядів

Табл.1.

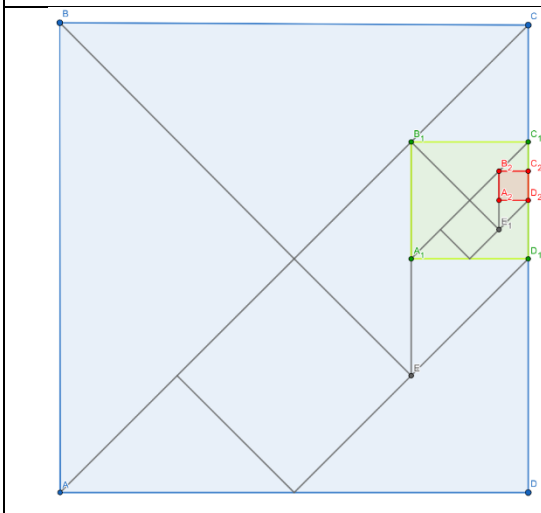
Геометрична інтерпретація	Задачі
	<p><b>Задача 1.</b> Дано танграм, сторона якого дорівнює 1. Побудувати ряди:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>сторін танграмів.</li> <li>діагоналей танграмів.</li> <li>площ танграмів.</li> </ol>
	<p><b>Задача 2.</b> Дано танграм, сторона якого дорівнює 1. Навколо танграма описане коло. Побудувати ряди:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>радіусів кіл.</li> <li>відношення площі танграма до площі кола.</li> <li>відношення довжини кола до площі танграма.</li> <li>відношення сторони танграма до довжини кола.</li> </ol>
	<p><b>Задача 3.</b> Дано танграм, сторона якого дорівнює 1. В танграми вписані кола, в які в свою чергу також вписані танграми. Побудувати ряди:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>сторін танграмів.</li> <li>площ танграмів.</li> <li>довжин кіл.</li> <li>відношення площі танграма до довжини кола.</li> </ol>



**Задача 4.** Дано танграм, сторона якого дорівнює 1. В танграми вписані кола. А танграми вписані в квадрати.

Побудувати ряди:

1. сторін танграмів.
2. площ танграмів.
3. довжин кіл.
4. відношення площі танграма до довжини кола.



**Задача 5.** Дано танграм, сторона якого дорівнює 1. В паралелограми вписані наступні танграми.

Побудувати ряди:

1. сторін танграмів.
2. площ танграмів.
3. менших діагоналей паралелограма.

Наведемо «сігма-моделі» раніше отриманих рядів, які можна використовувати для практичних занять з математичного аналізу при вивченні розділу «Числові ряди»:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{5-4n}{2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{4-4n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{3-4n}{2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot 2^{\frac{5-4n}{2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot 2^{3-4n}; \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{4-3n}{2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2}n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-2n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1-4n}{2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-4n}; \\
 & \sqrt{5} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1-4n}{2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 8n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{3-3n}{2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{3-3n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1-3n}{2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{3-3n}{2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot 2^{\frac{3-3n}{2}}; \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot 2^{1-3n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4}n.
 \end{aligned}$$