**Матричні методи в природничих науках**

«Математична постановка задачі все ще залишається наївною та занадто простою в порівнянні з біологічною реальністю»

Станіслав Улям (1909-1984), американський математик

Для того, щоб по-справжньому поглибитись у процеси та явища, що досліджуються, та керувати ними, недостатньо використовувати тільки інтуїтивні словесні поняття. Необхідно знайти відповідний математичний апарат, який міг би забезпечити більш точний і логічний метод аналізу. Одним з таких важливих математичних апаратів є **матриці**.

За допомогою матриць дуже зручно записувати масиви чисел.

**Приклад 1. Матриці споживання**

П’ять лабораторних тварин годують трьома різними видами їди. Нехай *aij* – добове споживання *i*-го виду їди *j-*ютвариною. Матриця  відображує загальне споживання за добу 

Далі будемо використовувати матриці споживання при складанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

**Приклад 2. Матричні методи в епідеміології**

Припустимо, що три людини захворіли заразною хворобою. Другу групу з шести осіб опитують з метою встановлення їх контактів. Визначимо матрицю , де *aij*=1, якщо контакт відбувся та *aij*=0, якщо не було контакту. Припустимо, що після опитування утворилась матриця .

Далі опитуємо третю групу з семи осіб, щоб з’ясувати їх контакти з представниками другої групи. Результати записуємо у вигляді матриці , причому , якщо *j*- та особа третьої групи не контактувала з *i*-ю особою другої групи, та , якщо контакт відбувся. Нехай матриця *В* має вигляд: 

Нас можуть цікавити також непрямі контакти, або контакти другого порядку, між сьома людьми третьої групи та трьома хворими першої групи. Такі контакти називають контактами другого порядку. Контакти другого порядку описуються матрицею ***C=AB*.** Елементи матриці *cij* показують кількість контактів між *j*- ю особою третьої групи з *i*-ю особою групи хворих.

**Завдання.** Знайдіть матрицю С та прокоментуйте отримані результати.

**Приклад 3.Матричні ігри**

**Приклад 4 Матричні методи в динаміці популяцій**

Одним з важливих питань екології є дослідження змін чисельності популяції як з точки зору її внутрішніх властивостей, так і впливу навколишнього середовища.

Чисельність популяції – дискретна величина, яка приймає певні значення в фіксований момент часу.

Історично першою дискретною моделлю біологічної популяції в математичній екології прийнято вважати модель у вигляді ряду чисел: 1;1;2;3;5;8;13;21;34;55;… італійського вченого Фібоначчі (Liber abaci, 1202/1228 рр.). Модель виражає гіпотезу, що кількість кролів у даному поколінні дорівнює сумі кролів у двох попередніх поколіннях.

**Завдання.** Проаналізуйте недоліки цієї моделі.

Англійський вчений Мальтус (1766-1834) запропонував експоненціальну модель розвитку популяцій (геометрична прогресія). Модель базується на припущенні, що всі особини мають однакову ймовірність виживання та однакову швидкість розмноження. Дана модель не враховувала також структуру популяції.

Матричні моделі динаміки популяцій розробляли вчені Бернарделлі (1941р.), Льюїс (1942р.), Леслі (1945р.) та інш. Найбільш досконалою було визнано модель Леслі. Саме її і будемо розглядати.

Розглянемо класичну постановку задачі. Нехай ресурси харчування необмежені. Розмноження проходить в певні моменти часу . Нехай популяція містить ***n*** вікових груп. В кожний фіксований момент часу (наприклад *t0*) популяцію можна охарактеризувати вектором-стовпцем . Вектор , що характеризує популяцію в наступний момент часу, наприклад через рік, пов'язаний з вектором за допомогою матриці переходу (матриці проекції популяції) ***L*** таким чином: . Знаменита матриця Леслі має таку структуру: 

На діагоналі матриці стоять нулі, під діагональними елементами – коефіцієнти виживання ; в першому рядку стоять члени, що характеризують число особин, що народились від відповідних груп. Всі інші елементи матриці дорівнюють нулеві.

Знаючи структуру матриці ***L*** та початковий стан популяції – вектор-стовпець , можна прогнозувати стан популяції в будь-який заданий момент часу шляхом ітерацій:

;



………………………………………



**Вправа.** Розглянемо приклад популяції з трьох вікових груп. Початкова популяція складається з одної самиці старшого віку. Вектор-стовпець . Кожна особина старшого віку, перед тим, як померти, встигає народити в середньому 12 потомків. Кожна особина середнього віку, перед тим як померти або перейти до наступної вікової групи (ймовірності цих подій однакові), народжує в середньому 9 потомків. Молоді особини не народжують і з ймовірністю 1/3 переходять до середньої вікової групи. Матриця Леслі має вигляд: .

Знайдіть структуру популяції через рік; два роки; три роки.