**Лекція 5**

**Системи диференціальних рівнянь першого порядку**

Для створення математичної моделі, яка буде описувати, наприклад, співіснування видів, одного диференціального рівняння вже недостатньо. Потрібно розглядати системи диференціальних рівнянь, кожне з рівнянь якої має описувати динаміку певної популяції.

У 1925 році **Альфред Лотка** і в 1926 році **Віто Вольтерра** незалежно запропонували математичну модель співіснування двох видів, в якій один вид «жертва» є джерелом харчування для другого виду «хижака». Перші моделі були значно спрощені відносно реальних умов, тому не могли відобразити всі сторони взаємодії «хижак – жертва». Однак цінність цих моделей безперечна, оскільки вони стали основою подальшого розвитку математичної екології.

**Приклад 1** Нехай - розмір популяції хижаків у момент часу *t*, а  - розмір популяції жертв. Припустимо, що кожна популяція за відсутністю іншої підкорюється закону природнього (експоненціального) зростання: , . Популяція жертв необмежено зростає, а популяція хижаків вимирає за відсутністю жертв. Взаємодія популяцій веде до того, що кількість жертв зменшується, а кількість хижаків навпаки. У простішому випадку змінення розміру кожної популяції буде пропорційним частоті зустрічей двох видів, тобто добутку  розмірів їх популяцій. В результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь 



Дана система називається моделлю Лотки-Вольтерри, або моделлю «хижак-жертва». Відомо, що таку систему не можна розв’язати аналітично. Якісний аналіз цієї моделі показав, що незалежно від початкових умов один з видів моделі обов’язково вимирає.

Розглянемо системи, які можна розв’язати аналітично. Такими є, наприклад, системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Систему виду



називають **системою у нормальній формі** (нормальною системою), оскільки вона записана відносно похідних шуканих функцій. Тут ,  - похідні невідомих функцій  за часом, - коефіцієнти (числа),  - деякі функції. Якщо , то система називається однорідною. В іншому випадку неоднорідною.

**Метою** розв’язання системи є знаходження невідомих функцій , які задовольняють кожному з рівнянь системи.

**Задача Коші** для такої системи полягає у відшуканні розв’язку, що задовольняють початковим умовам .

**Приклад 2** (модель міжвидової конкуренції)

Нехай взаємний вплив популяцій двох конкуруючих видів описується лінійною однорідною системою 

Тут  - чисельність популяцій в момент часу *t.*

Припустимо, що відома початкова кількість популяцій  особин.

Знайти чисельності обох видів в будь-який момент часу.

**Зауваження.** Даний приклад застосовується тільки як ілюстрація до відповідного математичного апарату.

**Розв’язання.**

**Спосіб 1.** Узагальнений метод Ейлера.

Узагальнений метод Ейлера для систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку



Запишемо систему в матричному вигляді

 (1)

 тут ,  - матриця коефіцієнтів, 

Загальний розв’язок системи матиме вигляд , де ,  - лінійно незалежні частинні розв’язки системи,  - довільні сталі.

Частинний розв’язок системи будемо шукати у вигляді ,  - числовий вектор. Підставивши частинний розв’язок в рівняння (1), отримаємо , , тобто вектор  є власним вектором матриці *A* за означенням, а число *k* – її власним значенням.

,  - одинична матриця.

- характеристичне рівняння системи









 власні числа

Кожному власному числу відповідає власний вектор.

Знайдемо власні вектори:

При  





 - власний вектор, що відповідає власному числу 

При 







Записуємо загальний розв’язок системи:





**Спосіб 2.**Проведемо розв’язання **методом виключення.**



**Алгоритм.** На першому етапі за допомогою підстановок спробуємо отримати диференціальне рівняння вищого порядку відносно одної з невідомих функцій. Для цього:

* Продиференцюємо одне з рівнянь системи, наприклад перше, за *t*: 
* З другого рівняння системи маємо, що . Підставимо даний вираз у рівняння, що отримали в п.1: .
* Врахуємо з першого рівняння, що  і підставимо в рівняння 



 - лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв’язком цього рівняння буде функція .

Оскільки , то знайдемо  і підставимо у вираз 

Після спрощення отримуємо . Загальний розв’язок системи



Для знаходження констант застосуємо початкові умови  і отримаємо систему



, 



Рівняння системи дають можливість знайти розмір кожної популяції у будь-який момент часу.

Аналіз системи показує, що популяція першого типу зменшується. При взаємодії двох видів працює принцип конкурентного виключення Гаузе: якщо два види займають одну й ту саму екологічну нішу, то або один вид вимирає, або види еволюціонують з розділенням своїх екологічних ніш. Таким чином, якщо два види співіснують, то між ними має бути якась екологічна відмінність.

В нашому випадку вимиратиме перший вид. Його вимирання настане при , , , ,

, одиниць часу.

Відповідь.

**Приклад 3**

Нехай - розмір популяції хижаків у момент часу *t*, а  - розмір популяції жертв. Припустимо, що швидкості змінення їх популяцій описуються системою 

Визначте розмір популяції у будь-який момент часу, якщо початкові чисельності популяцій . За який час станеться вимирання виду-«жертви»?

Відповідь.  одиниць часу

**Запитання та завдання**

1. Яка система диференціальних рівнянь першого порядку називається нормальною?
2. У якому випадку нормальну систему називають однорідною? Неоднорідною?
3. Що називають розв’язком системи диференціальних рівнянь?
4. В чому полягає задача Коші?
5. Які методи розв’язання однорідних нормальних систем першого порядку розглянуто?
6. В чому полягає узагальнений метод Ейлера розв’язання однорідних систем?
7. В чому полягає ідея методу виключення?
8. Які ще моделі «хижак - жертва» та моделі міжвидовою конкуренції відомі? Оформіть завдання у вигляді рефератів.

**Вправи для аудиторної та самостійної роботи**

Розв’язати системи:

1.  Відповідь. 
2.  Відповідь. 
3.  Відповідь. 
4.  Відповідь. 