**Лекція 4**

**Розв’язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами**

Методи розв’язання розглянемо на прикладі рівняння другого порядку: (1)

**Теорема.**

Загальний розв’язок неоднорідного рівняння складається зі загального розв’язку однорідного та частинного розв’язку неоднорідного, тобто



Частинний розв’язок неоднорідного рівняння можна знаходити **двома методами:** методом **невизначених коефіцієнтів**, або методом **варіації довільних сталих.** Кожен з методів має позитивні риси та недоліки. Розглянемо кожен з методів.

**І. Метод невизначених коефіцієнтів.**

Метод невизначених коефіцієнтів потребує спеціальної правої частини:

 (еталон)

Тут  - числа, а , - многочлени відповідного ступеня.

Якщо права частина рівняння (1) буде відповідати еталону при певних значеннях і , а контрольне число  **не буде** розв’язком характеристичного рівняння однорідного рівняння, то частинний розвязок неоднорідного рівняння (1) матиме вигляд:

. Тут  і  нові многочлени ступеня .

Якщо контрольне число  **буде** коренем характеристичного рівняння, то , де *r* – кратність цього кореня.

**Приклад 1**

Розв’язати рівняння

****

Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, тому загальний розв’язок даного рівняння знаходиться за формулою:



1. Спочатку знайдемо загальний розв’язок однорідного рівняння

****

Характеристичне рівняння має вигляд

,

коренями якого є  і , тому 

1. Встановимо, чи має права частина відповідний вигляд, що дозволяє застосовувати метод невизначених коефіцієнтів. Для цього порівняємо праву частину рівняння з еталоном.





**Приклад 2.**

- ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

1.Розвяжемо однорідне рівняння





загальний розв’язок однорідного рівняння

2. При 





Контрольне число **не є** розв’язком характеристичного рівняння,

тому частинний розв’язок буде мати вигляд, схожий на праву частину рівняння, тобто многочленом другого ступеня з невизначеними коефіцієнтами . Для знаходження коефіцієнтів скористаємось твердженням, що розв’язок має задовольняти рівняння, тобто при підстановці перетворювати рівняння на тотожність.







Відповідь. 

**Приклад 3.**



1. 





**Метод варіації довільних сталих**

(метод Лагранжа)

Розглянемо метод, який дозволяє знаходити частинний розв’язок лінійного рівняння , де  - довільна функція.

Як відомо,  .



Будемо шукати розв’язок у вигляді .(1).

Функції  підлягають визначенню. Потрібно надати дві залежності між ними. Одну можна обрати довільним способом, а другу визначити. Продиференцюємо рівність (1):



Покладемо , тоді



Продиференцюємо ще раз: 

Підставимо в початкове рівняння: 

Перегрупуємо наступним чином: 

Вирази в дужках дорівнюють нулю (чому?). Для знаходження функцій  маємо систему: 

