МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Диференціальні рівняння

Методичні вказівки до вивчення теми

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 101 «Екологія» та 183 «Технології захисту навколишнього середовища».

Київ 2025

УДК 517.521
Б 81

Укладачі: З.І.Наголкіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Л.В.Соколова, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Ю.О. Чорноіван, канд. фіз.-мат. наук, доцент
А.О. Краснєєва, старший викладач

Рецензент В.В. Отрашевська, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск Н.В.Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 11 від 21 березня 2024 року.

В авторській редакції

Методичні вказівки до вивчення теми «Диференціальні рівняння» /уклад.: Б81 З.І. Наголкіна та ін.– Київ: КНУБА, 2025. – с. 80

Містить теоретичні відомості та приклади розв'язання типових задач і вправ, а також індивідуальні завдання для самостійної роботи.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями вищої освіти за спеціальностями 101 «Екологія» та 183 «Технології захисту навколишнього середовища».

Зміст

Вступ

Диференціальні рівняння широко застосовується у природничих та технічних науках, оскільки є математичними моделями багатьох реальних природніх процесів і явищ. У зв’язку з цим тема «Звичайні диференціальні рівняння» посідає важливе місце в системі математичної підготовки майбутніх екологів та спеціалістів із захисту навколишнього середовища.

Методичні вказівки до вивчення теми розроблено на основі принципу професійно спрямованого підходу до навчання з урахуванням вікових особливостей та рівня підготовки студентів першого курсу. Окрім усвідомлення студентами ролі математики в системі освіти інженера-еколога та отримання якісної математичної підготовки за рахунок підвищення інтересу до вивчення предмету, такий підхід слугує пропедевтикою для вивчення спеціальних дисциплін, розширяє світогляд та формує наукове мислення завдяки знайомству з історією появи та розв’язання певних наукових проблем.

Знайомство з відповідним математичним апаратом відбувається, по можливості, в процесі розв’язування практичних задач на основі найпростіших (базових) моделей екології. Під час розв’язування задач студенти знайомляться з початковими поняттями теорії звичайних диференціальних рівнянь, методами математичного моделювання, отримують уявлення про роль диференціальних рівнянь як інструмента для розв’язання практичних задач. Розглядаються прийоми складання диференціальних рівнянь.

У посібнику викладено загальні теоретичні відомості з теми та методи розв'язання окремих типів звичайних диференціальних рівнянь першого та вищих порядків, а також систем диференціальних рівнянь. Теоретичний матеріал ілюструється прикладами розв'язання задач і вправ. Запропоновано завдання для аудиторної і самостійної роботи, варіанти індивідуальних завдань, тести та контрольні запитання.

Зміст посібника відповідає вимогам навчальної робочої програми з курсу «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 101° «Екологія» та 183° «Теорія захисту навколишнього середовища» і є методично обґрунтованим.

В результаті вивчення теми студенти мають засвоїти основні теоретичні положення теми, навчитись розв'язувати типові диференціальні рівняння, а також застосовувати набуті знання при розв'язанні практичних задач.

Тема 1
Звичайні диференціальні рівняння (загальні поняття)

1.1 Диференціальні рівняння – математичні моделі природніх процесів

Для вивчення реальних процесів за допомогою математичних методів використовують **математичне моделювання.** Диференціальні рівняння є математичними моделями багатьох природніх процесів: кругообігу вуглецю та інших хімічних елементів, ерозії ґрунту, росту рослинності та відновлення екосистем, акумуляції та розпаду токсичних речовин у біосистемах та ін. Складання диференціальних рівнянь у задачах із практичним змістом додатково потребує знань законів фізики, хімії, біології. Крім цього, не існує універсальних методів складання диференціальних рівнянь. Одним з методів складання диференціальних рівнянь при розв'язанні практичних задач є застосування означення похідної, а саме її фізичного (миттєва швидкість протікання нерівномірного процесу) змісту. При застосуванні цього методу рекомендується використовувати наступний алгоритм:

1. Встановити, які змінні входять в задачу. Ввести незалежну (аргумент) та залежну (функцію) змінні.
2. Встановити характер зв'язку між ними. Записати закон залежності приросту функції від приросту аргументу.
3. Знайти відношення приросту функції до приросту аргументу та знайти границю цього відношення, якщо приріст аргументу прямує до нуля.
4. Записати диференціальне рівняння та розв'язати його.
5. Проаналізувати отриманий загальний розв'язок.
6. Виділити початкові умови, якщо це передбачено умовою задачі.
7. Знайти частинний розв'язок, що відповідає початковим умовам задачі.

Диференціальні рівняння широко застосовуються як математичні моделі в популяційній екології. Змінення в часі, як правило, безпосередньо призводять до виведення диференціальних рівнянь. Одною з основних задач екології є дослідження зростання та змінення популяції живих організмів як з точки зору її внутрішніх властивостей, так і впливу оточуючого середовища. Під популяцією, як правило, розуміють сукупність певної кількості індивідуумів, які можуть розрізнятись за віком та статтю. Кількість організмів в популяції є одним з важливих аспектів для розуміння поведінки всієї групи в цілому та надає широкі можливості для досліджень за допомогою математичних методів.

Всі живі організми народжуються, зростають, старіють та помирають, тобто включені в певні динамічні процеси в часі. Процеси, що відбуваються у навколишньому середовищі характеризуються взаємними зв’язками між величинами, які описують ці процеси. Математично такі зв'язки виражаються функціональними залежностями. Реальні процеси потенційно можуть залежати від великої кількості параметрів, тому занадто складні як для математичного описання так і подальшого вивчення, тому при створенні моделей використовують певні припущення (спрощення).

При вивченні лінійної алгебри розглядалися дискретні моделі динаміки популяцій. Зрозуміло, що кількість особин популяції завжди виражається цілим числом, однак при достатньо великій кількості особин (наприклад, кількість бактерій) дискретну функцію можна з достатньою точністю наблизити неперервною, до того ж диференційованою функцією, та з певною точністю вивчати відповідну модель. Наприклад, за сприятливих умов кількість кишкових паличок подвоюється за 20-30 хвилин. Цей проміжок часу називають періодом генерації.

Розглянемо задачу, математичною моделлю якої є звичайне диференціальне рівняння.

Задача 1.

Нехай колонія живих організмів знаходиться в сприятливих умовах, завдяки чому народжуваність вище за смертність. Простір, що займає колонія, та наявність харчових ресурсів будемо вважати необмеженими. Припустимо також, що колонія не має природніх ворогів і є достатньо великою, щоб її можна було вважати неперервною величиною. Припустимо, що в одиницю часу на одну особину популяції припадає α *народжувань нових особин. Знайдемо закон змінення чисельності організмів в залежності від часу, якщо в момент* t_0 *кількість особин популяції дорівнювала* N_0.

Розв’язання. Розглянемо функцію $N(t)$ – кількість особин популяції в залежності від часу та встановимо як зміниться кількість особин популяції за період часу Δt. Кількість особин популяції в момент часу $t+\Delta t$ дорівнює сумі початкової кількості $N(t)$ та кількості новонароджених особин $\alpha N(t)\Delta t$:

$$N(t+\Delta t)=N(t)+\alpha N(t)\Delta t,$$

$$N(t+\Delta t)-N(t)=\alpha N(t)\Delta t,$$

$$\Delta N=\alpha N(t)\Delta t,$$

де ΔN – приріст популяції за період часу Δt: $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=\alpha N(t)$.

Середня швидкість зростання популяції $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}$ пропорційна чисельності популяції (модель Мальтуса) з коефіцієнтом пропорційності α, розрахованим в результаті експерименту для даної популяції (коефіцієнт називається коефіцієнтом приросту, або коефіцієнтом Мальтуса).

Знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha N(t)$ і, пригадавши означення похідної функції одної змінної $\left(\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=\dfrac{dN}{dt}=N'(t)\right)$, приходимо до рівняння $\dfrac{dN}{dt}=\alpha N(t)$ (або $N'(t)=\alpha N(t)$), яке називається **звичайним диференціальним рівнянням.** Отримане диференціальне рівняння описує зростання чисельності популяції при відсутності обмежень і є математичною моделлю Задачі 1.

Диференціальні рівняння – важливий інструмент вивчення динамічних процесів в природознавстві. Засновником теорії диференціальних рівнянь вважається Ісаак Ньютон (1642-1727). Ньютон стверджував, що корисно розв’язувати диференціальні рівняння, оскільки ними виражаються закони природи. Сам термін «диференціальні рівняння» був введений Г. Лейбницем.

1.2 Початкові положення теорії звичайних диференціальних рівнянь

Означення. Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить похідні (диференціали) невідомої функції, можливо саму невідому функцію та незалежну змінну.

Символічно диференціальне рівняння можна записати так $F\left(y^{(n)},\ldots,y',y,x\right)=0$.

У звичайних диференціальних рівняннях шукана функція залежить від одного дійсного аргументу, на відміну від диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Метою розв'язання диференціального рівняння є пошук невідомої функції та подальше дослідження її властивостей. У простіших випадках її можна знайти аналітично, однак в реальних задачах це робиться наближено, чисельно або чисельно – аналітично за допомогою сучасних обчислювальних методів. Процес відшукання таких функцій називається інтегруванням диференціальних рівнянь.

Означення. Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить в рівняння.

Рівняння, яке отримано при розв'язанні задачі 1 є диференціальним рівнянням першого порядку.

Вправа. Які з наведених рівнянь є звичайними диференціальними рівняннями? Укажіть порядок диференціальних рівнянь.

$a)\, x^2+2x+3=0$

$b)\, \sqrt{1-x^2}dy-ydx=0$

$c)\, y'=2y\cdot ctgx$

$d)\, xy'-4=y^2$

$e)\, 3x-5=0$

$f)\, \cos x=1$

$g)\, y''+4y'=0$

$h)\, a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$

Розв’яжемо рівняння, отримане в Задачі 1: $\dfrac{dN}{dt} = \alpha N(t)$.

Для цього відокремимо змінні *N* і *t*: $\dfrac{dN}{N} = \alpha dt$. Під відокремленням змінних будемо розуміти таке перетворення рівняння, в результаті якого різні змінні знаходяться в різних частинах рівності. У даному випадку, поділивши ліву та праву частини рівняння на $N \neq 0$, отримали змінну *N* у лівій частині, а змінну *t* у правій. Знайдемо інтеграли від лівої та правої частин рівності $\int \dfrac{dN}{N} = \int \alpha dt, \ln N = \alpha t + \ln C,\ N(t) = Ce^{\alpha t}$ – **функція**, що описує чисельність особин колонії в даний момент часу є **розв’язком,** або інтегралом диференціального рівняння.

У шкільному курсі математики вивчались різноманітні рівняння: алгебраїчні, тригонометричні та ін., розв’язками яких були числа. Як перевірити, що число 1 є розв’язком рівняння $x^2 + 2x - 3 = 0$?

Розв’язками диференціальних рівнянь будуть функції.

Означення. Розв’язком диференціального рівняння $F\left(y^{(n)}, ..., y', y, x\right) = 0$ на деякому інтервалі *I* називають *n* разів диференційовану на цьому інтервалі **функцію**, задану явно, частіше неявно, яка при підстановці в рівняння перетворює його на тотожність.

Приклад 1. Покажіть, що функція $y = 5e^{2x}$ є розв’язком диференціального рівняння $y' = 2y$.

Розв’язання. Згідно означенню функція буде розв’язком диференціального рівняння, якщо після підстановки її у рівняння воно перетвориться на тотожність. Знайдемо $y' = \left(5e^{2x}\right)' = 10e^{2x}$. Підставивши в рівняння $y' = 2y$, отримаємо $10e^{2x} = 2 \cdot 5e^{2x}$, $10e^{2x} = 10e^{2x}$ – тотожність. Висновок. Функція $y = 5e^{2x}$ є розв’язком диференціального рівняння $y' = 2y$.

Графіки функцій, що є розв'язками диференціального рівняння, називаються **інтегральними кривими.** На рис. 1 зображено графіки функції $y = Ce^x$ при різних значеннях константи С при $x > 0$.

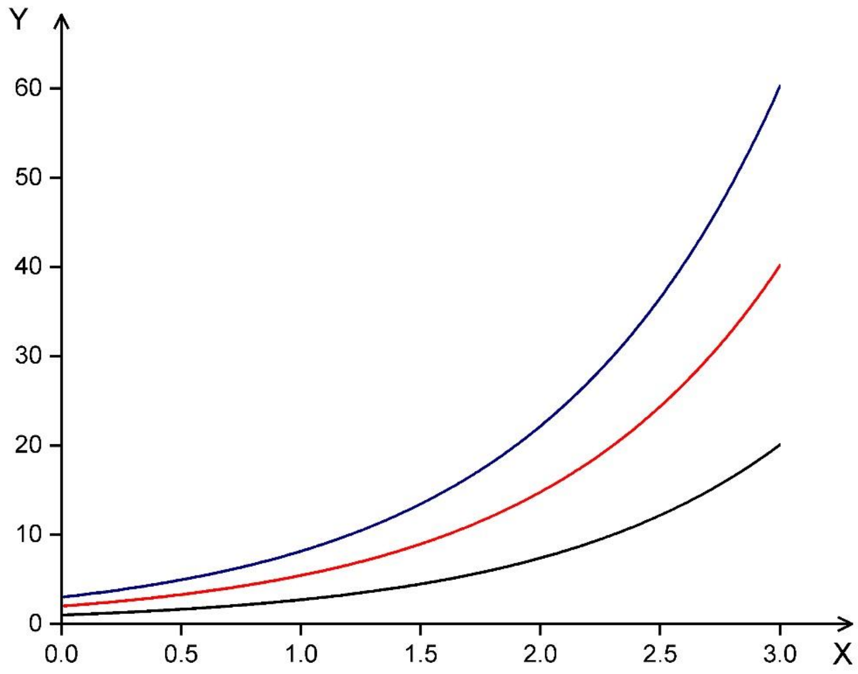

Рис.1 Інтегральні криві рівняння $y = Ce^x$ при $x > 0$.

1.3 Диференціальні рівняння першого порядку та їх розв'язки

$F(y', y, x) = 0$ – загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку в неявному вигляді. Така залежність може не містити *x* або *y*, але обов'язково має містити y'. Якщо рівняння можна розв'язати відносно y', то його записують у вигляді $y' = f(x, y)$ і називають диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням у нормальній формі.

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку у вигляді

$$y' = f(x, y) \qquad (1.1).$$

Основною задачею теорії диференціальних рівнянь є знаходження всіх розв'язків диференціальних рівнянь та вивчення властивостей цих розв'язків.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називається інтегруванням цього рівняння.

В загальному випадку при інтегруванні диференціальних рівнянь отримуємо нескінченну кількість розв'язків, що відрізняються сталими величинами. Часто для уточнення розв'язку вводять додаткові умови, які називаються **початковими умовами** і записується у вигляді $y\left(x_0\right)=y_0$ або $y\big|_{x=x_0}=y_0$.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y=\varphi\left(x,C\right)$, яка містить одну довільну сталу С та задовольняє умовам:

1. Функція $y=\varphi\left(x,C\right)$ є розв'язком рівняння (1.1) при кожному фіксованому значенні С.
2. Якою б не була початкова умова $y\left(x_0\right)=y_0$ завжди знайдеться значення константи $C=C_0$ таке, що функція $y=\varphi\left(x,C_0\right)$ задовольняє заданій початковій умові.

Означення. Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається будь яка функція $y=\varphi\left(x,C_0\right)$, отримана з загального розв'язку $y=\varphi\left(x,C\right)$ при конкретному значенні константи $C=C_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді $\Phi\left(x,y,C\right)=0$, то його називають загальним інтегралом диференціального рівняння, а $\Phi\left(x,y,C_0\right)=0$ - частинним інтегралом.

На початку розвитку теорії звичайних диференціальних рівнянь вважалось, що основною задачею є пошук загального розв'язку. Однак пізніше О. Коші показав, що не менш важливою задачею є знаходження розв'язків, що задовольняють певним умовам.

Задачу відшукання розв'язку диференціального рівняння, який відповідає заданим початковим умовам, в математиці називають **задачею**

Коші. Для диференціального рівняння (1.1) задачу Коші можна записати у вигляді $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Теорема (теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші).

Якщо в області існування змінних, що входять в рівняння (1.1), функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені та неперервні, то розв'язок задачі Коші існує та є єдиним.

Геометрично дана теорема гарантує, що різні **інтегральні криві не перетинаються.** З геометричної точки зору розв'язати задачу Коші – виділити інтегральну криву, що проходить через задану точку.

Для побудови інтегральних кривих диференціального рівняння (1.1) часто потрібно спочатку побудувати **поле напрямків** (особливо, якщо рівняння не можна розв'язати аналітично). Вважається, що в деякій плоскій області задано поле напрямків, якщо кожній точці цієї області поставлено у відповідність певний напрямок. Як правило, напрямок задається одиничним вектором. Відомо, що геометричний зміст похідної функції – тангенс кута нахилу дотичної, проведеної до графіка даної функції в даній точці: $y' = tg\varphi$. Якщо $tg\varphi$ невизначений, то поле має вертикальний напрямок. Отже для побудови поля напрямків для відповідного диференціального рівняння потрібно в кожній точці області побудувати вектор під заданим кутом до осі абсцис. Інтегральна крива в кожній своїй точці дотикається до відповідного вектора поля і, навпаки, крива, яка всюди дотикається до вектора буде графіком розв'язку. В цьому полягає **геометричний зміст диференціального рівняння** (1.1).

В нашому прикладі задано **початкові умови** $N(t_0) = N_0$- чисельність популяції в початковий момент часу, що надає можливість знайти константу С та отримати **частинний розв'язок**, що задовольняє даним початковим умовам.

Розглянемо загальний розв'язок, отриманий у Задачі 1: $N(t) = Ce^{\alpha t}$ та початкові умови $N(t_0) = N_0$. Нехай початковий момент часу $t_0 = 0$, а кількість особин даного виду на початку дослідження $N_0 = 10$. Підставимо початкові умови в загальний розв'язок: $N_0(t) = Ce^{\alpha t_0}$, $10 = Ce^{\alpha \cdot 0}$, $C = 10$. Отже розв'язком задачі Коші буде функція $N\left(t\right)=10e^{\alpha t}$. Для розв'язання задачі Коші застосовують такий **алгоритм**: знаходять загальний розв'язок диференціального рівняння; підставляють в нього початкові умови; розв'язують рівняння відносно константи С; записують розв'язок задачі.

Аналіз розв'язку показує, що функція $N\left(t\right)=10e^{\alpha t}$ $\left(\alpha>0\right)$ прямує до нескінченності при $t\to\infty$, тобто число особин даного виду буде нескінченно зростати. Наприклад, потомство пари мух, за умови безперешкодного розмноження, за два роки мало б масу, що перевищувала б масу Землі. Насправді таке швидке зростання не спостерігається, хоча відомі випадки, коли неконтрольоване зростання популяції призводило до екологічних проблем. Наведіть приклади таких ситуацій в історії людства.

Крім загального та частинного розв'язків у диференціальному рівнянні можуть з'являтись **особливі розв'язки,** які не можуть бути отриманими із загального ні при якому значенні константи С.

1.4 Задачі на застосування моделі експоненціального зростання

Процеси, математичною моделлю яких є рівняння $y'=ky$, називаються **процесами показникового (експоненціального) зростання**, оскільки розв'язки цього рівняння мають вигляд $y=Ce^{kx}$. У Задачі 1 застосовано модель природнього (експоненціального) зростання, яка є базовою моделлю динаміки популяцій. Таку модель було запропоновано в 1798 році англійським вченим Томасом Мальтусом для вивчення зростання народонаселення Землі. Зазвичай говорять про геометричне зростання (геометричну прогресію) в дискретних моделях і про експоненціальне зростання в моделях з неперервним часом. Зрозуміло, що модель Мальтуса є адекватною тільки на початкових стадіях розвитку популяцій.

На практиці швидкість зростання популяції описується BDE (Birth, Death, Emigration) моделлю, тобто швидкостями розмноження, загибелі та еміграції.

Задача 2 Складіть математичну модель попередньої задачі (Задача 1.1) за умов, що α- коефіцієнт народжуваності, β – смертності. Коефіцієнт еміграції вважаємо рівним нулю. Розв'яжіть її та проаналізуйте стан популяції в залежності від коефіцієнтів α та β.

Модель експоненціального зростання застосовується в багатьох задачах біології, фізики, хімії, екології. Наведемо приклади основних типів задач, в яких застосовується така модель:

- Зростання популяції. Швидкість зростання популяції пропорційна поточному розміру популяції: $\frac{dN}{dt} = kN(t)$, $N(t)$ – розмір популяції у момент часу t, $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності.
- Задача про радіоактивний розпад (закон змінення маси радію в залежності від часу): $\frac{dm}{dt} = -km(t)$, $m(t)$ маса радію в момент часу t, $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності.
- Вивчення характеру забруднень навколишнього середовища. Процес розкладу речовини в ґрунтах здійснюється пропорційно поточній концентрації цієї речовини, а весь комплекс факторів, що діє на зміну концентрації пестицидів і радіонуклідів в часі, виражається за допомогою усередненого коефіцієнта $\boldsymbol{k}$. Кінетику розпаду пестицидів можна описати рівнянням $\frac{dU(t)}{dt} = -kU(t)$.

Розв'язок має вигляд $U(t) = U_0 e^{-kt}$, де $U(t)$ – кількість пестициду на момент часу $\boldsymbol{t}$; U_0 – початкова концентрація пестициду; $\boldsymbol{k}$ – коефіцієнт швидкості реакції розпаду пестициду.

- Змішування рідин у резервуарах. При змішуванні рідин в резервуарах можна зв'язати масу певної речовини зі швидкістю потоку та концентрацією наступним чином: $\frac{dm}{dt} = -qC$, тут *m* – маса речовини, *q* – швидкість потоку, *C* – концентрація.
- Задача про охолодження тіла при сталій зовнішній температурі. $\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_з)$, $T(t)$-температура тіла в момент часу t, $T_з$ – температура зовнішнього середовища.

- Закон змінення тиску повітря в залежності від висоти над рівнем моря $\frac{dp}{dh} = -k \cdot p(h)$, $p(h)$ – атмосферний тиск на висоті *h*.

- Задача хімічної кінетики. Хімічна кінетика є розділом фізичної хімії, в якому вивчаються, зокрема, швидкості хімічних реакцій. Швидкість протікання реакції пропорційна масі або концентрації речовини, що вступає в реакцію, тобто $v = -kC$. Відповідне диференціальне рівняння має вигляд $\frac{dC}{dt} = -kC$, де C – концентрація речовини, а k – коефіцієнт пропорційності, який визначається для кожної речовини, що вступає в реакцію, на основі експериментальних даних.

Приклади розв'язання задач

Задача 3 (Радіоактивний розпад). Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду пропорційна кількості речовини $x(t)$, яка ще не розпалася на момент часу t. Знайти залежність *x* від часу *t*, якщо в початковий момент часу $t = t_0$ кількість речовини буде $x = x_0$.

Розв'язання. Припускаємо, що коефіцієнт пропорційності k, $k > 0$ (стала розпаду) відомий. Диференціальне рівняння процесу має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t).$$

Знак "мінус" вказує на зменшення $x(t)$ з часом. Відокремлюємо змінні $\frac{dx}{x} = -kdt$ та інтегруємо $\ln|x| = -kt + \ln|C|$, $\ln|x| = \ln e^{-kt} + \ln|C|$, $x(t) = Ce^{-kt}$ – загальний розв'язок рівняння. Враховуючи, що $x(t_0) = x_0$, знаходимо $C = x_0 e^{kt_0}$. Остаточно $x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}$.

Визначимо додатково період напіврозпаду τ, тобто час за який розпадеться половина від початкової кількості речовини $\frac{1}{2}x_0$. Оскільки $\tau = t - t_0$, то $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k\tau}$, звідки $\tau = \frac{\ln 2}{k}$.

Відповідь. $x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}$

Задача 4 (про охолодження тіла). Нехай тіло нагріте до температури T_0. Температура зовнішнього середовища стала і дорівнює $T_з$, причому $T_з < T_0$. Знайти залежність між температурою тіла, що змінюється і часом охолодження *t*.

Розв'язання. При розв'язанні задач, що описують фізичні процеси, можна керуватися відповідними фізичними законами. Процес охолодження тіла відбувається згідно закону Ньютона, за яким швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища. Важливо, що в даному випадку температура навколишнього середовища залишається незмінною $\left(T_з - const\right)$. При змінній температурі навколишнього середовища рівняння, що описує процес, буде іншим.

Нехай в момент часу *t* температура тіла $T(t)$. Згідно фізичному змісту похідної швидкість зміни температури – $\dfrac{dT}{dt}$ Враховуючи, що швидкість змінення пропорційна різниці температур $\left(T(t) - T_з\right)$, отримуємо диференціальне рівняння: $\dfrac{dT}{dt} = -k\left(T(t) - T_з\right),\ k > 0$. Знак «мінус» перед коефіцієнтом *k* в правій частині рівняння обрано тому, що тіло охолоджується і його температура зменшується. Коефіцієнт *k* встановлюється експериментально та залежить від фізичних властивостей і геометрії тіла. Оскільки температура навколишнього середовища не змінювалась, то отримане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні $\dfrac{dT}{\left(T(t) - T_з\right)} = -kdt$ та проінтегрувавши ліву та праву частини рівності $\int \dfrac{dT}{\left(T(t) - T_з\right)} = -\int kdt$, отримуємо:

$$ln\left|T(t) - T_з\right| == -kt + lnC,\ ln\left|T(t) - T_з\right| == \ln e^{-kt} + lnC,$$

$$ln\left|T(t)-T_з\right| == \ln Ce^{-kt} \text{ , } T(t)-T_з = Ce^{-kt}.$$

Загальний розв'язок рівняння: $T(t) = T_з + Ce^{-kt}$. Для знаходження константи C застосуємо початкову умову $T(0) = T_0$. Для цього підставимо в загальний вигляд розв'язку $t = 0$:

$$T_0 = T(0) = T_з + Ce^{-k0} = T_з + C.$$

Звідки $C = T_0 - T_з$, і, остаточно: $T(t) = T_з + (T_0 - T_з)e^{-kt}$.

Відповідь. $T(t) = T_з + (T_0 - T_з)e^{-kt}$.

1.5 Логістичне зростання. Модель Ферхюльста

Модель Мальтуса (модель експоненціального зростання) є адекватною тільки на початкових етапах розвитку популяції, тобто при умовах необмеженості ресурсів та відсутності конкуренції за ці ресурси. Оскільки в реальній популяції кількість ресурсів обмежена, то з деякого моменту всередині популяції починається боротьба за ці ресурси, що призводить до зменшення швидкості зростання популяції. Необмежене збільшення чисельності популяції на обмеженій площі ареалу призведе до частих зіткнень всередині ареалу за ресурси. Першою моделлю, яка враховувала внутрішньовидову конкуренцію, була модель логістичного зростання, запропонована бельгійським математиком П'єром Франсуа Ферхюльстом. У 1838 році Ферхюльст ввів логістичне рівняння, яке є своєрідним узагальненням рівняння експоненціального зростання, але з максимальним значенням для населення. Він використовував дані про змінення народонаселення різних країн для оцінки невідомих параметрів. Роботу Ферхюльста було відкрито заново лише в 20-тих роках минулого століття. Історики науки досі не встановили, чому він назвав свій закон «логістичним».

Як відомо, при складанні математичних моделей реальних процесів застосовуються різні припущення. У найпростішому випадку ресурсну базу можна подати спадною лінійною функцією від розміру популяції. Тоді записати диференціальне рівняння, що описує змінення популяції, можна наступним чином:

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(1 - \frac{x}{M}\right) \qquad (1.2)$$

де $x(t)$ – розмір популяції в момент часу *t*, *M* – підтримуюча ємність середовища, $k > 0$ питома швидкість розмноження.

Рівняння (1.2) є диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними. Після відокремлення змінних рівняння набуває вигляду $\frac{M}{x(x-M)}dx = -kdt$. Інтегруємо ліву та праву частини рівності $\int \frac{M}{x(x-M)}dx = -\int kdt$:

$$\int \frac{M}{x(x-M)}dx = -\int \frac{(x-M)-x}{x(x-M)}dx = -\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x-M}dx = \ln\left|\frac{x-M}{x}\right|$$

$$-\int kdt = -kt + \ln|C| = \ln e^{-kt} + \ln|C| = \ln\left|Ce^{-kt}\right|$$

$$\ln\left|\frac{x-M}{x}\right| = \ln\left|Ce^{-kt}\right|, \ \frac{x-M}{x} = Ce^{-kt},$$

$x(t) = \frac{M}{1-Ce^{-kt}}$ – загальний розв’язок диференціального рівняння (1.2).

Якщо задано початковий розмір популяції $x(0) = m$ (сформульовано задачу Коші) , то $C = 1 - \frac{M}{m}$.

Для наочності покладемо $M = 10$, $m = 2$, $k = 2$. На рис. 2 зображено графік закону роста популяції, який називають логістичним, а саму криву називають логістичною кривою. На рисунку видно як виконується перехід від показникового зростання до процесу вирівнювання.

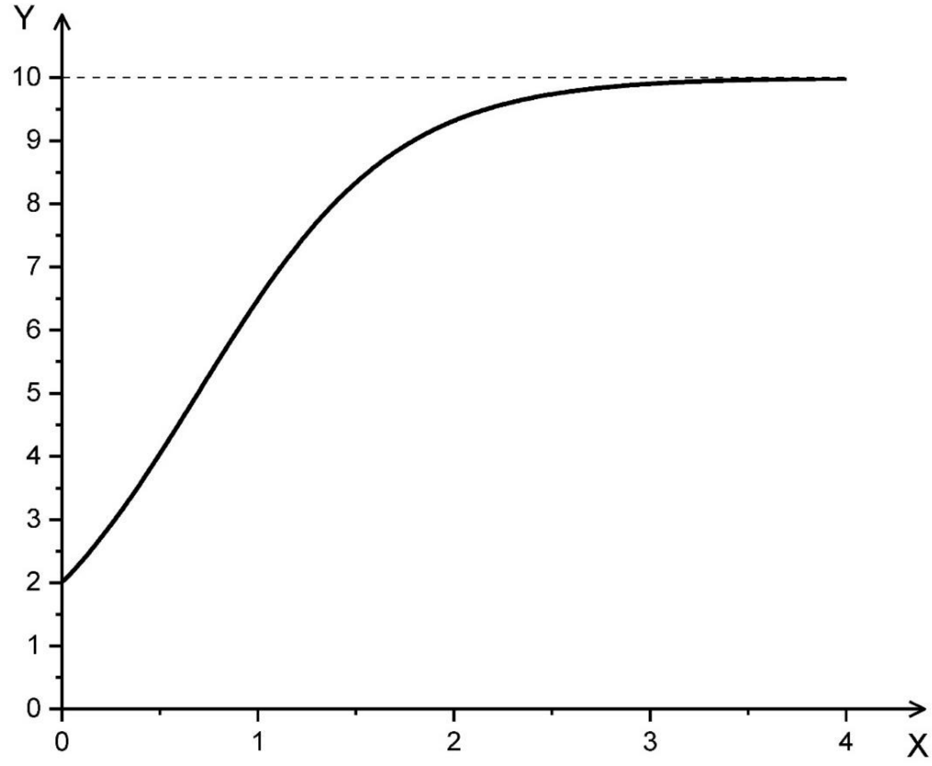

Рис. 2 Логістична крива (розглядаємо при $x(t) \geq 0$).

Для багатьох природніх популяцій розв'язок добре співпадає з експериментальними даними. Якщо популяція $x(t)$ мала в порівнянні з параметром *M,* отримуємо наближене рівняння $\frac{dx}{dt} \approx kx$, розв'язком якого є $x(t) \approx x(0)e^{kt}$, тобто маємо експоненціальне зростання. Темп зростання зменшується при наближенні $x(t)$ до *M*.

Розглядається й інший підхід. При зростанні популяції в *n* разів кількість зіткнень збільшується в n^2 разів, тому можна припустити, що несприятливий вплив чисельності популяції на народжуваність пропорційна квадрату цієї народжуваності. Нехай $x(t)$ – розмір популяції в момент часу *t*, тоді диференціальне рівняння експоненціального зростання $\dot{x}(t) = \alpha x(t)$ доповнюється доданком $-\beta x^2(t)$, $\alpha, \beta > 0$ – деякі коефіцієнти. Отримаємо логістичне рівняння

$\dot{x}(t)=\alpha x(t)-\beta x^2(t)$, яке описує змінення популяції з урахуванням конкуренції. Розв'язкам цього рівняння буде функція $x(t)=\dfrac{\alpha}{\beta\left(1-Ce^{-\alpha t}\right)}$.Для знаходження константи C скористаємось початковою умовою $x(0)=x_0$ і отримаємо: $x(t)=\dfrac{\alpha x_0}{\beta x_0+(\alpha-\beta x_0)e^{-\alpha t}}$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Розв'язати задачі 1-6.

1. (Гідрологічна модель) Рівень води у водоймі змінюється відповідно до рівняння $\dfrac{dH}{dt}=P-E$, де $H(t)$ – рівень води (м), $P=3$ (мм/доба) – приплив води (опади), $E=1$ (мм/доба) – випаровування. Знайти рівень води через 10 днів, якщо початковий рівень води $H(0)=5$ м. (Відповідь: 5,02 м.)

2. Під час розпаду ядер радіоактивних речовин утворюються нейтрони. При деяких умовах вони попадають в інші ядра та викликають їх радіоактивний розпад. Швидкість розпаду радію в кожний момент часу прямо пропорційна до наявної його масі. З'ясувати, який процент маси m_0 радію розпадеться через 200 років, якщо відомо, що період напіврозпаду радію (період часу, через який розпадається половина наявної маси радію) дорівнює 1590 років. (Відповідь: 8,5%.)

3. Вітер, проходячи лісом, втрачає частину своєї швидкості через супротив дерев. На нескінченно малому шляху втрата пропорційна швидкості на початку шляху та його довжині. Знайти швидкість вітру, що пройшов 150м, знаючи, що при входженні в ліс початкова швидкість вітру $v_0=12\dfrac{м}{с}$; після проходження шляху $S=1$ м, швидкість вітру зменшилась до $v_1=11{,}8\dfrac{м}{с}$. (Відповідь: $\approx 0{,}93\dfrac{м}{с}$.)

4. Тіло, нагріте до температури $T_0 = 300^\circ C$ помістили в рідину, температура якої $60^\circ C$. Визначити час за який тіло охолодиться до $150^\circ C$, якщо вважати, що кількість рідини настільки велика, що її температура майже не змінюється. При цьому відомо, що за 10 хв від початку процесу температура тіла стала $200^\circ C$.

(Відповідь: $t = -\dfrac{1}{0,05} ln\dfrac{3}{8} \approx 18,5$ хв.)

5. Швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температури тіла і навколишнього середовища. Нагріте до $T = 100^\circ C$ тіло охолодилось до $60^\circ C$ при температурі навколишнього повітря $20^\circ C$ за 20 хвилин. Через скільки хвилин температура тіла стане $25^\circ C$?

(Відповідь: $t = \dfrac{ln 0,0625}{-2,1} \approx 1,3$ год, $ln 0,0625 \approx -2,77$.)

6. Розклад токсичної речовини відбувається за законом $\dfrac{dC(t)}{dt} = -kC(t)$. Знайти концентрацію через 5 годин після початку процесу, якщо початкова концентрація $C_0 = 100\dfrac{мг}{л}$, а коефіцієнт розпаду $k = 0,1 год^{-1}$.

(Відповідь: $\approx 60,65\dfrac{мг}{л}$.)

7. Перевірте, чи буде функція розв’язком відповідного диференціального рівняння:

$a) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, y'' + y = 0$

$b) e^{-y} - Cx = 1, xy' + 1 = e^y$

$c) y = Ce^{-2x} + \dfrac{1}{3}e^x, y' + 2y = e^x$

$d) y = Cx^3, y' - \dfrac{3}{x}y = 0$

$$e)\, y=\frac{C_1}{x}+C_2,\, y''+\frac{2}{x}y'=0$$

$$f)\, y=Cx+C-C^2, (y')^2-y'-xy'+y=0$$

$$g)\, y=C_1\sin 3x+C_2\cos 3x,\, y''+9y=0$$

Контрольні запитання

1. Які рівняння називаються звичайними диференціальними рівняннями?
2. Як визначається порядок диференціального рівняння?
3. Що називають розв'язком (інтегралом) диференціального рівняння?
4. Що називається інтегральною кривою?
5. Що таке поле напрямків даного диференціального рівняння?
6. В чому полягає геометричний зміст диференціального рівняння?
7. За яких умов розв'язок рівняння буде загальним?
8. В чому полягає задача Коші для диференціального рівняння першого порядку?
9. Які розв'язки диференціального рівняння називаються частинними? Особливими?
10. Як називаються диференціальні рівняння виду $y'=ky$? Чому?
11. При розв'язанні яких задач застосовується рівняння виду $y'=ky$?

Тема 2
Диференціальні рівняння першого порядку

Познайомимось з диференціальними рівняннями першого порядку, які допускають аналітичне розв'язання. При розв'язанні диференціальних рівнянь важливо встановити **тип** рівняння. До кожного з типів розроблено **методи** розв'язання, або в довідниках подано загальний інтеграл.

№	Назва	Вид	Метод
1	Рівняння з відокремлювальними змінними	$y' = f(x)g(y)$ або $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$	Відокремлення змінних
2	Лінійні рівняння	$y' + p(x)y = f(x)$	Підстановка $y = u \cdot v$ або метод варіації довільної сталої
3	Рівняння Бернуллі	$y' + p(x)y = f(x)y^n$, $n \neq 0, n \neq 1$	Заміною $z = y^{1-n}$ зводиться до лінійного
4	Однорідні рівняння	$y' = f(x,y)$, де $f(tx,ty) = f(x,y), t \neq 0$	Підстановкою $y = ux, u = u(x)$ зводиться до рівняння з відокремлювальними змінними
5	Рівняння в повних диференціалах	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, якщо $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$	$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$

2.1 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду $y' = ky(x)$, які розглядались раніше, є окремими випадками рівняння

$$f_1(x)\cdot g_1(y)dx + f_2(x)\cdot g_2(y)dy = 0. \qquad (2.1)$$

Рівняння (2.1) називають диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Якщо обидві частини рівняння поділити на вираз $f_2(x)\cdot g_1(y)$, то отримаємо рівність $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$.
В результаті інтегрування маємо загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння (2.1): $\int \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C$.

При діленні на вираз із змінними $f_2(x)\cdot g_1(y)$ можлива втрата розв'язків рівнянь $f_2(x) = 0$ та $g_1(y) = 0$, які можуть як входити в загальний розв'язок так і не входити. Розв'язки, що не входять у загальний розв'язок називаються *особливими* (окремими).

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^3 dx + (2x-3)dy = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння в наступному вигляді та поділимо на вираз $\left(-y^3(2x-3)\right)$:

$$(2x-3)dy = -y^3dx \Big| : \left(-y^3(2x-3)\right).$$

В результаті змінні є відокремленими

$-\dfrac{dy}{y^3} = \dfrac{dx}{2x-3}$ та можна інтегрувати: $-\int \dfrac{dy}{y^3} = \int \dfrac{dx}{2x-3}$.

Після інтегрування маємо загальний розв'язок у вигляді

$$\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + const.$$

Відповідь можна залишити в такому вигляді, а можна переписати. Константу часто записують у більш зручному вигляді, головне, щоб вона приймала всі можливі дійсні значення. В даному випадку константу зручно записати у вигляді $\frac{1}{2}\ln|C|, C \neq 0$.

Розв'язок рівняння запишеться у вигляді $\frac{1}{2y^2}=\frac{1}{2}\ln|2x-3|+\frac{1}{2}\ln|C|$ і після перетворень отримаємо загальний розв'язок рівняння у неявному вигляді: $\frac{1}{y^2}=\ln|C(2x-3)|$.

$x=\frac{3}{2}$ - розв'язок. Переконатись в цьому можна підставивши у рівняння та врахувавши, що $dx=0$. Аналогічно перевіряємо $y=0$.

Очевидно, що ці розв'язки не випливають із загального, тобто є особливими.

Відповідь: $\frac{1}{y^2}=\ln|C(2x-3)|,\ x=\frac{3}{2},\ y=0$.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші $y'\cdot tgx = y+1,\ y(0)=1$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx}\cdot tgx = y+1$.

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{tgx},\ \int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{dx}{tgx},$$

$$\ln|y+1|=-\ln|\cos x|+\ln|C|,\ \ln|y+1|=\ln\left|\frac{C}{\cos x}\right|,$$

$y+1=\frac{C}{\cos x}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Знайдемо константу *C*. Для цього застосуємо початкову умову $y(0)=1$:

$$1+1=\frac{C}{\cos 0},\ C=2.$$

Відповідь: $y=\frac{2}{\cos x}-1$.

2.2 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Рівняння виду

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{2.2}$$

де $y(x)$ – шукана функція, а $p(x), f(x)$ – задані функції від x (будемо вважати їх неперервними), називається **лінійним** диференціальним рівнянням першого порядку.

Невідома функція та її похідна входять лінійно, тобто в першому степені. Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння $y' + p(x)y = 0$ називається однорідним, в іншому випадку неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Розглянемо **методи розв'язання** лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Існують декілька способів розв'язання рівнянь даного типу.

2.2.1. Метод Бернуллі

Даний метод вперше був запропонований та застосований у 1697 році Йоганом Бернуллі (1667-1748) і названий на його честь.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{2.2}$$

Ідея методу Бернуллі полягає в тому, що загальний розв'язок шукають у вигляді добутку двох тотожно не рівних нулю функцій: $y = u(x) \cdot v(x)$, при умові, що одна з них є розв'язком однорідного рівняння $y' + p(x)y = 0$.

Нехай такою буде функція $u = u(x)$, тоді $u' + p(x)u = 0$. Пам'ятаємо, що розв'язком диференціального рівняння є функція, що задовольняє рівняння. Враховуючи, що $y' = u'v + uv'$, підставляємо в рівняння відповідні вирази для y та y' і отримуємо $u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$. Далі групуємо перший і третій доданки, виносячи за дужки v: $\left(u' + p(x)u\right)v + uv' = f(x)$. Оскільки

$u' + p(x)u = 0$, тоді $uv' = f(x)$. Отримаємо систему диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними: $\begin{cases} u' + p(x)u = 0, \\ uv' = f(x) \end{cases}$

Знаходимо частинний розв'язок першого рівняння системи. Після відокремлення змінних $\frac{du}{dx} = -p(x)u$, $\frac{du}{u} = -p(x)dx$ та інтегрування, отримаємо $\ln|u| = -\int p(x)dx$, $u = e^{-\int p(x)dx}$ – частинний розв'язок однорідного рівняння.

Підставляємо його в друге рівняння системи та знаходимо загальний розв'язок цього рівняння: $e^{-\int p(x)dx} \cdot v' = f(x)$, $\frac{dv}{dx} = e^{\int p(x)dx} f(x)$, $dv = e^{\int p(x)dx} f(x)dx$, $v = \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx + C$.

В результаті загальний розв'язок рівняння (2.2) можна записати формулою:

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right). \qquad (2.3)$$

З останньої формули видно, що будь-який розв'язок лінійного рівняння є неперервно диференційованою функцією незалежної змінної.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' + \frac{1}{x-1}y = 6x$.

Розв'язання. Встановлюємо, що задане рівняння має вигляд $y' + p(x)y = f(x)$, $p(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(x) = 6x$, тобто є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Розв'яжемо його методом Бернуллі. Розв'язок шукатиме у вигляді $y = u \cdot v$**,** де $u = u(x), v = v(x)$**;** $y' = u'v + uv'$**.** Підставляючи в рівняння отримуємо:

$$u'v + uv' + \frac{1}{x-1}uv = 6x,\ \left(u'v + \frac{1}{x-1}uv\right) + uv' = 6x,$$

$$\left(u' + \frac{1}{x-1}u\right)v + uv' = 6x.$$

Функцію u вибираємо спеціальним чином так, щоб вона була розв'язком рівняння $u' + \frac{1}{x-1}u = 0$. Отримуємо систему:

$$\begin{cases} u' + \frac{1}{x-1}u = 0, \\ uv' = 6x \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи: $u' + \frac{1}{x-1}u = 0$,

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x-1}u,\ \frac{du}{u} = -\frac{1}{x-1}dx,\ \int\frac{du}{u} = -\int\frac{1}{x-1}dx,$$

$$\ln|u| = -\ln|x-1|,\ \ln|u| = \ln\left|\frac{1}{x-1}\right|,\ u = \frac{1}{x-1}.$$

На даному етапі не вводимо константу, беремо одне з можливих значень. Підставимо дану функцію в друге рівняння системи, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{1}{x-1}v' = 6x,\ v' = 6x(x-1),\ v = 6\int\left(x^2 - x\right)dx,$$

$$v = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) + C,\ v = 2x^3 - 3x^2 + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = uv = \frac{1}{x-1}\left(2x^3 - 3x^2 + C\right)$.

Відповідь: $y = \frac{1}{x-1}\left(2x^3 - 3x^2 + C\right)$.

2.2.2 Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Спосіб варіації довільної сталої для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку також запровадив Й. Бернуллі, однак у навчальній літературі цей спосіб пов'язують з ім'ям Жозефа Луї Лагранжа (1736-1816). Пояснюється це, можливо, тим, що саме Ж.Л. Лагранж у 1774-1775 роках розробив спосіб варіації довільної сталої для розв'язання лінійного рівняння n-го порядку.

Загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ складається з загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $y' + p(x)y = 0$ та якогось одного частинного розв'язку неоднорідного: $y_{з.н} = y_{з.о} + y_{ч.н}$. Загальний розв'язок однорідного рівняння $y' + p(x)y = 0$ має вигляд $y = Ce^{-\int p(x)dx}$. За допомогою загального розв'язку однорідного можна знайти загальний розв'язок неоднорідного, застосувавши метод варіації довільної сталої.

Ідея методу полягає в тому, що С розглядають як деяку неперервно диференційовану функцію $C = C(x)$, а розв'язок $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ – розв'язок неоднорідного рівняння. Оскільки функція є розв'язком диференціального рівняння $y' + p(x)y = q(x)$, то вона має задовольняти дане рівняння. Знаходимо $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$ і після підстановки в рівняння отримуємо $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$, звідки $C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$.

Підставивши в $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ отримаємо формулу 2.3.

Розглянемо задачу, математичною моделлю якої є лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Задача 1. Людина в середньому дихає 18 разів за 1 хвилину, видихаючи кожного разу 2000 см^3 повітря, що містить 4% CO_2. У аудиторії, розміри якої становить $5м \times 20м \times 4м$, знаходиться 50 осіб. Вентилятори подають 40 м^3 /хв свіжого повітря, що містить 0,04% CO_2. Знайти вміст (у %) вуглекислого газу (діоксиду вуглецю) в аудиторії через півгодини після початку процесу. Проаналізуйте стан повітря з точки зору будівельних норм.

Розв'язання. Перед складанням моделі для розв'язання задачі приймемо такі припущення:

- знехтуємо надходженням CO_2 з інших джерел;

- вважатимемо, що CO_2 в усіх частинах приміщення в даний момент часу однакова, тобто в результаті перемішування газ розподіляється рівномірно.

Застосуємо алгоритм, який розглянуто в Темі 1. Нехай в повітрі аудиторії в момент часу t(хв) міститься $x(t)$(м^3) вуглекислоти. При складанні диференціального рівняння за умовою практичної задачі, як правило, потрібно визначити математичну залежність між змінними величинами та їх приростами. Зафіксуємо час t_0(хв) початку вимірювання і розрахуємо об'єм $x(t)$(м^3) вуглекислоти в аудиторії у довільний момент часу $t: x(t) = x(t_0) + I + II - III$, де $x(t_0)$ – об'єм CO_2 в аудиторії в момент часу t_0, доданок I – об'єм вуглекислоти, яка виділяється при диханні людей в аудиторії у м^3, доданок II – об'єм вуглекислоти, що потрапляє в аудиторію ззовні завдяки роботі вентиляторів, доданок III – об'єм вуглекислоти, що виводиться завдяки роботі вентиляторів.

I: $V = 5м \times 20м \times 4м = 400м^3$ - об'єм аудиторії. Людина видихає кожного разу $2000см^3$ повітря.

Узгодимо розмірність:

$$2000см^3 = \frac{2000}{1000000}м^3 = \frac{2}{1000}м^3.$$

Одна людина в середньому дихає 18 разів за 1 хвилину і видихає $18 \cdot \frac{2}{1000}м^3$, а 50 людей за хвилину видихають відповідно $50 \cdot 18 \cdot \frac{2}{1000}м^3$ повітря, що містить 4% CO_2. Тому за час Δt $(\Delta t = t - t_0 > 0)$ в результаті дихання людей виділиться $I = \left(\frac{50 \cdot 18 \cdot 2}{1000}\right) \cdot \frac{4}{100}\Delta t = 0,072\Delta t м^3$ вуглекислоти.

Вентилятори подають 40 м^3/хв свіжого повітря, що містить 0,04% CO_2, тому

$$II = \frac{40 \cdot 0,04}{100}\Delta t = 0,016\Delta t м^3.$$

Виводиться вентиляторами $III = \frac{40x(t)}{400}\Delta t = 0{,}1x(t)\Delta t м^3$.

Отже, оскільки $x(t) = x(t_0) + I + II - III$, отримаємо:

$$x(t) = x(t_0) + 0{,}072\Delta t + 0{,}016\Delta t - 0{,}1x(t)\Delta t,$$

$$x(t) - x(t_0) = 0{,}088\Delta t - 0{,}1x(t)\Delta t,$$

$\Delta x(t) = 0{,}088\Delta t - 0{,}1x(t)\Delta t$ – це різніцеве рівняння.

Перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, отримаємо $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0{,}088 - 0{,}1x(t)$. Скориставшись означенням похідної функції в точці, отримаємо диференціальне рівняння $x'(t) = 0{,}088 - 0{,}1x(t)$ і перепишемо його у вигляді $x'(t) + 0{,}1x(t) = 0{,}088$ (Встановіть тип рівняння та розв'яжіть його самостійно).

Загальним розв'язком рівняння буде функція $x(t) = 0{,}88 + Ce^{-0{,}1t}$. Вона показує вміст CO_2 у $м^3$ в аудиторії в момент часу t. Для знаходження невідомої константи сформулюємо початкову умову задачі. Будемо вважати, що на початку занять повітря було свіже, тому початкова (при $t = 0$) місткість вуглекислоти в аудиторії складає 0,04%, тобто $x(0) = \frac{400 \cdot 0.04}{100} = 0{,}16 м^3$. Розв'яжемо відповідну задачу Коші. Підставимо в розв'язок $x(t) = 0{,}88 + Ce^{-0{,}1t}$ відповідні значення та знайдемо константу *C*:

$$0{,}16 = 0{,}88 + C,\ C = -0{,}72.$$

Розв'язок задачі Коші має вигляд: $x(t) = 0{,}88 - 0{,}72e^{-0{,}1t}$. Отримана функція дозволяє характеризувати стан системи в будь-який момент часу *t*. Так через 30 хвилин перебування людей в аудиторії $(t = 30 хв)$, $x(30) \approx 0{,}844 м^3$, що становить $\approx 0{,}21\%$ від загального об'єму аудиторії.

Відповідь: $\approx 0{,}21\%$.

Зауваження 1. У цьому випадку основною метою було опанування процесом складання диференціального рівняння. Розглянута задача є задачею на матеріальний баланс у системі з припливом та витоком. Краще в якості невідомої функції було розглядати $c(t)$ концентрацію CO_2 у повітрі аудиторії в момент t (зробіть самостійно за аналогією). У подальшому, при розв'язанні задач такого типу, можна використовувати готову схему для запису диференціального рівняння, що описує швидкість змінення CO_2 у приміщенні:

$$\frac{d\left(Vc\right)}{dt} = (\text{приплив } CO_2) - (\text{виток } CO_2).$$

Зауваження 2. При розв'язанні практичних задач важливим етапом є аналіз отриманого результату. Рівноважна концентрація визначає стан, коли динамічна система перестає змінюватись у часі. Для знаходження рівноважної концентрації застосуємо умову $\frac{dc}{dt} = 0$. У даній задачі рівноважна концентрація становить 0,22%, тобто система майже досягла стаціонарного стану.

Зауваження 3. Норми вмісту вуглекислого газу в приміщеннях залежать від призначення приміщень і регулюються державними будівельними нормами. У приміщеннях з великою кількістю людей рекомендується строго слідкувати за рівнем CO_2 та забезпечувати достатню вентиляцію. Чи відповідає нормам ситуація в даній аудиторії?

Диференціальні рівняння часто використовуються і в геометричних задачах при знаходженні траєкторії руху точки.

Задача 2. У точці з ординатою 2 крива нахилена до осі *Oy* під кутом 45°. Дотична відтинає на осі абсцис відрізок, що дорівнює квадрату ординати точки дотику. Знайти рівняння кривої.

Розв'язання. В таких задачах диференціальне рівняння можна отримати без розглядання приростів, використовуючи геометричний зміст похідної. Нехай пряма ***l*** – дотична, проведена до кривої $y = y\left(x\right)$ в точці *A*, $A\left(x, y\right)$ –- точка дотику до шуканої кривої. Якщо $\left(X, Y\right)$ –- довільна точка дотичної, то рівняння прямої ***l*** має вигляд:

$$Y - y = k\left(X - x\right),$$

де $k = tg\alpha = \frac{dy}{dx} = y'\left(x\right)$.

Пригадаємо, що геометричний зміст похідної – тангенс кута нахилу (кутовий коефіцієнт k) дотичної, проведеної до графіка функції в даній точці.

Тоді $Y-y=y'(x)(X-x)$ – рівняння дотичної ***l***.

Характеристична властивість даної кривої полягає в тому, що дотична відтинає на осі абсцис відрізок, який дорівнює квадрату ординати точки дотику. Якщо точка $B(X_B,Y_B)$ – точка перетину прямої *l* з віссю абсцис, то $Y_B=0$, $X_B=y^2$, тобто точка має координати $B\left(y^2,0\right)$.

Оскільки точка В належить дотичній ***l***, то її координати задовольняють рівняння. Після підстановки координат точки *B* у рівняння дотичної отримаємо правильну рівність $0-y=y'(x)\left(y^2-x\right)$, звідки $y'=\dfrac{y}{x-y^2}$ або $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x-y^2}$- диференціальне рівняння першого порядку, що описує траекторію руху точки із заданими характеристиками.

Для встановлення типу рівняння перетворимо рівність: $x-y^2=y\dfrac{dx}{dy}$, $y\dfrac{dx}{dy}-x=-y^2$, $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=-y$ – лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно *x*. Тут *x* – функція від *y*. Нагадаємо, що змінні в диференціальному рівнянні рівнозначні. Розв'яжемо рівняння методом варіації довільної сталої. Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння $x_{з.н}=x_{з.о}+x_{ч.н}$.

Розв'яжемо однорідне рівняння $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=0$. Спочатку відокремимо змінні та проінтегруємо: $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y}x$, $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$, $\ln|x|=\ln|y|+\ln|C|$, $x_{з.о}=Cy$. Для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння будемо розглядати константу С як функцію від *y*, тобто $C=C(y)$, тоді розв'язок неоднорідного рівняння: $x=y\cdot C(y)$,

$\frac{dx}{dy} = y' \cdot C + y \cdot C' = C + y \cdot C'$. Оскільки розв'язок має задовольняти рівняння, то після підстановки отримаємо: $C + y \cdot C' - \frac{1}{y} Cy = -y$, $C' = -1$, $C = -y$, $x_{ч.н} = Cy = -y^2$. $x = Cy - y^2$ – загальний розвязок рівняння.

Для знаходження константи С застосуємо додаткову умову: в точці з ординатою 2 крива нахилена до осі Oy під кутом 45°. Отже $\frac{dy}{dx} = tg 45^\circ = 1$, $\frac{dx}{dy} = 1$. З іншого боку $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=2} = \left.(C - 2y)\right|_{y=2} = C - 4$, $C - 4 = 1$, $C = 5$.

Остаточно, рівняння шуканої кривої $x + y^2 - 5y = 0$, графік цього рівняння – парабола. Конфігурацію до задачі подано на рис.3.

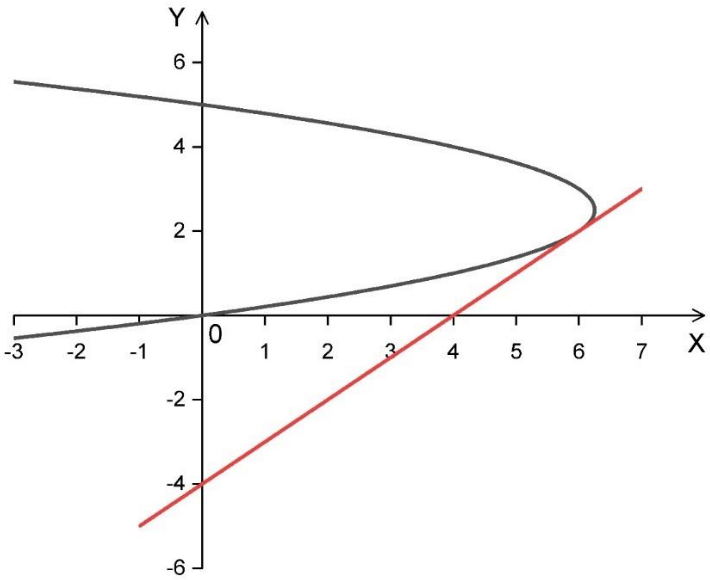

Рис. 3

2.3 Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду $y' + p(x)y = q(x)y^n$ $n \neq 0, n \neq 1$. При $n = 0$ рівняння лінійне, а при

$n=1$ з відокремлюваними змінними. Припускаючи, що $y \neq 0$, помножимо ліву та праву частини рівняння на y^{-n}: $y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$ і заміною $z = y^{1-n}$ зводимо його до лінійного.

Зауважимо, що $y \equiv 0$ (тривіальний розв'язок) завжди буде розв'язком рівняння Бернуллі. Також рівняння можна безпосередньо розв'язувати методом Бернуллі.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $2xy' + y = \dfrac{3x^2}{y}$.

Розв'язання. Встановимо тип рівняння. Якщо переписати рівняння у вигляді $y' + \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{3}{2}xy^{-1}$ та порівняти з еталоном $y' + p(x)y = q(x)y^n$, то класифікуємо початкове рівняння як рівняння Бернуллі при $p(x) = \dfrac{1}{2x}$, $q(x) = \dfrac{3}{2}x$, $n = -1$. Для зручності перепишемо рівняння у вигляді $2yy' + \dfrac{1}{x}y^2 = 3x$ та зробимо заміну $z = y^2$, $z' = 2y \cdot y'$. В результаті отримаємо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку $z' + \dfrac{1}{x}z = 3x$, розв'язком якого буде функція $z = \dfrac{1}{x}\left(x^3 + C\right)$. Врахувавши, що $z = y^2$, отримаємо розв'язок початкового рівняння у неявному вигляді $xy^2 = x^3 + C$.

Відповідь: $xy^2 = x^3 + C$.

2.4 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією виміру ***k***, якщо в результаті заміни змінних ***x*** і ***y*** відповідно на ***tx*** і ***ty***, де ***t*** – довільна величина (параметр), виконується умова $f(tx,ty) \equiv t^k f(x,y)$, $t \neq 0$. Наприклад, функція

$f(x,y)=4xy^2+5y^3-6x^2y$ є однорідною виміру три. Дійсно, $f(tx,ty)=4(tx)(ty)^2+5(ty)^3-6(tx)^2(ty)=t^3 f(x,y)$.

Функція $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ – однорідна функція виміру нуль. Виконаємо підстановку $x\to tx$, $y\to ty$, $t\neq 0$:

$$f(tx,ty)=\frac{tx+ty}{tx-ty}=\frac{t(x+y)}{t(x-y)}=t^0\cdot\frac{x+y}{x-y}=t^0 f(x,y)=f(x,y).$$

Означення. Рівняння виду $y'=f(x,y)$ називається однорідним відносно ***x*** і ***y***, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $u=\dfrac{y}{x}$, або $y=ux$, де $u=u(x)$ – функція від *x*.

Дійсно, якщо $f(x,y)$ – однорідна функція нульового виміру, то поклавши $t=\dfrac{1}{x}$, отримаємо:

$$f(x,y)=f(tx,ty)=f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}y\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Приклад 5. Розв'язати диференціальне рівняння $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Розв'язання. Перед усім переконаємось, що рівняння є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Для цього підставимо в рівняння заміст $x\to tx, y\to ty, t\neq 0$:

$$y'=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{(tx)(ty)}=\frac{t^2\left(x^2+y^2\right)}{t^2xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

Отже права частина рівняння є функцією нульового виміру і рівняння є однорідним за означенням.

Зробимо підстановку $u=\dfrac{y}{x}$. Звідки одержуємо: $y=ux$, $y'=u'x+ux'=u'x+u$.

$u'x+u=\dfrac{x^2+u^2x^2}{x\cdot ux}$, $\quad u'x+u=\dfrac{x^2\left(1+u^2\right)}{x^2\cdot u}$, $\quad u'x+u=\dfrac{1+u^2}{u}$,

$u'x+u=\dfrac{1}{u}+u$, $u'x=\dfrac{1}{u}$, $\dfrac{du}{dx}\cdot x=\dfrac{1}{u}$.

Відокремимо змінні $udu=\dfrac{dx}{x}$ та проінтегруємо:

$\dfrac{1}{2}u^2=\ln x+\ln C$, $\quad u^2=2\ln\left(Cx\right)$, $\quad u^2=\ln\left(Cx\right)^2$, $\quad e^{u^2}=\left(Cx\right)^2$.

Враховуючи, що $u=\dfrac{y}{x}$ отримаємо загальний розв'язок рівняння, який можна записати у вигляді $e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\left(Cx\right)^2$.

Відповідь: $e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\left(Cx\right)^2$.

Можна запропонувати ще одне рівносильне означення однорідного диференціального рівняння.

Означення. Диференціальне рівняння виду $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$ називається однорідним, якщо $M\left(x,y\right)$ та $N\left(x,y\right)$ є однорідними функціями одного й того ж виміру.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y^2dx+\left(x^2-xy\right)dy=0$.

Розв'язання. Покажемо, що дане рівняння є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Підставимо в рівняння замість $x\to tx$, $y\to ty$, $t\neq 0$: $\left(ty\right)^2dx+\left(\left(tx\right)^2-tx\cdot ty\right)dy=0$,

$$t^2y^2dx+t^2\left(x^2-xy\right)dy=0.$$

В даному випадку $M\left(tx,ty\right)\equiv t^2M\left(x,y\right)$, $\quad N\left(tx,ty\right)=t^2N\left(x,y\right)$ $t\neq 0$, отже $M\left(x,y\right)$ і $N\left(x,y\right)$ – однорідні функції виміру два, тобто початкове рівняння є однорідним. Після перетворень можна отримати початкове рівняння:

$$t^2\left(y^2dx+\left(x^2-xy\right)dy\right)=0,\; y^2dx+\left(x^2-xy\right)dy=0.$$

Однорідне диференціальне рівняння підстановкою $y=ux$, де $u=u\left(x\right)$ – деяка функція, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Враховуючи, що $dy=udx+xdu$, після підстановки в початкове рівняння отримаємо:

$$\left(ux\right)^2dx+\left(x^2-ux^2\right)\left(udx+xdu\right)=0.$$

Після розкриття дужок та перегрупування $\left(u^2x^2+x^2u-u^2x^2\right)dx+x^3\left(1-u\right)du=0$, $x^2udx+x^3\left(1-u\right)du=0$, $udx+x\left(1-u\right)du=0,$ маємо рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{1}{x}dx=\frac{u-1}{u}du$. Після інтегрування якого отримуємо $\ln\left|x\right|=u-\ln\left|u\right|+\ln\left|C\right|$, $\ln\left|ux\right|=u+\ln\left|C\right|$, $\ln\left|ux\right|=\ln e^u+\ln\left|C\right|$, $ux=Ce^u$. Враховуючи, що $u=\frac{y}{x}$, отримуємо загальний розв'язок рівняння $y=Ce^{\frac{y}{x}}$. При цьому $x=0$ - особливий розв'язок.

Відповідь: $y=Ce^{\frac{y}{x}}$, $x=0$.

Підстановку $y=ux$ для зведення однорідних диференціальних рівнянь до рівнянь з відокремлюваними змінними вперше застосував Й. Бернуллі (1694 р.), але вважається, що винайшов її Ж.Л. Лейбніц (1691 р.).

2.5 Звичайні диференціальні рівняння в повних диференціалах

Диференціальне рівняння виду $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$ називається диференціальним рівнянням у повних диференціалах, якщо

$M(x,y)dx + N(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції двох змінних $u(x,y)$.

Пригадаємо як виглядає повний диференціал функції двох змінних

$$u(x,y)\textbf{:}\ du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Виникає питання: чи існує така функція $u(x,y)$, для якої

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

Скористаємось наступним твердженням: якщо функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ визначені та неперервні в деякій однозв'язній області ***D*** та мають в ній неперервні частинні похідні відповідно за *y* та *x*, то для того, щоб рівняння було рівнянням у повних диференціалах необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ (в околі точки функція $u = u(x,y)$ має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ та $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, то вони рівні між собою) Отже, якщо функція $u = u(x,y)$ існує та двічі неперервно диференційована, то має виконуватись умова за якою рівняння буде рівнянням у повних диференціалах. Розв'язком рівняння $du = 0$ буде $u(x;y) = C$

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$\left(y^2 + 3x^2y^4 + 2x\right)dx + \left(2xy + 4x^3y^3 - 3y^2\right)dy = 0.$$

Розв'язання. Покажемо, що рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Використаємо наступні позначення:

$$M(x;y) = y^2 + 3x^2y^4 + 2x,\ N(x;y) = 2xy + 4x^3y^3 - 3y^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y+12x^2y^3,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2y+12x^2y^3.$$

Оскільки $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, то дане рівняння буде рівнянням у повних диференціалах. Тоді існує функція $u(x,y)$ така, що $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2+3x^2y^4+2x$. Розв'язуючи дане рівняння маємо

$$u(x;y)=\int\left(y^2+3x^2y^4+2x\right)dx=y^2x+x^3y^4+x^2+\varphi(y).$$

Функція $\varphi(y)$ виступає в ролі константи інтегрування (оскільки інтегрування відбувається за змінною x). Для знаходження функції $\varphi(y)$ спочатку візьмемо похідну від $u(x;y)$ за y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2yx+4x^3y^3+\varphi'(y).$$

Враховуючи, що $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x;y)=2xy+4x^3y^3-3y^2$, отримуємо вираз для $\varphi'(y)=-3y^2$. Звідки легко визначити, що $\varphi(y)=-y^3$. Підставимо виразу для функції $\varphi(y)$ у рівняння для $u(x;y)$ і отримаємо:

$$u(x;y)=y^2x+x^3y^4+x^2-y^3.$$

Це і буде шукана функція $u(x;y)$.

Відповідь. $y^2x+x^3y^4+x^2-y^3=C$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. Встановіть відповідність між рівняннями та їх типами

1. $xy - 3y = 2x$	**A.** З відокремлюваними змінними
2. $y'x + 2y = x^3y^3$	**B.** Лінійне рівняння
3. $xdy - (y + x)dx = 0$	**C.** Рівняння Бернуллі
4. $y' + y = x$	**D.** Однорідне рівняння
5. $y' = \dfrac{y\ln y}{x^3}$	**E.** Рівняння у повних диференціалах
6. $(\ln x + y)dx + (\ln y + x)dy = 0$	**F.** Рівняння не є диференціальним

Завдання 2. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними.

1. $y' = x^2$
2. $y \cdot y' + x^3 = 0$
3. $(2x+3)dy + (3x-5)dx = 0$
4. $y' = 3^{x-2y}$
5. $y\ln y + xy' = 0$
6. $2x\sqrt{1-y^2} - \left(4+x^2\right)y' = 0$
7. $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0$
8. $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$
9. $y\sin x dx + \cos^2 x \cdot \ln y dy = 0$

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними

1. $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, y(0) = 1$
2. $y' = 5xy^2, y(0) = 1$

3. $y' = 5x\sqrt[3]{y}, y(0) = 1$

4. $ytgx \cdot dx + \left(2y^2 + 1\right)\cos^2 x \cdot dy = 0, y(0) = 1$

Завдання 4. Встановіть тип диференціальних рівнянь першого порядку та розв'яжіть їх

1. $y' = \sin^2 x$	11. $xdy - (y + x)dx = 0$
2. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $y' + 2y = e^x$
3. $y' = x\cos 2x$	13. $y' + y = x$
4. $y' = (3y - 1)\sin 2x$	14. $2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0$
5. $y' = 2y + 1$	15. $y'x + 2y = x^3$
6. $y' = \dfrac{y\ln y}{x^3}$	16. $xy' = 2x + 3y$
7. $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$	17. $2yx' + x = 2y^3$
8. $\left(y - x^2y\right)dy = \left(x - xy^2\right)dx$	18. $y' - 2xy = 2x^3y^2$
9. $y' = \dfrac{x + 2y}{x}$	19. $y' - y = xy^2$
10. $y' = e^{\frac{y}{x}} - 1$	20. $ydx - \left(x + y^2 \sin y\right)dy = 0$
21. $\left(\sin^2 x + 2xy^2\right)dx + \left(2x^2y - \cos^2 y\right)dy = 0$	

Завдання 5. Розв'язати задачі 1-5.

Задача 1. (модель поширення забруднюючих речовин у навколишньому середовищі)

Промислове підприємство скидає забруднюючу речовину у річку зі швидкістю $Q = 5$мг/хв. При цьому відбувається природнє розкладання забруднювача відповідно до рівняння $\dfrac{dC}{dt} = -kC + Q$, де $C(t)$ –

концентрація забруднювача у воді, $k = 0,02$ хв$^{-1}$ – коефіцієнт розкладу. Знайти концентрацію $C(t)$, якщо початкова концентрація $C(0) = 0$.

Відповідь. $C(t) = 250\left(1 - e^{-0,02t}\right)$.

Задача 2.

Дефіцит кисню $D(t)$ визначається різницею $D(t) = C_0 - C(t)$, де C_0 – рівноважна концентрація кисню у воді за відсутністю відходів, $C(t)$ – фактична концентрація кисню у воді у момент часу t. Величина дефіциту кисню зростає за часом за рахунок витрат кисню на окислювання відходів і зменшується за рахунок поглинання кисню поверхнею води. Динаміка дефіциту кисню описується рівнянням $\frac{dD(t)}{dt} = k_1 L - k_2 D$, де k_1 – коефіцієнт споживання кисню (1/день), k_2 - коефіцієнт реаеразії (1/день), $L(t)$ – концентрація відходів у даний момент часу (див. задачу 6 теми 1), $L(0) = L_0$ Дефіцит кисню у початковий момент часу $D(0) = D_0$. Визначити дефіцит кисню у воді в момент часу t.

Відповідь. $D(t) = \frac{k_1 L_0}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) + D_0 e^{-k_2 t}$.

Задача 3. У кімнаті, об’єм якої 200м^3, міститься 0,15% вуглекислоти. За 1хв у кімнату вентилятор подає 20м^3 повітря, що містить 0,04% CO_2. За який час місткість вуглекислоти у кімнаті зменшиться втричі?

Відповідь. 24 хв.

Задача 4. У корівнику встановлено два вентилятори, кожний з яких подає за хвилину 50м^3 чистого повітря, що містить 0,01% вуглекислоти. Визначити місткість вуглекислоти в 1м^3 повітря після двогодинного перебування тварин у приміщенні, якщо у корівнику об’ємом 1000м^3 із початковою місткістю вуглекислоти 0,2% перебуває 100 корів, кожна з яких видихає за хвилину 0,1м^3 повітря з 5% вуглекислоти.

Відповідь. $\approx 2,6$ рази.

Задача 5. (про вентиляцію цеху)

У приміщенні цеху об’ємом 10800м^3 повітря містить 0,12% вуглекислого газу. Вентилятори доставляють свіже повітря, що містить 0,04% вуглецю, в кількості a м^3 за хвилину. Розрахуйте потужність вентилятора, якщо після 10 хвилин роботи вміст вуглецю не перевищував 0,06%.

Відповідь. ≈ 1500 м^3/хв.

Контрольні запитання

1. В якому випадку диференціальні рівняння першого порядку будуть рівняннями з відокремлюваними змінними? В чому полягає ідея розв'язання таких рівнянь?
2. Які рівняння називаються лінійними диференціальними рівняннями першого порядку?
3. Які рівняння називаються лінійними однорідними диференціальними рівняннями першого порядку, а які неоднорідними?
4. Якими методами розв'язуються лінійні рівняння першого порядку? В чому полягає суть кожного з методів?
5. Яке рівняння називається рівнянням Бернуллі? В чому полягає ідея розв'язання рівнянь цього типу?
6. Дати означення та описати метод розв'язання однорідного диференціального рівняння першого порядку.
7. Дати означення та описати метод розв'язання диференціального рівняння в повних диференціалах.
8. Які ще види диференціальних рівнянь першого порядку відомі?

Тема 3

Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

3.1 Загальні теоретичні відомості

Диференціальні рівняння порядку вище першого називають диференціальними рівняннями вищих порядків. Звичайне диференціальне рівняння n-го порядку обов'язково містить похідну n – го порядку від шуканої функції $y^{(n)}$, може містити похідні нижчих порядків, саму функцію та незалежну змінну, отже має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (3.1)$$

Тут F – неперервна функція всіх своїх аргументів, x – незалежна дійсна змінна, $y = y(x)$ – невідома функція.

У деяких випадках рівняння можна записати у вигляді, розв'язаним відносно вищої похідної, тобто

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \qquad (3.2)$$

Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння, називається порядком рівняння.

Розв'язком рівняння (3.1)-(3.2) на інтервалі $(a;b)$ називається n разів неперервно диференційована функція $y = \varphi(x)$, якщо підстановка цієї функції та її відповідних похідних у рівняння перетворює його на тотожність при $x \in (a;b)$. Знаходження всіх таких функцій є одним із завдань при розв'язання рівняння. Розв'язок рівняння, як правило, отримують в результаті n послідовних інтегрувань, тому він містить n довільних сталих і має вигляд $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, або в неявному вигляді $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$.

Для диференціальних рівнянь вищих порядків також розглядається задача Коші, або задача з початковими умовами. Задачею Коші для диференціального рівняння (3.2) називається задача знаходження такого розв'язку $y = \varphi(x)$, що задовольняє заданій системі початкових умов:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \qquad (3.3)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння n – го порядку називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, яка задовольняє умовам:

- при будь-яких допустимих значеннях параметрів $C_1, C_2, ..., C_n$ вона є розв'язком рівняння;
- для будь-якої задачі Коші з початковими умовами (3.3) знайдуться сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ такі, що функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ задовольняє цим умовам.

Якщо загальний розв'язок записано неявною функцією $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, то його називають загальним інтегралом диференціального рівняння.

Частинний розв'язок або частинний інтеграл отримують із загального при заданих числових значеннях констант $C_1, C_2, ..., C_n$. Знаходження частинних розв'язків, що задовольняють заданим початковим умовам також є важливою задачею теорії звичайних диференціальних рівнянь і називається задачею Коші.

Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші.
Якщо диференціальне рівняння $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ таке, що функція $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ в деякій області G змінення своїх аргументів неперервна та має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \ldots,$ $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для будь-якої точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in G$ існує і до того ж єдиний розв'язок цього диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам (3.3).

Зауважимо, що аналітичне розв'язання диференціальних рівнянь можливо в дуже рідких випадках. Одним із способів розв'язання рівнянь вищого порядку є зниження порядку. Зниження порядку диференціального рівняння є хорошою можливістю для його розв'язання, і, навіть, якщо не вдасться розв'язати його до кінця, то допоможе провести подальше наближене чи чисельне розв'язання. Знизити порядок рівняння можна не завжди. Далі розглянемо деякі випадки, коли зниження порядку можливе та відповідні прийоми зниження порядку диференціальних рівнянь.

3.2 Рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку

I. Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ є найпростішим видом диференціального рівняння n-го порядку, що допускає пониження порядку. Його загальний розв'язок знаходиться шляхом n –кратного інтегрування.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння третього порядку $y''' = e^{5x} - \cos x + x$.

Розв'язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням третього порядку, розв'язаним відносно вищої похідної. Після першого інтегрування отримаємо

$$y'' = \int\left(e^{5x} - \cos x + x\right)dx = \frac{1}{5}e^{5x} - \sin x + \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Інтегруємо далі

$$y' = \int\left(\frac{1}{5}e^{5x} - \sin x + \frac{x^2}{2} + C_1\right)dx = \frac{1}{25}e^{5x} + \cos x + \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Остаточно отримуємо:

$$y = \int\left(\frac{1}{25}e^{5x} + \cos x + \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{125}e^{5x} + \sin x + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Зауважимо, що розв'язок рівняння третього порядку містить три вільні константи.

Відповідь: $y = \frac{1}{125}e^{5x} + \sin x + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$.

Задача 1. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 24t^2 + 6t$. Знайти закон руху тіла, якщо в початковий момент руху шлях та швидкість дорівнювали нулю.

Зауваження. Диференціальні рівняння описують явища, процеси, які характеризуються залежністю між величинами та швидкістю змінення цих величин. Враховуючи, що механічний зміст похідної – миттєва швидкість, у деяких задачах диференціальне рівняння можна отримати без розглядання приростів, використовуючи фізичні закони. Наприклад, якщо $s(t)$ – закон руху, то швидкість $v = \frac{ds}{dt}$, хоча прирости фактично враховано, оскільки $v = \frac{ds}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Прискорення в будь-який момент часу виражається залежністю $w = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$.

Розв’язання. Закон руху тіла описується диференціальним рівнянням другого порядку $s''(t) = 24t^2 + 6t$, звідки $s(t) = 2t^4 + t^3 + C_1 t + C_2$. Для знаходження констант використаємо задані початкові умови $s(0) = 0$, $s'(0) = 0$, тобто розв’яжемо задачу Коші. Отримаємо, що $s(0) = C_2 = 0$, $s'(0) = C_1 = 0$.

Відповідь: $s(t) = 2t^4 + t^3$ – закон руху тіла.

II. Другий тип рівнянь, що допускають пониження порядку: рівняння не містить шуканої функції, тобто має вигляд $F\left(x, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$. Поклавши $y' = z(x)$ можна понизити порядок рівняння. Аналогічно, якщо рівняння окрім шуканої функції не містить її похідних $y', y'', ..., y^{(k-1)}$, тобто має вигляд $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n-k)}\right) = 0$, то понизити порядок рівняння можна заміною $y^{(k)} = z(x)$.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $y''' tgx = 2y''$.

Розв’язання. Дане рівняння є рівнянням третього порядку, що не містить функцію y та її першу похідну, тому заміною $y'' = z(x)$ понижуємо порядок рівняння. Враховуючи, що $y''' = z'(x)$, маємо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними $z' tgx = 2z$.

$$\frac{dz}{z} = \frac{2}{tgx} dx; \ \ln|z| = 2\ln|\sin x| + \ln|C_1|; \ \ln|z| = \ln\left(|C_1| \sin^2 x\right).$$

Розв’язком даного рівняння є функція $z = C_1 \sin^2 x$. Повертаючись до заміни, отримуємо диференціальне рівняння другого порядку:

$y'' = C_1 \sin^2 x$,

$y' = C_1 \int \sin^2 x dx = C_1 \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = C_1 \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C_2$,

$y = \frac{1}{4} C_1 \left(x^2 + \cos 2x \right) + C_2 x + C_3$.

Відповідь: $y = \frac{1}{4} C_1 \left(x^2 + \cos 2x \right) + C_2 x + C_3$.

Задача 2. Якщо тіло повільно занурюється у воду, то його швидкість ***v*** та прискорення ***w*** приблизно пов'язані рівнянням $w = g - kv$, де *g, k* – константи. Виразити відстань, яку пройдено тілом як функцію часу, якщо в момент $t = 0$ тіло знаходилось у стані покою.

Розв'язання. Нехай $S(t)$ – закон руху тіла, тоді $S'(t) = v$ – його швидкість, $S''(t) = w$ – прискорення. Оскільки даний процес описується законом $w = g - kv$, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку: $S''(t) = g - kS'(t)$, яке перепишемо у вигляді $S''(t) + kS'(t) = g$. Таке рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку, що допускає пониження порядку заміною $S'(t) = v$, оскільки не містить $S(t)$. В результаті маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку $v'(t) + kv(t) = g$, яке розв'яжемо методом Бернуллі. Нехай $v(t) = p \cdot q$, де $p = p(t)$, $q = q(t)$ – невідомі функції. Оскільки $v'(t) = p' \cdot q + p \cdot q'$, то рівняння запишеться у вигляді $p' \cdot q + p \cdot q' + kp \cdot q = g$, або $(p' + kp) \cdot q + p \cdot q' = g$. Отримуємо систему:

$$\begin{cases} p' + kp = 0, \\ p \cdot q' = g \end{cases}$$

Функцію $p(t)$ знайдемо з першого рівняння системи:

$$p' = -kp, \ \frac{dp}{dt} = -kp, \ \frac{dp}{p} = -kdt, \ \ln|p| = -kp, \ p = e^{-kt}.$$

Підставляємо у друге рівняння системи $p = e^{-kt}$ і розв'язуємо його:

$$e^{-kt} \cdot q' = g, \; q' = g \cdot e^{kt}, \; q = \frac{g}{k} \cdot e^{kt} + C_1.$$

Остаточно отримуємо $v(t) = p \cdot q = e^{-kt}\left(\frac{g}{k} \cdot e^{kt} + C_1\right) = \frac{g}{k} + C_1 e^{-kt}$, тоді:

$$S(t) = \frac{g}{k} t - \frac{C_1}{k} e^{-kt} + C_2.$$

Для знаходження констант C_1 і C_2 застосуємо початкові умови (в початковий момент часу $t_0 = 0$ тіло знаходилось у стані покою), тобто дорівнюють нулю як початкова відстань $S(0) = 0$, так і початкова швидкість $S'(0) = v(0) = 0$.

$$v(0) = \frac{g}{k} + C_1 e^{0t} = \frac{g}{k} + C_1 = 0, \; C_1 = -\frac{g}{k},$$

$$S(0) = \frac{g}{k} \cdot 0 - \frac{C_1}{k} e^{-0t} + C_2 = -\frac{C_1}{k} + C_2 = 0,$$

$$\frac{g}{k^2} + C_2 = 0, \; C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

Підставляючи знайдені константи у $S(t) = \frac{g}{k} t - \frac{C_1}{k} e^{-kt} + C_2$, отримаємо вираз для $S(t) = \frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right)$.

Відповідь: $S(t) = \frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right)$

ІІІ. Якщо рівняння диференціальне рівняння не містить явно *x*, тобто має вигляд $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, то підстановкою $y' = p(y)$ можна знизити порядок рівняння на одиницю. Тут ***y*** будемо вважати за незалежну змінну.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $1 + (y')^2 = 2y \cdot y''$, при умові, що $y(1) = 1, \; y'(1) = 1$.

Розв'язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку, яке не містить незалежної змінної *x*, тому заміною $y' = p(y)$ можна понизити порядок рівняння.

Продиференцюємо ліву та праву частини рівності $y' = p(y)$, пам'ятаючи, що $y = y(x)$ – *y* функція від *x*.

Знайдемо $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p$ і підставимо відповідні вирази в рівняння: $1 + p^2 = 2y \cdot p' \cdot p$.

Таке рівняння є диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні $\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$ та проінтегруємо: $\ln\left(1+p^2\right) = \ln|y| + \ln|C_1|$, $\ln\left(1+p^2\right) = \ln|C_1 y|$, $1 + p^2 = C_1 y$, $p^2 = C_1 y - 1$, $p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$, $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Часто для зручності константу знаходять у процесі розв'язання, використовуючи початкові умови. Враховуючи, що $y'(1) = 1$, отримаємо рівність для знаходження C_1: $1 = \sqrt{C_1 \cdot 1 - 1}$, $C_1 = 2$. Рівняння $y' = \sqrt{2y-1}$ також є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними $\frac{dy}{\sqrt{2y-1}} = dx$, $\sqrt{2y-1} = x + C_2$, $2y - 1 = \left(x + C_2\right)^2$. Оскільки, $y(1) = 1$, то $C_2 = 0$. Остаточно $2y - 1 = x^2$, $y = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)$ – частинний розв'язок, що задовольняє заданим початковим умовам.

Відповідь: $y = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)$.

IV. Якщо ліва частина рівняння є точною похідною деякої функції, то також можна понизити порядок рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y'' - xy' - y = 0$.

Розв'язання. Можна побачити, що ліва частина рівняння є точною похідною від функції $y' - xy$, тобто $\left(y' - xy\right)' = y'' - xy' - y$.

Перепишемо рівняння у вигляді $\left(y' - xy\right)' = 0$, звідки отримуємо $y' - xy = C_1$ - лінійне диференціальне рівняння першого порядку (тема 2). Розв'язком цього рівняння буде $y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C_2\right)$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Знайти загальний розв'язок рівнянь 1-9.

1. $y''' = 2^x + \sin 2x + x$
2. $y''' = e^{3x} + \cos x - 2x$
3. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$
4. $x^2 y'' + xy' = 1$
5. $tgx \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$
6. $xy''' + y'' = 1$
7. $xy''' + y'' = x + 1$
8. $y \cdot y'' = \left(y'\right)^2$
9. $y \cdot y'' - \left(y'\right)^2 - y^2 = 0$. Вказівка. $\left(\dfrac{y \cdot y'' - \left(y'\right)^2}{y^2} = \left(\dfrac{y'}{y}\right)'\right)$

В завданнях 10-12 знайти розв'язки, що задовольняють заданим початковим умовам

10 $y'' = 2\sqrt{y'}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

11. $y'' = xe^x, y(0) = 1, y'(0) = 0$

12. $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1$

Контрольні запитання

1. Що називається диференціальним рівнянням n –го порядку?
2. Як визначити порядок диференціального рівняння?
3. Що називається розв'язком диференціального рівняння n –го порядку?
4. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння n –го порядку?
5. В чому полягає задача Коші для диференціального рівняння n –го порядку?
6. Що називається частинним розв'язком рівняння?
7. Скільки початкових умов потрібно, щоб знайти частинний розв'язок диференціального рівняння n –го порядку?
8. У чому суть методу пониження порядку диференціального рівняння n –го порядку?
9. Які рівняння вищого порядку допускають пониження порядку? Наведіть приклади.

Тема 4

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

4.1 Загальні теоретичні відомості

Серед диференціальних рівнянь вищого порядку найбільш розповсюдженими є лінійні диференціальні рівняння, які можна записати у вигляді:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x),$$

де $p_i(x), q(x)$ – неперервні функції.

Часто такі рівняння записують стисло

$$L[y] = q(x),$$

де $L[y]$ – лінійний диференціальний оператор, який має властивості однорідності $L[Cy] = CL[y]$, $C - const$ та адитивності $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$.

Будемо розглядати тільки самий простий випадок рівнянь такого виду, а саме лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Означення. Рівняння виду

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{4.1}$$

називається лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Числа a_0, a_1, a_2 - коефіцієнти рівняння, $a_0 \neq 0$, вільний член рівняння $f(x)$ – неперервна на деякому інтервалі (a,b) функція, $y(x)$ – шукана функція. Термін «лінійне рівняння» застосовується тому, що невідома функція та її похідні знаходяться у рівнянні лише в першому степені і не перемножені між собою. Рівняння не містить нелінійних функцій типу $\sin y$, $\ln y$ та ін.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається однорідним лінійним рівнянням, якщо $f(x) \neq 0$ неоднорідним.

Лінійні рівняння широко застосовуються при описанні коливальних процесів. Однорідні рівняння описують внутрішні процеси системи, а неоднорідні моделюють реакцію системи на зовнішнє втручання. У неоднорідних рівняннях враховуються зовнішні сили, джерела енергії, імпульси, які діють на систему. В екології, наприклад, лінійні рівняння є моделями росту популяцій із сезонними змінами або під впливом середовища; описують забруднення навколишнього середовища при наявності зовнішніх джерел забруднення.

4.2 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне **однорідне** диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР)

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, a_0 \neq 0 \tag{4.2}$$

та встановимо деякі властивості його розв’язків. Очевидно, що одним з розв’язків буде нульовий (тривіальний) розв’язок $y \equiv 0$.

Для знаходження нетривіальних розв'язків лінійного однорідного рівняння розглянемо наступні твердження.

Теорема 1. Якщо функції $y_1(x), y_2(x)$ – частинні розв'язки однорідного рівняння, то їх лінійна комбінація $y = C_1y_1 + C_2y_2$ також буде розв'язком даного рівняння C_1, C_2 – довільні сталі.

Теорема 2 (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння другого порядку). Якщо функції $y_1(x), y_2(x)$ – два лінійно незалежні на інтервалі (a,b) розв'язки рівняння (4.2), то **загальний розв'язок** лінійного однорідного рівняння має вигляд $y_{з.о} = C_1y_1 + C_2y_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

З лінійною залежністю (незалежністю) векторів знайомились при вивченні лінійної алгебри. Аналогічно можна говорити про лінійну залежність (незалежність) функцій на проміжку.

Означення. Функції $y_1(x), y_2(x)$ називаються лінійно-незалежними на інтервалі (a,b), якщо тотожність $\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) \equiv 0$ справджується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (α_1, α_2 – дійсні числа).

Найпростішим випадком лінійної залежності є пропорційність.

Для перевірки лінійної незалежності функцій застосовують визначник Вронського (вронскіан) $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$. Якщо $W = 0$, то функції будуть лінійно залежними на інтервалі (a,b) і лінійно незалежними при $W \neq 0$ за будь-якого значення $x \in (a,b)$.

4.3 Метод Ейлера знаходження частинних розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь

Для знаходження частинних розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь застосовується метод Ейлера, суть якого полягає в тому, що частинний розв'язок рівняння (4.2) шукають у вигляді

$y=e^{kx}$. Дійсно, можна показати, що функція $y=e^{kx}$ при певних значеннях k буде розв'язком диференціального рівняння $a_0y''+a_1y'+a_2y=0, a_0\neq 0$.
(Пригадайте, як показати, що функція є розв'язком диференціального рівняння).

Продиференціюємо двічі функцію $y=e^{kx}$:

$$y=e^{kx},\ y'=ke^{kx},\ y''=k^2e^{kx}.$$

Підставимо в дане рівняння: $a_0k^2e^{kx}+a_1ke^{kx}+a_2e^{kx}=0$ та винесемо спільний множник e^{kx} за дужки: $e^{kx}\left(a_0k^2+a_1k+a_2\right)=0$. Оскільки $e^{kx}\neq 0$, то $a_0k^2+a_1k+a_2=0$. Таке рівняння називається **характеристичним** рівнянням даного диференціального рівняння.

Отримане рівняння є алгебраїчним (квадратним) рівнянням і, як відомо, завжди має два корені. В залежності від дискримінанта можливі такі випадки:

I. $D>0$, корені характеристичного рівняння k_1, k_2 – дійсні різні числа. Загальний розв'язок рівняння $a_0y''+a_1y'+a_2y=0, a_0\neq 0$ має вигляд $y_{з.о}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$.

II. $D=0$, k_1, k_2 – дійсні рівні числа, $k_1=k_2=k$, $y_{з.о}=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$

III. $D<0$, k_1, k_2 комплексно-спряжені, $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, $y_{з.о}=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$.

Розглянемо кожний з можливих випадків.

Випадок I. $D>0$, k_1, k_2 – дійсні різні числа. Розв'язки диференціального рівняння $a_0y''+a_1y'+a_2y=0, a_0\neq 0$ функції $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$ будуть лінійно незалежними (перевірте самостійно). Загальний розв'язок рівняння у такому випадку матиме вигляд: $y_{з.о}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР). Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 2k - 3 = 0$, $D > 0$, $k_1 = -3$, $k_2 = 1$ - дійсні різні розв'язки характеристичного рівняння. Частинними розв'язками рівняння будуть функції $y_1 = e^{-3x}$ і $y_2 = e^x$. Лінійна комбінація частинних розв'язків буде загальним розв'язком рівняння.

Відповідь. $y_{з.о} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$.

Випадок II. $D = 0$, k_1, k_2 – дійсні рівні числа, $k_1 = k_2 = k$. Покажемо, що лінійно незалежні функції $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ будуть розв'язками диференціального рівняння $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $a_0 \neq 0$ і $y_{з.о} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$.

Нехай є диференціальне рівняння вигляду $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Складемо відповідне характеристичне рівняння $a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$. Якщо дискримінант дорівнює 0: $D = a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$, тоді характеристичне рівняння буде мати два кратних корені $k_1 = k_2 = k = \dfrac{-a_1}{2a_0}$. Звідки отримуємо співвідношення $2ka_0 + a_1 = 0$.

Будемо шукати розв'язки диференціального рівняння у вигляді $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = u(x)e^{kx}$. Вигляд $y_2 = u(x)e^{kx}$ обумовлений тим, що розв'язки повинні бути лінійно незалежними, тобто визначник Вронського не дорівнює 0.

$$W_{[y_1, y_2]} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & u(x)e^{kx} \\ ke^{kx} & u'(x)e^{kx} + ku(x)e^{kx} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Звідки маємо:

$$e^{2kx}\left(u'(x) + ku(x)\right) - ke^{2kx}u(x) \neq 0,$$

$e^{2kx}\left(u'(x)+ku(x)-ku(x)\right)\neq 0$, $e^{2kx}u'(x)\neq 0$. Оскільки $e^{2kx}\neq 0$, то $u'(x)\neq 0$, тобто функція $u(x)$ не є константою.

Далі знайдемо загальний вигляд функції $u(x)$. Нехай другий розв'язок рівняння $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$ є $y_2=u(x)e^{kx}$. Тоді він задовольняє рівнянню, тобто $a_0y_2''+a_1y_2'+a_2y_2=0$. Знайдемо y_2' та y_2'' і підставимо в рівняння.

$$y_2'=\left(u(x)e^{kx}\right)'=u'(x)e^{kx}+ku(x)e^{kx}=\left(u'(x)+ku(x)\right)e^{kx},$$

$$y_2''=u''(x)e^{kx}+ku'(x)e^{kx}+ku'(x)e^{kx}+k^2u(x)e^{kx}=$$

$$=\left(u''(x)+2ku'(x)+k^2u(x)\right)e^{kx}.$$

Після підстановки знайдених виразів у рівняння та перегрупування доданків отримаємо:

$$u(x)e^{kx}\left(a_0k^2+a_1k+a_2\right)+e^{kx}\left(a_0u''+2ka_0u'+a_1u'\right)=0.$$

Перший доданок $u(x)e^{kx}\left(a_0k^2+a_1k+a_2\right)=0$, оскільки

$$a_0k^2+a_1k+a_2=0.$$

В другому доданку враховане значення характеристичного числа через коефіцієнти рівняння

$$2ka_0u'+a_1u'=0,\ u'\left(2ka_0+a_1\right)=0.$$

Звідки знаходимо, що $a_0u''=0$. Тобто $u(x)=Ax+B$. Покладемо $A=1$, $B=0$, тоді $u(x)=x$, отже $y_2=xe^{kx}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y''+4y'+4y=0$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР). Складемо характеристичне рівняння $k^2+4k+4=0$, $D=0$, $k_1=k_2=-2$, – дійсні рівні розв'язки характеристичного рівняння. Частинними розв'язками рівняння будуть функції $y_1=e^{-2x}$ і $y_2=xe^{-2x}$

Відповідь: $y_{з.о}=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}=e^{-2x}\left(C_1+C_2x\right)$.

Випадок III. $D < 0$, k_1, k_2 комплексно-спряжені, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Розв'язками диференціального рівняння будуть функції комплексної змінної $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$. Однак в даній темі розглядаються тільки функції дійсної змінної, тому потрібно підібрати інші лінійно незалежні розв'язки дійсної змінної.

За формулою Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, тому

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right),$$

$$y_1 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right).$$

Будь яка лінійна комбінація розв'язків також є розв'язком. Тобто

$\dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $\dfrac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$ – розв'язки.

В якості лінійно незалежних частинних розв'язків диференціального рівняння $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, a_0 \neq 0$ можна вибрати функції $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Тоді $y_{з.о} = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$- загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР). Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 5 = 0$, $D = 4 - 20 = -16$, $k_{1,2} = -1 \pm 2i$. Частинними розв'язками рівняння будуть функції $y_1 = e^{-x}\cos 2x$ і $y_2 = e^{-x}\sin 2x$.

Відповідь. $y_{з.о} = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$.

Приклад 4. Знайти розв'язки рівняння $y'' - y = 0$, що задовольняють початковим умовам $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. $k^2 - 1 = 0$ – характеристичне рівняння для заданого ЛОДР, $k_{1,2} = \pm 1$ його корені. Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні різні, то загальний розв'язок ЛОДР має вигляд

$$y_{з.о} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}.$$

Для знаходження констант C_1, C_2 застосуємо початкові умови: $y(0) = C_1 + C_2 = 2$, $y'(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$, $y'(0) = -C_1 + C_2 = 0$.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

Звідки отримуємо $C_1 = C_2 = 1$.

Частинний розв'язок рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам має вигляд $y = e^{-x} + e^{x}$.

Відповідь. $y = e^{-x} + e^{x}$.

Для багатьох природніх явищ є характерними коливальні процеси. Так складні добові, місячні та річні біологічні ритми багатьох рослин і тварин є прикладами природніх коливань.

Рівняння $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ є рівнянням простого гармонічного руху і називається рівнянням **гармонічного осцилятора.** Таке рівняння часто зустрічається в задачах біології при складанні математичних моделей, що описують періодичні або коливальні процеси. Дане рівняння буде лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + \omega^2 = 0,$$

де $k^2 = -\omega^2$, $k_{1,2} = \pm i\omega$, $\omega \in R$, $\omega > 0$.

Вираз $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ – це загальний розв'язок рівняння. Якщо задано початкові умови $x(0)$ і $x'(0)$, то можна знайти константи C_1, C_2

Завдання. Встановіть відповідності між лінійним однорідним диференціальним рівнянням та видом його загального розв'язку.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$	$a)\ y = C_1 e^{-x} + C_2$
2. $y'' + y' = 0$	$b)\ y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$
3. $y'' + 2y' + y = 0$	$c)\ y = e^{-2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$
4. $y'' + 9y = 0$	$d)\ y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}$
5. $y'' + 4y' + 5y = 0$	$e)\ y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

4.4 Розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Методи розв'язання розглянемо на прикладі рівняння другого порядку (4.1):

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f\left(x\right),\ a_0 \neq 0,\ f\left(x\right) \neq 0.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння складається зі загального розв'язку однорідного та частинного розв'язку неоднорідного, тобто

$$y_{з.н} = y_{з.о} + y_{ч.н}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна знаходити **двома методами:** методом **невизначених коефіцієнтів**, або методом **варіації довільних сталих**, в залежності від виду правої частини рівняння. Кожен з методів має позитивні риси та недоліки. Розглянемо кожен з методів.

4.4.1 Метод невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтів потребує спеціальної правої частини:

$$f\left(x\right) = e^{ax}\left(P_n\left(x\right)\cos bx + Q_m\left(x\right)\sin bx\right), \qquad (4.3)$$

де a, b – числа, а $P_n\left(x\right), Q_m\left(x\right)$ - многочлени відповідного степеню.

Якщо права частина рівняння (4.1) буде відповідати еталону (4.3) при певних значеннях a і b, а контрольне число $z = a + ib$ **не буде** розв'язком характеристичного рівняння однорідного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) матиме вигляд:

$$y_{ч.н} = e^{ax}\left(P_l\left(x\right)\cos bx + Q_l\left(x\right)\sin bx\right), \tag{4.4}$$

де $P_l\left(x\right)$ і $Q_l\left(x\right)$ – нові многочлени ступеня $l = \max\left\{n; m\right\}$.

Якщо контрольне число $z = \alpha + i\beta$ **буде** коренем характеристичного рівняння, то

$$y_{ч.н} = e^{ax}\left(P_l\left(x\right)\cos bx + Q_l\left(x\right)\sin bx\right)x^r, \tag{4.5}$$

де r – кратність цього кореня.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами і його загальний розв'язок $y_{з.н}$ можна знайти як суму загального розв'язку однорідного $y_{з.о}$ та частинного розв'язку неоднорідного рівнянь $y_{ч.н}$, тобто

$$y_{з.н} = y_{з.о} + y_{ч.н}.$$

1. Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 3k + 2 = 0$, коренями якого є $k_1 = -2$ і $k_2 = -1$, тому $y_{з.о} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$.

2. Встановимо, чи має права частина відповідний вигляд, що дозволяє застосовувати метод невизначених коефіцієнтів. Для цього порівняємо праву частину рівняння з еталоном (4.3):

$$e^{ax}\left(P_n\left(x\right)\cos bx + Q_m\left(x\right)\sin bx\right) = 3e^{2x}.$$

При $a = 2$, $b = 0$, права частина відповідатиме еталону і застосування методу невизначених коефіцієнтів можливе. $P_n\left(x\right) = 3$ – многочлен нульового ступеня (число).

3. Перевіряємо, чи буде контрольне число $\mu = a + ib$ розв'язком характеристичного рівняння. В нашому випадку $\mu = 2$ не є розв'язком характеристичного рівняння $\left(k_1 = -2, k_2 = -1\right)$.

4. Формуємо частинний розв'язок у вигляді (4.4):

$$y_{ч.н}=e^{ax}\left(P_l\left(x\right)\cos bx+Q_l\left(x\right)\sin bx\right).$$

При $a=2,\ b=0\ \left(\cos 0=1,\sin 0=0\right)$ маємо $y_{ч.н}=P_l\left(x\right)e^{2x}$. $P_l\left(x\right)$ – многочлен нульового ступеня, невідоме число (не обов'язково 3). Позначимо його *A*, тоді частинний розв'язок має вигляд $y_{ч.н}=Ae^{2x}$. Зверніть увагу, що частинний розв'язок «схожий» з правою частиною рівняння.

5. Для знаходження невизначеного коефіцієнта *A* врахуємо, що $y_{ч.н}=Ae^{2x}$ – розв'язок рівняння, тобто після підстановки перетворює його на тотожність. Знаходимо $y'_{ч.н}=2Ae^{2x}$ та $y''_{ч.н}=4Ae^{2x}$ і підставляємо у рівняння $y''+3y'+2y=3e^{2x}$.

У підсумку маємо:

$$4Ae^{2x}+3\cdot 2Ae^{2x}+2\cdot Ae^{2x}=3e^{2x},\ \left(4A+6A+2A\right)e^{2x}=3e^{2x},$$

$$12Ae^{2x}=3e^{2x},\ 12A=3,\ A=\frac{1}{4},\ y_{ч.н}=\frac{1}{4}e^{2x}.$$

Відповідь. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{4}e^{2x}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y''+4y'+5y=x^2+3$.

Розв'язання. Встановлюємо тип рівняння: ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, $y_{з.н}=y_{з.о}+y_{ч.н}$.

1. Розв'яжемо однорідне рівняння $y''+4y'+5y=0$. Складаємо розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2+4k+5=0,\ D=16-20=-4<0.$$

$$k=\frac{-4+\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4\pm 2i}{2}=-2\pm i.$$

Оскільки розв'язки характеристичного рівняння є комплексно-спряженими, то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{з.о.}=e^{-2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right).$$

2. Права частина рівняння має спеціальний вигляд $\left(a=0, b=0, P_2(x)=x^2+3\right)$, тому для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння можна застосувати метод невизначених коефіцієнтів.

3. $\mu = a + ib = 0$ – контрольне число **не є** розв'язком характеристичного рівняння.

4. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде многочленом другого ступеня з невизначеними коефіцієнтами, тобто мати вигляд $y_{ч.н} = Ax^2 + Bx + C$.

5. Для знаходження коефіцієнтів скористаємось твердженням, що розв'язок має задовольняти рівняння, тобто при підстановці перетворювати рівняння на тотожність.

$$y'' + 4y' + 5y = x^2 + 3.$$

Можна підставити y, y', y'' безпосередньо в рівняння та згрупувати:

$$2A + 8Ax + 4B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = x^2 + 0x + 3,$$

$$5Ax^2 + (8A + 5B)x + (2A + 4B + 5C) = x^2 + 0x + 3.$$

В лівій та правій частинах рівності записано многочлени другого ступеня, коефіцієнти яких при відповідних степенях мають бути рівними.

При $x^2 : 5A = 1, A = \frac{1}{5}$,

при $x : 8A + 5B = 0, B = \frac{-8}{25}$,

при $x^0 : 2A + 4B + 5C = 3, C = \frac{97}{125}$.

$$y_{ч.н.} = \frac{1}{5}x^2 - \frac{8}{25}x + \frac{97}{125}.$$

Для зручності часто застосовують скорочений запис, за допомогою якого також виписують співвідношення для знаходження невизначених коефіцієнтів A, B, C прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях многочленів:

$$\begin{array}{r|l} 5 & y = Ax^2 + Bx + C \\ 4 & y' = 2Ax + B \\ 1 & y'' = 2A \end{array}$$

Відповідь. $y_{з.н} = e^{-2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + \frac{1}{5}x^2 - \frac{8}{25}x + \frac{97}{125}$.

Приклад 7. Знайдіть вигляд частинного розв’язку рівняння

$$y'' - 6y + 9 = 4\sin 2x.$$

Розв’язання.

1. Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний розв’язок рівняння є сумою загального розв’язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв’язку неоднорідного: $y_{з.н} = y_{з.о} + y_{ч.н}$.

2. Розв’яжемо однорідне рівняння $y'' - 6y + 9 = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$ має кратні розв’язки $k_1 = k_2 = 3$, тому $y_{з.о} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

3. Права частина неоднорідного рівняння має спеціальний вигляд при $a = 0, b = 2$, тому для знаходження частинного розв’язку неоднорідного рівняння можна застосовувати метод невизначених коефіцієнтів. Контрольне число $\mu = a + ib = 2i$ не є розв’язком характеристичного рівняння, тому

$$y_{ч.н} = e^{0x}\left(P_l(x)\cos 2x + Q_l(x)\sin 2x\right),$$

$$y_{ч.н} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Відповідь. $y_{ч.н} = A\cos 2x + B\sin 2x$.

Зауваження. Зверніть увагу, що частинний розв’язок у таких рівняннях містить і синус і косинус, на відміну від правої частити рівняння.

Приклад 8. Для даного диференціального рівняння $y'' + 9y = \cos 3x$ знайти вигляд частинного розв’язку.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2+9=0$ однорідного рівняння $y''+9y=0$. $k_1=-3i$, $k_2=3i$ – розв’язки характеристичного рівняння. Контрольне число $\mu=a+ib=3i$ **є розв’язком** характеристичного рівняння, тому частинний розв’язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{ч.н}=e^{ax}\left(P_k(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx\right)\cdot x,$$

$$y_{ч.н}=\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\cdot x.$$

Відповідь. $y_{ч.н}=\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\cdot x$.

Завдання.

Встановіть відповідності між ЛНДР та видом його частинного розв’язку.

1. $y''-4y=3x$	$a)\, y_{ч.н}=Ax^2+Bx+C$
2. $y''+4y=3x^2$	$b)\, y_{ч.н}=Ax^2e^{2x}$
3. $y''+4y'+4y=e^x$	$c)\, y_{ч.н}=A\cos x+B\sin x$
4. $y''-4y'+4y=e^{2x}$	$d)\, y_{ч.н}=Ax+B$
5. $y''+2y'-3y=\cos x$	$e)\, y_{ч.н}=Ae^x$

Метод варіації довільних сталих

(метод Лагранжа)

Розглянемо метод, який дозволяє знаходити частинний розв’язок лінійного рівняння $y''+ay'+by=f(x)$, де $f(x)$ – довільна функція, яка не має спеціального вигляду (4.3). Як відомо, $y_{з.н}=y_{з.о}+y_{ч.н}$, $y_{з.о}=C_1y_1+C_2y_2$. Оскільки функція $f(x)$ не має спеціального вигляду (4.3), то застосування методу невизначених коефіцієнтів неможливо. У таких випадках застосовують метод варіації довільних сталих. Ідея методу полягає в тому, що довільні сталі C_1, C_2 розглядаються як деякі функції від x.

Будемо шукати частинний розв’язок рівняння у вигляді

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2.(4.5).$$

Функції $C_1(x), C_2(x)$ підлягають визначенню. Потрібно надати дві залежності між ними. Одну можна обрати довільним способом, а другу визначити. Продиференціюємо рівність (4.5):

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'.$$

Покладемо $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$, тоді

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Продиференцюємо ще раз:

$$y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''.$$

Підставимо в початкове рівняння:

$$C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2'' + a\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) +$$
$$+ b\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = f(x)$$

Перегрупуємо наступним чином:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1\left(y_1'' + a y_1' + b y_1\right) + C_2 (y_2'' + a y_2' +$$
$$+ b y_2) = f(x)$$

Вирази в дужках дорівнюють нулю (чому?). Для знаходження функцій $C_1(x), C_2(x)$ маємо систему:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \tag{4.6}$$

Із системи знаходимо $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, а після інтегрування $C_1(x), C_2(x)$. Після підстановки в (4.5) отримаємо частинний розв'язок ЛНДР.

При застосуванні методу варіації довільних сталих можна користуватись наступним алгоритмом:

1. Скласти однорідне рівняння та визначити його загальний розв'язок $y_{з.о} = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

2. Для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння вважати константи C_1, C_2 функціями від *x*, тобто $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$.

3. Для знаходження функцій $C_1'(x), C_2'(x)$ скласти систему (4.6):

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}.$$

і розв'язати її.

4. Знайдені значення $C_1'(x), C_2'(x)$ проінтегрувати, не враховуючи константи інтегрування.

5. Записати $y_{ч.н} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$ і $y_{з.н} = y_{з.о} + y_{ч.н}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Розв'язання.

1. Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, тому його загальний розв'язок є сумою загального розв'язку однорідного та частинного розв'язку неоднорідного рівнянь: $y_{з.н} = y_{з.о} + y_{ч.н}$. Права частина рівняння не має спеціального вигляду (4.3), тому застосування методу невизначених коефіцієнтів неможливо.

2. Розв'яжемо однорідне рівняння $y'' + y = 0$. Коренями характеристичного рівняння $k^2 + 1 = 0$ будуть $k_{1,2} = \pm i$, тому: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_{з.о} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

3. Для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння застосуємо метод варіації довільних сталих:

$$y_{ч.н} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Складемо систему (4.6):

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Розглядатиме систему як алгебраїчну відносно $C_1'(x), C_2'(x)$ і розв'яжемо її будь-яким відомим методом, наприклад методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = ctgx.$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1, \ C_1(x) = -x,$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = ctgx, \ C_2(x) = \int ctgxdx = \ln|\sin x|,$$

$$y_{ч.н} = -x\cos x + \ln|\sin x| \cdot \sin x,$$

$$y_{з.н} = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - x\cos x + \ln|\sin x| \cdot \sin x.$$

Відповідь: $y_{з.н} = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - x\cos x + \ln|\sin x| \cdot \sin x$.

Зауваження. Зверніть увагу, що при інтегруванні не додавали константи, оскільки шукали частинний розв'язок. У іншому випадку одразу б отримали загальний розв'язок. Перевірте самостійно.

Вправи для аудиторної та самостійної роботи

У завданнях 1-8 знайдіть загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь.

1. $y'' + 5y' - 6y = 3$
2. $y'' - 6y' + 9y = 5x$
3. $y'' + 4y' + 5y = x^2 + 1$
4. $y'' + y' - 2y = \cos x$
5. $y'' - y' = e^x$
6. $y'' + 4y' + 8y = \sin 2x$
7. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$
8. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{2x+1}$

У завданнях 9-13 розв'язати задачу Коші для лінійних неоднорідних рівнянь.

9. $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1$

10. $y'' - 4y' + 3y = x^2 - 3x,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$

11. $y'' + 4y = \sin 2x,\ y(0) = 0, y'(0) = 0$

12. $y'' - y = x,\ y(0) = 1, y'(0) = -1$

13. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x},\ y(0) = 0, y'(0) = 0$

У завданнях 14-16 знайдіть наближений розв'язок задачі Коші, обмеживишсь чотирма ненульовими членами розвинення у степеневий ряд.

14. $y'' + 2y \cdot y' - 5x^2 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

15. $y'' + 2y' + y^3 = x^2,\ y(0) = -1, y'(0) = 1$

16. $y'' + y' + y^3 = 2x^3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

Контрольні запитання

1. Які рівняння називаються лінійними однорідними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР)?
2. Сформулюйте властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь другого порядку.
3. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння.
4. Яку системи функцій називають лінійно незалежною на проміжку?
5. Як перевірити лінійну незалежність системи функцій?
6. В чому полягає метод Ейлера для знаходження частинного розв'язку лінійного однорідного рівняння?
7. Яке рівняння називається характеристичним рівнянням для ЛОДР?
8. Який вигляд має загальний розв'язок ЛОДР в залежності від коренів характеристичного рівняння?

9. Які рівняння називаються лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР)?

10. Якою є структура загального розв'язку ЛНДР?

11. Які методи розглянуто для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння? У чому полягає суть, позитивні риси та недоліки кожного з них? Опишіть алгоритми застосування обох методів.

Тема 5
Системи диференціальних рівнянь першого порядку

5.1 Поняття про системи диференціальних рівнянь

Для описання багатьох природних процесів та явищ потрібні, як правило, не одна, а декілька функцій, пов'язаних між собою. Для знаходження цих функцій потрібно скласти декілька диференціальних рівнянь і об'єднати їх у систему. Так, наприклад, для створення математичної моделі, яка буде описувати співіснування видів, одного диференціального рівняння вже недостатньо. Потрібно розглядати системи диференціальних рівнянь, кожне з рівнянь якої має описувати динаміку певної популяції.

У 1925 році **Альфред Лотка** і в 1926 році **Віто Вольтерра** незалежно запропонували математичну модель співіснування двох видів, в якій один вид «жертва» є джерелом харчування для другого виду «хижака». Перші моделі були значно спрощені відносно реальних умов, тому не могли відобразити всі сторони взаємодії «хижак – жертва». Однак цінність цих моделей безперечна, оскільки вони стали основою подальшого розвитку математичної екології.

Приклад 1. Нехай $x(t)$ – розмір популяції хижаків у момент часу *t*, а $y(t)$ – розмір популяції жертв. Припустимо, що кожна популяція за відсутністю іншої підкорюється закону природнього (експоненціального) зростання: $\dot{y}(t) = \gamma y$, $\gamma > 0$, $\dot{x}(t) = -\alpha x$, $\alpha > 0$. Популяція жертв необмежено зростає, а популяція хижаків вимирає за відсутністю жертв. Взаємодія популяцій веде до того, що кількість жертв зменшується, а кількість хижаків навпаки. У простішому випадку змінення розміру кожної популяції буде пропорційним частоті зустрічей двох видів, тобто добутку xy розмірів їх популяцій. В результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + \beta xy \\ \dot{y}(t) = \gamma y - \delta xy \end{cases}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

Дана система називається моделлю Лотки-Вольтерри, або моделлю «хижак-жертва». Відомо, що таку систему не можна розв'язати аналітично. Якісний аналіз цієї моделі показав, що незалежно від початкових умов один з видів моделі обов'язково вимирає.

Розглянемо системи, які можна розв'язати аналітично. У даній темі обмежимось системами двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами, записаними в нормальній формі.

Систему виду

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + f(t), \\ \dot{y} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + g(t) \end{cases}$$

називають **системою у нормальній формі** (нормальною системою), оскільки вона записана відносно похідних шуканих функцій. Тут $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ – похідні невідомих функцій $x(t), y(t)$ за часом, a_{ij} – коефіцієнти (числа), $f(t), g(t)$ – деякі функції.

Якщо $f(t) = g(t) = 0$, то система називається однорідною. В іншому випадку неоднорідною.

Нормальна система диференціальних рівнянь називається лінійною, якщо праві частини обох рівнянь є лінійними відносно шуканих функцій. Передбачається, що кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих функцій.

Розв'язком системи називається сукупність функцій $x(t), y(t)$, які задовольняють кожному з рівнянь системи.

Задача Коші для такої системи полягає у відшуканні розв'язку, що задовольняє початковим умовам $x(t_0) = b_1, y(t_0) = b_2$.

5.2 Методи розв’язання однорідних систем двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами

Для розв'язання лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь застосовуються два основних методи:

1. Метод Ейлера, призначений для систем диференціальних рівнянь.

2. Метод виключення, оснований на зведенні системи до одного однорідного диференціального рівняння n -го порядку.

Методи розв’язання однорідних систем двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами розглянемо за допомогою моделі міжвидової конкуренції. Даний приклад застосовується тільки як ілюстрація до відповідного математичного апарату.

Приклад 2 (модель міжвидової конкуренції). Нехай взаємний вплив популяцій двох конкуруючих видів описується лінійною однорідною системою

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x(t) - y(t), \\ \dot{y} = -x(t) + 2y(t) \end{cases} \tag{5.1}$$

де $x(t), y(t)$ – чисельність популяцій в момент часу *t*.

Припустимо, що відома початкова кількість популяцій $x(0) = 100, y(0) = 200$ особин.

Знайти чисельності обох видів в будь-який момент часу.

Розв’язання.

1. Застосуємо узагальнений метод Ейлера для систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку. Запишемо систему (5.1) в матричному вигляді

$$\frac{dY}{dt} = AY, \tag{5.2}$$

де $\dfrac{dY}{dt}=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів, $Y=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

Загальний розв'язок системи матиме вигляд $Y=C_1Y_1+C_2Y_2$, де $Y_1=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$, $Y_2=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$ – лінійно незалежні частинні розв'язки системи, C_1, C_2 - довільні сталі.

За аналогією з однорідними диференціальними рівняннями частинний розв'язок системи будемо шукати у вигляді $Y=be^{kt}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ – числовий вектор. Підставивши частинний розв'язок в рівняння (5.2), отримаємо $Abe^{kt}=kbe^{kt}$, $Ab=kb$, тобто вектор $b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ є власним вектором матриці A за означенням, а число k – її власним значенням (власним числом). З рівності $Ab=kb$ слідує, що $(A-kE)b=0$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – одинична матриця. Матричне рівняння $(A-kE)b=0$ відповідає однорідній системі лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими k_1 і k_2. Для того, щоб система мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю. Отже складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння системи:

$$|A-kE|=0,$$

$$\begin{vmatrix}2-k & -1\\ -1 & 2-k\end{vmatrix}=0,$$

$$(2-k)^2-1=0,$$

$$(k-2)^2=1,$$

$$\left[\begin{array}{l}k-2=1,\\ k-2=-1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} k=1, \\ k=3 \end{array}\right.$$

Числа $k_1=1$ і $k_2=3$ власні числа лінійного оператора A. Кожному власному числу підберемо власний вектор.

При $k_1=1$ маємо $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, тобто $b_1-b_2=0$, $b_1=b_2$. Якщо покласти $b_1=1$, то отримаємо вектор $\overline{l_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає власному числу $k_1=1$. При $k_2=3$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1=-b_2$, $\overline{l_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Лінійна комбінація частинних розв'язків дає загальний розв'язок системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1 l_1 e^{k_1 t}+C_2 l_2 e^{k_2 t}, \ C_1, C_2 \text{ – довільні сталі.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3t}, \quad \begin{cases} x(t)=C_1 e^{t}+C_2 e^{3t}, \\ y(t)=C_1 e^{t}-C_2 e^{3t} \end{cases}$$

Зауваження. У даній задачі корені характеристичного рівняння дійсні різні. В інших випадках слід міркувати аналогічно п. 4.3.

Проведемо розв'язання системи **методом виключення.** Суть методу полягає в тому, щоб звести систему до лінійного однорідного рівняння другого степеню.

$$\begin{cases} \dot{x}=2x(t)-y(t), \\ \dot{y}=-x(t)+2y(t) \end{cases}$$

Алгоритм. На першому етапі за допомогою підстановок спробуємо отримати диференціальне рівняння вищого порядку відносно одної з невідомих функцій. Для цього:

- Продиференцюємо одне з рівнянь системи, наприклад перше, за *t*:

$$\ddot{x}=2\dot{x}(t)-\dot{y}(t).$$

- З другого рівняння системи маємо, що $\dot{y} = -x(t) + 2y(t)$. Підставимо даний вираз у рівняння $\ddot{x} = 2\dot{x}(t) - \dot{y}(t)$, що отримали раніше: $\ddot{x} = 2\dot{x}(t) - (-x(t) + 2y(t)) = 2\dot{x}(t) + x(t) - 2y(t)$.

- Врахуємо з першого рівняння, що $y(t) = 2x(t) - \dot{x}(t)$ і підставимо в рівняння:

$$\ddot{x} = 2\dot{x}(t) - (-x(t) + 2y(t)) = 2\dot{x}(t) + x(t) - 2y(t),$$

$$\ddot{x} = 2\dot{x}(t) + x(t) - 2y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t) - 4x(t) + 2\dot{x} = 4\dot{x} - 3x.$$

$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$ лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язком цього рівняння буде функція $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$. Після знаходження однієї з функцій, в даному випадку $x(t)$, знаходимо другу функцію.

Оскільки $y(t) = 2x(t) - \dot{x}(t)$, то знайдемо $\dot{x}(t) = C_1 e^t + 3C_2 e^{3t}$ і підставимо у вираз $y(t) = 2\left(C_1 e^t + C_2 e^{3t}\right) - \left(C_1 e^t + 3C_2 e^{3t}\right)$

Після спрощення отримуємо $y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{3t}$. Загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{3t} \end{cases}$$

Для знаходження констант застосуємо початкові умови $x(0) = 100$, $y(0) = 200$ і отримаємо систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 100, \\ C_1 - C_2 = 200 \end{cases}$$

з якої знаходимо сталі $C_1 = 150$ та $C_2 = -50$.

$$\begin{cases} x(t) = 150e^t - 50e^{3t}, \\ y(t) = 150e^t + 50e^{3t} \end{cases}$$

Рівняння системи дають можливість знайти розмір кожної популяції у будь-який момент часу.

Аналіз системи показує, що популяція першого типу зменшується. При взаємодії двох видів працює принцип конкурентного виключення Гаузе: якщо два види займають одну й ту саму екологічну нішу, то або один вид вимирає, або види еволюціонують з розділенням своїх екологічних ніш. Таким чином, якщо два види співіснують, то між ними має бути якась екологічна відмінність.

В нашому випадку вимиратиме перший вид. Його вимирання настане при $x(t)=0$, $x(t)=150e^{t}-50e^{3t}=0$, $e^{t}\left(3-e^{2t}\right)=0$, $e^{2t}=3,\ 2t=\ln 3,\ t=\frac{1}{2}\ln 3\approx 0,55$ одиниць часу.

Відповідь. $t\approx 0,55$

Вправи для аудиторної та самостійної роботи

Розв'язати системи 1 - 4:

1. $\begin{cases}\dot{x}(t)=6x(t)-y(t),\\ \dot{y}(t)=3x(t)+2y(t)\end{cases}$ Відповідь. $\begin{cases}x(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{5t},\\ y(t)=3C_1e^{3t}+C_2e^{5t}\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dot{x}(t)=-x(t)-2y(t),\\ \dot{y}(t)=3x(t)+4y(t)\end{cases}$ Відповідь. $\begin{cases}x(t)=C_1e^{t}-2C_2e^{2t},\\ y(t)=-C_1e^{t}+3C_2e^{2t}\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dot{x}(t)=2x(t)-y(t),\\ \dot{y}(t)=4x(t)-2y(t)\end{cases}$ Відповідь. $\begin{cases}x(t)=C_1+C_2t,\\ y(t)=2C_1+C_2(2t-1)\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dot{x}(t)=4x(t)-y(t),\\ \dot{y}(t)=x(t)+2y(t)\end{cases}$ Відповідь. $\begin{cases}x(t)=C_1e^{3t}+C_2(t+1)e^{3t},\\ y(t)=C_1e^{3t}+C_2te^{3t}\end{cases}$

Розв'язати задачу.

Задача 1

Нехай $x(t)$ – розмір популяції хижаків у момент часу *t*, а $y(t)$ – розмір популяції жертв. Припустимо, що швидкості змінення їх популяцій описуються системою:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t), \\ \dot{y}(t) = -x(t) + y(t) \end{cases}$$

Визначте розмір популяції у будь-який момент часу, якщо початкові чисельності популяцій $x(0) = y(0) = 1000$. За який час станеться вимирання виду «жертви»?

Відповідь. $t = \dfrac{\pi}{4}$ одиниць часу.

Контрольні запитання

1. Яка система диференціальних рівнянь першого порядку називається нормальною?
2. У якому випадку нормальну систему називають однорідною? Неоднорідною?
3. Що називають розв’язком системи диференціальних рівнянь?
4. В чому полягає задача Коші для систем диференціальних рівнянь?
5. Які методи розв’язання однорідних нормальних систем першого порядку розглянуто?
6. В чому полягає узагальнений метод Ейлера розв’язання систем лінійних однорідних рівнянь?
7. В чому полягає ідея методу виключення?
8. Які ще моделі «хижак - жертва» та моделі міжвидовою конкуренції відомі? Оформіть завдання у вигляді рефератів.

Індивідуальні завдання

Варіант 1

1. Показати, що задана функція $y = Cx$ є розв'язком диференціального рівняння $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $\left(1+x^2\right)\mathrm{d}y - \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x = 0$; *b*) $\left(x^2 - xy\right)\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x = 0$;

   c) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$; *d*) $\left(3y+4x\right)dx + \left(3x+3y^2\right)dy = 0$;

   e) $2\left(xy'+y\right) = xy^2$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2,\ \ y(1) = 0$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = e^{2x} + x^2$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 2y' - 3 = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + y' = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + 2y' + y = xe^x$; *b*) $y'' + 4y' + 5y = x$; *c*) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Варіант 2

1. Показати, що задана функція $y = \dfrac{C}{\cos x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $x^2 y' + y^2 = 0$; *b*) $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$; *d*) $xy' + 2y = e^{-x^2}$;

   d) $\left(2y + 4x\right)dx + \left(2x + 3y^2\right)dy = 0$; *e*) $2y' + 2y = xy^2$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x,\ \ y\left(\pi / 2\right) = 0$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння четвертого порядку: $y^{\mathrm{IV}} = x^3 + \cos 3x$.

5. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 6y' + 9y = 0$.

6. 6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 2y' + 3y = 0,\ \ y\left(0\right) = 0,\ y'\left(0\right) = 1$.

7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' - y = 1 + x$; *b*) $y'' + 5y' - 6y = \cos 2x$; *c*) $y'' + 16y = \dfrac{8}{\sin 4x}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$$

Варіант 3

1. Показати, що функція $y = Cx^3$ є розв'язком диференціального рівняння $y' - \frac{3}{x}y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$; *b*) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$; c) $(2x+1)y' + y = x$;

   d) $\left(5y + x^2\right)dx + \left(5x + y^3\right)dy = 0$; *e*) $xy' + y = y^2 \ln x$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку: $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ \ y(0) = 0$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y^{\mathrm{IV}} = \cos 2x + x$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 5y' + 6y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 2y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' - y' = \left(x^2 + 2\right)e^{2x}$; *b*) $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$;

   d) $y'' - 2y' + y = e^x\sqrt{1-x}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Варіант 4

1. Показати, що функція $y = 0,2x^5 + C$ є розв'язком диференціального рівняння $\frac{\mathrm{d}y}{x^4} = \mathrm{d}x$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $\sqrt{1-x^2} \cdot \mathrm{d}y - \sqrt{1-y^2} \cdot \mathrm{d}x = 0$; *b*) $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$;

   c) $\left(1+x^2\right)y' + xy = 1$; *d*) $\left(3y + \sin x\right)dx + \left(3x + \cos y\right)dy = 0$;

   e) $y' - 2xy = y^2$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x,\ \ y\left(\pi / 4\right) = 1/2$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = x^3 + 2e^x$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 2y' + 2y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - y = 0\ \ y\left(0\right) = 0,\ y'\left(0\right) = 2$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

a) $y'' + 2y' = xe^{3x}$; *b*) $y'' + y' - 2y = \cos x$; *c*) $y'' + 4y' = 18ctg\,2x$.

8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Варіант 5

1. Показати, що функція $y = \ln x + C$ є розв'язком диференціального рівняння $\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $\left(x - y^2 x\right)\mathrm{d}x + \left(y - x^2 y\right)\mathrm{d}y = 0$; *b*) $x\mathrm{d}y = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathrm{d}x$;

   c) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$; *d*) $\left(2y + 5x\right)dx + \left(2x + 4y^5\right)dy = 0$;

   e) $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ \ y\left(-1\right) = \dfrac{3}{2}$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = 3x^2 + 2\sin 5x$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння другого вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 2y' + 2y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 3y' + 2y = 0,\ \ y\left(0\right) = -3,\ y'\left(0\right) = 0$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + 7y' + 12y = \sin 2x$; *b*) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$;

   c) $y'' + y = 3tgx$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

Варіант 6

1. Показати, що функція $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' - y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $(1+y)\mathrm{d}x - (1-x)\mathrm{d}y = 0$; *b*) $\left(3x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0$;

   c) $x(y' - y) = \left(1 - x^2\right)e^x$; *d*) $\left(3x^2 + 2y\right)dx + (2x - 5)dy = 0$;

   e) $y' - ytgx + y^2 \cos x = 0$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$, $y(0) = 1$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = x^{-2} + 2^x$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' - 4y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:
$$y'' + 2y' + 5y = 0,\ \ y(0) = -1,\ y'(0) = 2.$$
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + 49y = \cos x$; *b*) $y'' - y' = -9x$; c) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1 + e^{-x}}$.

8 Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Варіант 7

1. Показати, що функція $y = Ce^{2x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' - 4y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   $a)$ $\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y - \left(1+y^2\right)\mathrm{d}x = 0$; $b)$ $\left(x-y\right)\mathrm{dx} + \left(x+y\right)\mathrm{dy} = 0$;

   c) $y' - yctgx = tg^2 x$;d $\left(x^2+y\right)\mathrm{dx} + \left(x-2y\right)\mathrm{dy} = 0$;

   $e)$ $y' + 2xy + 4x^3y^3 = 0$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. $y' - \dfrac{y}{x} = x^3, \;\; y\left(1\right) = 0$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = e^{3x} + 6x^2$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 3y' + 2y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - y' = 0 \;\; y\left(0\right) = 2, \; y'\left(0\right) = 1$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   $a)$ $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$; $b)$ $y'' + y = 3x$; c) $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = 3x - 2y. \end{cases}$$

Варіант 8

1. Показати, що функція $y = -\frac{C}{\cos x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = 0$
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $(2x-5)dy + 3y^2 dx = 0$; *b*) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$;

   c) $xy' + 2y = e^{-x^2}$;*d* $\left(3x^2y^2+1\right)\mathrm{dx} + 2x^3\mathrm{ydy} = 0$;

   e) $y' - y = xy^2$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. $y' + \frac{y}{x} = 3x,\ \ y(1) = 1.$
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння третього порядку: $y''' = x^2 + \sin 3x$.
5. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 6y' + 9y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 2y' + 3y = 0\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' - y = 1 + x$; *b*) $y'' + 4y = \cos 2x$;

   c) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

Варіант 9

1. Показати, що задана функція $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y' + 2y = e^{x}$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $(3y-1)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$; *b*) $xy' = xtg\frac{y}{x} + y$;

   c) $y' + 2y = 4x$; *d* $e^{y}dx + \left(xe^{y} - 2y\right)dy = 0$;

   e) $y' + \frac{2}{x}y = x^{4}y^{2}$.

3 Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку: $y' - y\cos x = \sin 2x,\ \ y(0) = -1.$

4 Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y^{\mathrm{IV}} = \cos 3x + x^{2}$.

5 Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 5y' - 6y = 0$.

6 Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 9y = 0\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 3$.

7 Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' - y = x^{2} + 2$; *b*) $y'' + 2y' + 5y = 4\sin 2x$;

   c) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{9 + e^{-x}}$.

8 Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + 4y. \end{cases}$$

Варіант 10

1. Показати, що задана функція $y = 2x^5 + C$ є розв'язком диференціального рівняння $\frac{\mathrm{d}y}{10x^4} = \mathrm{d}x$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $\left(1 + x^2\right) \cdot \mathrm{d}y - \sqrt{1 - y^2} \cdot x\mathrm{d}x = 0$; *b*) $xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$;

   c) $y' + 2y = x^2 + 2x$; *d* $\left(5x^2 - y\right)dx - xdy = 0$;

   e) $y' + 2y = e^x y^2$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' + xy = -x^3, y(0) = 3.$
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = x^2 + 5e^{2x}$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 2y' - 3y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y\left(0\right) = 1,\ y'\left(0\right) = 2$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + 2y' = 3x + 5$; *b*) $y'' + y = 2\cos x$;

   c) $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Варіант 11

1. Показати, що функція $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ є розв'язком відповідного диференціального рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$; *b*) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$;

   c) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$;

   d) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$;

   e) $xy' + y = xy^2$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' - y\cos x = -\sin 2x, y(0) = 3.$
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = 4x^3 + 2\sin 5x$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 3y' - 4y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 3y' = 0,\; y(0) = 0,\; y'(0) = -3$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + 4y' = \sin 2x$; *b*) $y'' + 2y' + y = x^2 + 6x$;

   c) $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 5x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Варіант 12

1. Показати, що задана функція $y = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' - y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0$; *b*) $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$;

   c) $y' - 4xy = -4x^3$; *d*) $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$;

   e) $y' + y = xy^2$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' - \dfrac{y}{x+1} y = e^x(x+1), y(0) = 1.$
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = x^{-2} + e^{3x}$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 9y' - 10y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами: $y'' - 4y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + 2y' + 5y = 3e^{2x}$; *b*) $y'' - y' = 2x$; c) $y'' + 9y = 9/\sin 3x$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 6x_2. \end{cases}$$

Варіант 13

1. Показати, що задана функція $y = x^2$ є розв'язком диференціального рівняння $y'y = 2x^3$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $y(1 + \ln y) + xy' = 0$; *b*) $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$;

   c) $y' - y\cos x = -\sin 2x$; *d*) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

   e) $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\dfrac{1}{2}$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = x + \sin 2x$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 9y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами: $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + 2y' + 5y = 2\sin x$; *b*) $y'' - y' = 4x^2 + 2$;

   c) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Варіант 14

1. Показати, що задана функція $y = Ce^{2x}$ є розв'язком відповідного диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0$; *b*) $\left(3x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0$;

   c) $y' - y\cos x = \sin 2x$; *d*) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$;

   e) $4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' + \dfrac{y}{x} = 3x, y(1) = 1.$
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = x^2 + e^{2x}$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 4y' + 4y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:
   $$y'' + 4y' - 5y = 0,\ y\left(0\right) = 1,\ y'\left(0\right) = 2.$$
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + 49y = 2\cos x$; *b*) $y'' - y' = 2x^2$; c) $y'' + 4y = 4ctg\,2x$.

8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -7x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

Варіант 15

1. Показати, що задана функція $y = xe^x$ є розв'язком відповідного диференціального рівняння $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $\sqrt{5+y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0$; *b*) $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 10$;

   c) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$; *d*) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$;

   e) $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1 + \sin x)$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $\left(x + y\right)y' = y - 2x, y(1) = 0.$
4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння вищого порядку: $y''' = x^{-2} + \sin 3x$.
5. Знайти загальний розв'язок для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 6y' + 9y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами:
$$y'' + 4y' - 5y = 0,\ y\left(0\right) = 1,\ y'\left(0\right) = 3.$$
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + 9y = \cos 3x$; *b*) $y'' + y' = 3x^2$;

   c) $y'' - 3y' + 2y = 1/\left(3 + e^{-x}\right)$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2. \end{cases}$$

Варіант 16

1. Показати, що задана функція $y = tgx + C$ є розв'язком диференціального рівняння $dx - \cos^2 x \cdot dy = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $y' = y \ln y$;   *b*) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$;

   c) $y' - ytgx = 1$;   *d*) $e^y dx + xe^y dy = 0$;

   e) $y' + y = y^2 e^{-x} \cos x$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $\left(1 + x^2\right) y' + 2xy = x, \ y\left(1\right) = \dfrac{3}{4}$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння четвертого порядку: $y^{\mathrm{IV}} = x^2 + 5^x$.
5. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 2y' - 3y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 6y' + 10y = 0, \ y\left(0\right) = 3, \ y'\left(0\right) = 11$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' - y' = 3e^x$;   *b*) $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$;

   c) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

Варіант 17

1. Показати, що задана функція $y = e^{2x} + C$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' - 3y' = -2e^{2x}$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $y' + e^{2x}\left(y+1\right) = 0$; *b*) $y' = 2\frac{x}{y}\sin\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$;

   c) $y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{x}$; *d*) $\left(2xy^2 + x\right)dx + 2x^2ydy = 0$;

   e) $y' - 2y\sin 2x = y^2\cos 2x$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' - \frac{1}{x}y = xe^x$, $y\left(1\right) = e$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння четвертого порядку: $y''' = 2e^{3x} - \sin x$.
5. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 2y' + 5y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 3y' = 0$, $y\left(0\right) = 2$, $y'\left(0\right) = 3$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + 6y' + 9y = \sin x$; *b*) $y'' - y' = x\sin x$;

   c) $y'' + 3y' + 2y = \frac{4e^{-x}}{6 + e^x}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Варіант 18

1. Показати, що задана функція $y = \sqrt{1 + x^2}$ є розв'язком диференціального рівняння $xydx - \left(1 + x^2\right) \cdot dy = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $xy' + y = 4$; *b*) $y' = \dfrac{y^2}{x^2 - xy}$;

   c) $y' - \dfrac{2}{x} y = e^{\frac{1}{x}}$; *d*) $\left(x^2 + y\right)dx + \left(x + y\right)dy = 0$;

   e) $y' - y = -xy^2$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' + ytgx = \left(x + 1\right)\cos x, y\left(0\right) = 3$.
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння четвертого порядку: $y^{\mathrm{IV}} = x^3 + \sin 2x$.
5. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 7y' + 6y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 2y' + 26y = 0,\; y\left(0\right) = -1, y'\left(0\right) = 4$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' + y' = \cos x$; *b*) $y'' + 9y = \left(x + 1\right)\sin 3x$;

   c) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = x + 5y. \end{cases}$$

Варіант 19

1. Показати, що задана функція $y = C\cos x$ є розв'язком диференціального рівняння $dy + ytgx \cdot dx = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $y' + x\sqrt{y-9} = 0$; *b*) $y' = \dfrac{-x-2y}{y}$;

   c) $y' + xy = x^2$; *d*) $\left(xy^2 - 2x\right)dx + \left(y + x^2 y\right)dy = 0$;

   e) $y' + 2xy = xy^2$.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' - e^x y = e^{3x}\left(x+1\right),\ \ y\left(0\right) = 1.$
4. Знайти загальний розв'язок для диференціального рівняння четвертого порядку: $y^{\mathrm{IV}} = 3e^{2x} + x^3 + 1.$
5. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 4y' + 5y = 0$.
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 2y' - 15y = 0,\ \ y\left(0\right) = 3,\ y'\left(0\right) = 7$.
7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' - 3y' - 4 = e^{-x}$; *b*) $y'' + 9y' = xe^{9x}$; c) $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$.
8. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

Варіант 20

1. Показати, що задана функція $y = C\sin x$ є розв’язком диференціального рівняння $y'' + y = 0$.
2. Встановити тип та знайти загальний розв’язок диференціальних рівнянь першого порядку:

   a) $x^3 y' - \left(x^2 + 1\right) y = 0$; *b*) $xy' = x\sin^2 \dfrac{y}{x} + y$;

   c) $y' - ytgx = x$; *d*) $\left(y + xe^x\right)dx + \left(x + e^y\right)dy = 0$;

   e) $y' - 2y = y^2 e^x$.
3. Розв’язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' - \dfrac{y}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y(0) = 0$.
4. Знайти загальний розв’язок для диференціального рівняння четвертого порядку: $y^{\mathrm{IV}} = \sin 2x - \cos 3x$.
5. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + 4y' + 13y = 0$.
6. Розв’язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + y' - 12y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -15$.
7. Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

   a) $y'' - y = 2e^{3x}$; *b*) $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$;

   c) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$.
8. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

Додаткові задачі до індивідуальних завдань

Задача 1 (задача про охолодження тіла)

Початкова температура тіла 100^0 С. За 20хв тіло охолодилось до $80^\circ C$. Температура навколишнього середовища $(10+n)^\circ C$.

а) За який час тіло охолоне до $40^\circ C$?
б) До якої температури тіло охолоне за 30хв?

Задача 2 (задача про розклад токсичної речовини)

Протягом 20 днів розпалося 50% від початкової кількості токсичної речовини.
а) за який час залишиться *n* % від початкової кількості?
б) який відсоток речовини залишиться через (4+*n*) днів?

Задача 3

У бак, що містить 30л води, неперервно надходить розчин, що містить 0,2 кг солі, зі швидкістю *n* літрів за хвилину. Розчин перемішується з водою і суміш витікає з баку з тією ж швидкістю.
а) скільки солі буде в баці через 10 хвилин після початку процесу?
б) за який час концентрація солі у баці становитиме 15%?

Задача 4 (задача про вентиляцію приміщення)

У приміщенні об'ємом (100+*n*) м^3 міститься 0,2% вуглецю. Вентилятор подає 10м^3 у хвилину чистого повітря, яке містить 0,04% вуглекислого газу. За який час концентрація вуглецю у повітрі приміщення становитиме 0,08%.

Зауваження.
1. Значення параметрів ***n*** задає викладач.
2. Приклади розв'язання та оформлення завдань можна знайти в тексті посібника.

Список рекомендованої літератури

1. *Дубовик В.П.* Вища математика: навч. посібн. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ: А.С.К., 2005. – 648 с.
2. *Денисюк В.П.* Вища математика. Модульна технологія навчання: навч. посібн. : у 4 т. / В.П. Денисюк, В.К. Репета. – Ч.2. – Київ: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276с.
3. *Дюженкова Л.І.* Вища математика: Приклади і задачі: посібник / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін. – Київ: Видавничий центр «Академія», 2003. – 624 с.
4. *Лаврик В.І.* Методи математичного моделювання в екології: навч. посібник. – Київ: Вид. дім «КМ Академія», 2002. – 203 с.
5. *Тевяшев А.Д.* Вища математика у прикладах та задачах: навч. посібн. у 3 т. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин, Г.М. Кривошеєва та ін. - т. 3 – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с.
6. *Гудименко Ф.С.* Диференціальні рівняння : (учб. посібник) / Гудименко Ф.С. – Київ : Київський університет, 1958. – 206 с.
7. *Braun M.* Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics / Martin Braun. – 4th ed. – New York : Springer-Verlag, 1993. – 579 p.