Лекція № 09
Теорема Гауса

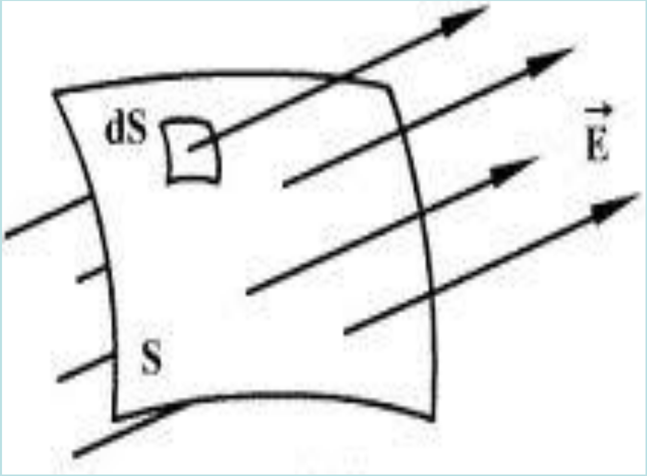
1. Потік вектора напруженості електростатичного поля
2. Теорема Гауса та її застосування
3. Циркуляція напруженості електростатичного поля
4. Зв’язок напруженості з потенціалом

1. Потік вектора напруженості електро-статичного поля

Потоком вектора напруженості електростатичного поля $d\Phi_E$ через елементарну поверхню dS називають скалярну фізичну величину, чисельно рівну скалярному добутку вектора напруженості $\vec{E}$ на елемент цієї поверхні $d\vec{S}$:

$$d\Phi_E = \left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right) = E\cdot dS\cdot\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{n}}\right),$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні dS.



Якщо поле неоднорідне і поверхня не плоска, то її уявно розбивають на елементи dS, які наближено можна вважати плоскими, а поле в її межах – однорідним. Тоді повний потік вектора $\vec{E}$ через поверхню S обчислюється як поверхневий інтеграл:

$$\Phi_E = \int_S E \cdot dS \cdot \cos\left(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}\right) = \int_S E_n \cdot dS$$

де E_n – проекція вектора напруженості $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$.

2. Теорема Гауса. Електричне поле заряджених нескінченних нитки та площини

Іноді, застосування принципу суперпозиції для визначення напруженості електростатичного поля системи великої кількості точкових нерухомих зарядів, вимагає громіздких математичних розрахунків, у таких випадках доцільно використовувати ***теорему Гаусса:*** потік вектора напруженості електростатичного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі електричних зарядів, обмежених цією поверхнею, поділеній на $\varepsilon\varepsilon_0$:

$$\Phi_E = \oint_S \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i .$$

Теорема Гаусса може бути сформульованою і доведеною для вектора електричного зміщення $\vec{D}$. *Електричне зміщення (індукція електростатичного поля)* $\vec{D}$ – силова характеристика електростатичного поля, що не залежить від впливу середовища.

Зв'язок між векторами $\vec{E}$ і $\vec{D}$ має вигляд:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \qquad ,$$

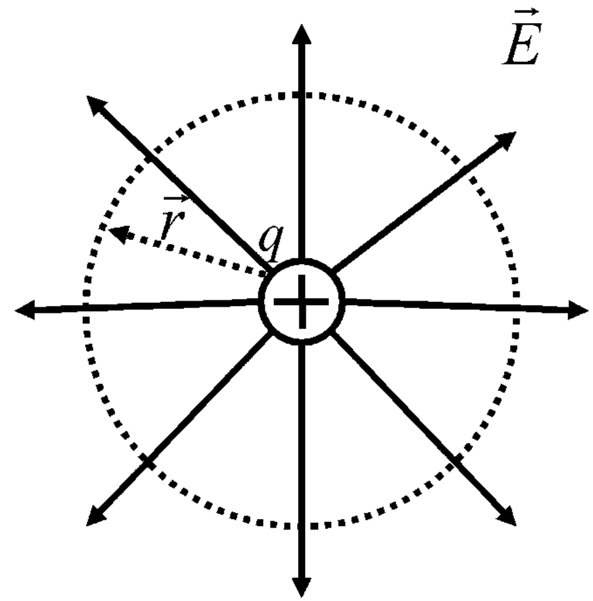
звідки математичний запис теореми Гаусса через вектор електричного зміщення:

$$\Phi_D = \oint_S \left(D \cdot d\vec{S}\right) = \sum_{i=1}^{N} q_i .$$

Найчастіше теорема Гаусса застосовується для розрахунку напруженості $\vec{E}$ систем зарядів з певною симетрією у їх відносному розташуванні. Розглянемо кілька прикладів розрахунку напруженості електростатичного поля $\vec{E}$ із застосуванням теореми Гаусса.

Іоганн Карл Фрідрих Гаусс

Електричне поле точкового заряду. Для обчислення $\vec{E}$ із застосуванням теореми Гаусса, в електричному полі необхідно обрати таку замкнену поверхню, щоб задача розв'язувалась найпростіше. Як видно з рис., для поля точкового заряду такою поверхнею є сфера. Обрана сферична поверхня радіуса $\vec{r}$ із центром у точці розміщення заряду охоплює заряд q. Потік вектора напруженості $\vec{E}$ через сферичну поверхню:



$$\Phi_E = \oint\limits_S \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right) = E(r) \underbrace{\oint dS}_{4\pi r^2} = 4\pi r^2 E(r).$$

За теоремою Гаусса

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Прирівняємо праві частини останніх рівнянь:

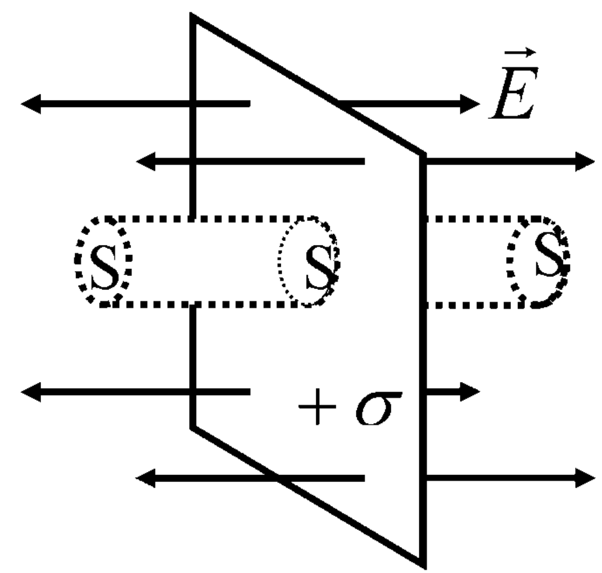
$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Звідси напруженість поля точкового заряду q на відстані r:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

що збігається з виразом, обчисленим за означенням.

Електричне поле рівномірно зарядженої нескінченної площини. Площину можна вважати нескінченною, якщо відстанню від точки в якій визначають напруженість електростатичного поля, до площини можна нехтувати порівняно з її геометричними розмірами. Нехай дана площина заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду $\sigma = \frac{dq}{dS}$. Для обчислення $\vec{E}$ за теоремою Гаусса, раціонально обрати замкнену поверхню у вигляді прямого циліндра, розміщеного симетрично відносно зарядженої площини з основами площею S паралельними їй (рис.).



Потік вектора напруженості $\vec{E}$ через циліндричну поверхню:

$$\varPhi_E = \oint\limits_S \left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right) = \oint\limits_{S_{бічн.\ \ пов.}} EdS\underbrace{\cos(\widehat{\vec{E},\vec{n}})}_{=0} + 2\oint\limits_{S_{основи}} EdS\underbrace{\cos(\widehat{\vec{E},\vec{n}})}_{=1} = 2ES \; .$$

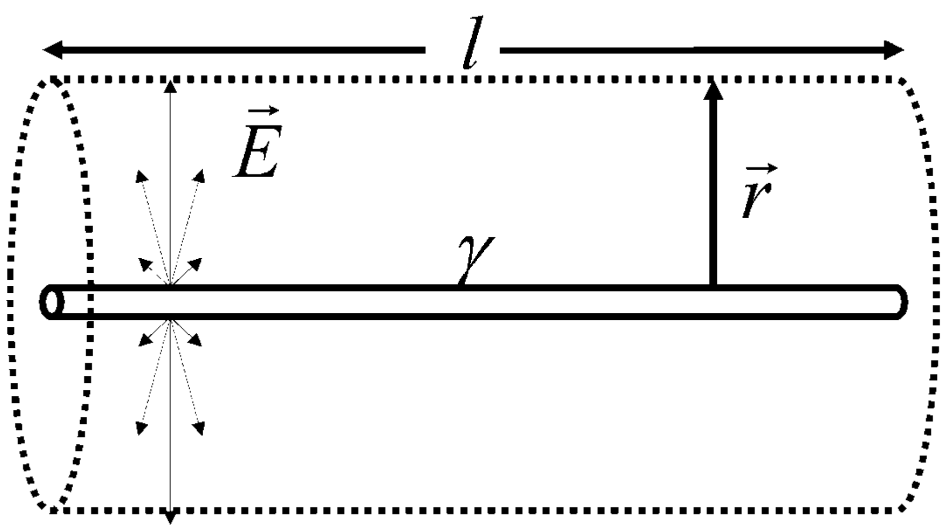
За теоремою Гаусса

$$\varPhi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon\varepsilon_0} \; .$$

Прирівняємо праві частини останніх рівнянь: $2ES = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Звідси напруженість поля поблизу рівномірно зарядженої нескінченної площини:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \; .$$

Електричне поле рівномірно зарядженого нескінченного провідника. Нехай даний нескінченний провідник заряджений рівномірно з лінійною густиною заряду $\gamma = \frac{dq}{dS}$. Для обчислення напруженості поля $\vec{E}$ провідника, оберемо замкнену поверхню у вигляді прямого циліндра довжиною l і радіусом r, розміщеного концентрично відносно зарядженого провідника (рис.).



Потік вектора напруженості $\vec{E}$ через циліндричну поверхню:

$$\Phi_E = \oint_S \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right) = \oint_{S_{бічн.\ пов.}} EdS \underbrace{\cos(\widehat{\vec{E},\vec{n}})}_{=1} + 2 \oint_{S_{основи}} EdS \underbrace{\cos(\widehat{\vec{E},\vec{n}})}_{=0} = ES_{бічн.\ пов.} = E \cdot 2\pi rl .$$

За теоремою Гаусса

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\gamma l}{\varepsilon\varepsilon_0} .$$

Прирівняємо праві частини останніх рівнянь: $2\pi rlE = \dfrac{\gamma l}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Напруженість поля на відстані r від рівномірно зарядженого нескінченного провідника:

$$E = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} .$$

3. Циркуляція напруженості електро- статичного поля

З рівняння повної роботи на шляху 1 – 2

$$A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

випливає, що при переміщенні точкового заряду в електричному полі по довільному замкненому контуру ($r_1 = r_2$) робота дорівнює нулеві. Математично цю умову, на основі означення роботи електричного поля, можна записати як:

$$A = \oint_L \left(\vec{F}_K \cdot d\vec{r}\right) = \oint_L q_0 E \cdot \underbrace{dl\cos\alpha}_{dr} = q_0 \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

$$A = \oint_L \left(\vec{F}_K \cdot d\vec{r}\right) = \oint_L q_0 E \cdot \underbrace{dl\cos\alpha}_{dr} = q_0 \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Оскільки $q_0 \neq 0$, то

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Лінійний інтеграл $\oint_L \vec{E}d\vec{l}$, обчислений за довільним замкненим конатуром L, називають **циркуляцією вектора напруженості $\vec{E}$ електричного поля.**

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Цей запис потенціальності електростатичного поля є одним із фундаментальних рівнянь електростатики, яке відображає той факт, що силові лінії електростатичного поля є незамкненими: вони починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних або йдуть у нескінченність (для позитивних зарядів) чи з нескінченності (для негативних). При переміщенні пробного точкового заряду в такому полі по замкненому контуру на одних ділянках шляху виконана робота буде додатною, на інших – від'ємною, але повна робота завжди дорівнюватиме нулеві.

Умова потенціальності електростатичного поля (теорема про циркуляцію вектора напруженості електричного поля): векторне поле напруженістю $\vec{E}$ називається потенціальним, якщо циркуляція вектора $\vec{E}$ по довільно замкненому контуру дорівнює нулю.

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

4. Зв’язок напруженості з потенціалом

Оскільки напруженість і потенціал є різними за фізичним змістом характеристиками тих самих точок поля, між ними має існувати зв'язок. Для цього визначимо роботу по перенесенню пробного заряду q_0 між точками 1 і 2 однорідного електростатичного поля двома різними способами.

З одного боку, робота A_{12} по переміщенню заряду q_0 визначається різницею потенціалів:

$$A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) \text{ або } dA_{12} = -q_0 \cdot d\varphi,$$

з іншого боку напруженістю поля:

$$dA_{12} = F_K \cdot dr = q_0 E \cdot dr.$$

Прирівнявши праві частини останніх рівнянь

$$-q_0 \cdot d\varphi = q_0 E \cdot dr,$$

матимемо:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$ або у векторному вигляді: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad\varphi},$

де $grad = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$ – оператор градієнта.

Знак мінус вказує на те, що вектор напруженості електростатичного поля направлений у бік зменшення потенціалу.

Для однорідного поля напруженість за абсолютним значенням визначається:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d},$$

де d – відстань між точками з потенціалами φ_1 і φ_2.

Лекція № 09
Теорема Гауса

1. Потік вектора напруженості електростатичного поля
2. Теорема Гауса та її застосування
3. Циркуляція напруженості електростатичного поля
4. Зв’язок напруженості з потенціалом