

# Варіант №1

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt[4]{\ln(xy)}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + y^2 = z^2$ ;  $x^2 + y^2 = (z - 2)^2$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ y \rightarrow \pi}} \frac{\sin x \sin y}{\pi^2 + xy - \pi x - \pi y}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{x+y}}{y-x}$ ;  $z = e^{\cos^2 \frac{x+y}{y}}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + y)}} - \frac{y}{x^2}$ ;  $y = 5^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{5}}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \arcsin \sqrt{x^2 y - 1} + e^{\sqrt{x}}$ ;  $x = \sin \frac{1}{\sqrt{t}}$ ;  $y = 2t^2$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \frac{2^y}{\sin x + \cos x} - \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;  $x = u - \frac{1}{v}$ ;  $y = v - \frac{1}{u}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \arcsin(3x - 2y)$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $e^{(0,001)^3 + (0,03)^2}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = 5^{-x^2 - y^2 + 2}$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x + y + 6 = 0$ .
12. До поверхні  $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$  провести дотичну площину, паралельну до площини  $x + 2y - z = 0$ .

## Варіант №2

1. Знайти область визначеності функції  $z = \frac{\log_2(2x - 3y - 12)}{\sqrt[6]{9 - x^2 - y^2}}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + 4y^2 + z = 1$ ;  $x^2 + 4y^2 - z = 1$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 y^2 + 9} - 3}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = y + (\arctg x)^y$ ;  $z = \ln(xy + \sqrt{x^2 + 2y})$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \sqrt[3]{1 + \cos(x - y)} - \sin(xy)$ ;  $y = 2^{\cos^5 x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \arctg \frac{x^2}{\sqrt{y}}$ ;  $x = \arccos t$ ;  $y = \ln(1 + t^3)$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \frac{1}{\sqrt[3]{\ln(xy - 1)}} + e^{\frac{x}{y}}$ ;  $x = u - \frac{1}{v}$ ;  $y = u^2 - v^2$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \frac{1}{y} + x^2 y$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = (x - 1)^2 - 2y^2$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 + y^2 + 1$ ;  $x^2 + y^2 \leq 1$ ;  $x \geq y$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z = y + \ln \frac{x}{y}$  у точці  $M(1, 1, 1)$ .

## Варіант №3

1. Знайти область визначеності функції  $z = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \sqrt{y} + \sqrt{x^2 + y^2 - 16\pi^2}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $1 + x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ;  $x = 2$ ;  $x = 5$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} \pi y$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = 2^x \operatorname{ctg} (x^2 + y^3)$ ;  $z = \operatorname{ctg} \left( \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}} \right) - 10$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \arccos \frac{x}{\sin y} + \sqrt{\frac{x}{y}}$ ;  $y = \frac{1}{\ln^2 2^x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \ln(x^2 y + x y^2 + 4x)$ ;  $x = 2t - \frac{1}{\sqrt{t}}$ ;  $y = \sin t$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \operatorname{ctg} \sqrt{e^{x^2 - y}} + x \sin y$ ;  $x = e^{u - \sqrt{v}}$ ;  $y = \frac{1}{u}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = y \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\sqrt{(8, 03)^2 + (6, 02)^2}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = 3 \ln \frac{x}{6} + \ln y + \ln(12 - x - y)$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x + y = 1$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  у точці  $M \left( 1, 1, \frac{\pi}{4} \right)$ .

# Варіант №4

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt[3]{\ln y} + \ln \cos x$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $6z = x^2; y = 0; y = 6 - z$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{4x^2y^3}{x^5 + 6y^5}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \sqrt{x-y} + e^{\frac{x}{y^2}}; z = \sin \frac{x}{y} + \ln(x^4y^2 + 1)$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y), y = y(x): z = \sqrt{x \sin(x^3 + y)} + e^{-y}; y = \arctg^3 \frac{1}{\sin x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y), x = x(t), y = y(t): z = 2y + \ln \cos \frac{x}{y}; x = 2^t; y = \frac{1}{\sqrt{t^3}}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y): z = \ln(xy) \sin x; x = u^2v + 4; y = \sin \sqrt{uv}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \arcsin \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + x$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $(0, 97)^{2,03}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^2y(2 - x - y)$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2; |x| + |y| \leq 1$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z^3 - 3x^2yz = 1$  у точці  $M\left(1, \frac{7}{6}, 2\right)$ .

# Варіант №5

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos y}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $2y^2 = x; \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1; z = 0$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = y^{\ln x}; z = \cos(x + y) \sin xy$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y), y = y(x): z = 2^x - \sin^2(\pi x - y) + \frac{1}{y}; y = \sqrt{x^2 + \operatorname{tg} x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y), x = x(t), y = y(t): z = \sqrt{2 \ln x + e^y} + \frac{y}{\sin x}; x = \sqrt{\sin t}; y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y): z = e^{(x+y)^2} - 10; x = u \cos v; y = \sin v + u$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = x\sqrt{y^3} + \cos x$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $(3,001)^2 \sqrt[3]{1,002}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^2 + y^2 - 10 \ln x - 5 \ln y$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y; x^2 + y^2 \leq 25$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  у точці  $M\left(0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

# Варіант №6

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt{\ln(x - y)}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ ;  $x + y + z = 5$ ;  $z = 0$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{4 - \sqrt{xy + 16}}{xy}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \ln\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) + e^{2xy}$ ;  $z = \arccos \frac{x^2 + 2xy}{y}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \sqrt{xy} - 2^{\ln y} \cos(x + y)$ ;  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin^2 x\right)$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = xe^{xy} + \frac{x}{\ln y}$ ;  $x = e^{t^2}$ ;  $y = \sin \frac{1}{t}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 2y}$ ;  $x = \frac{u}{e^v}$ ;  $y = v \operatorname{tg} u$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \sqrt{x^2 - \sin^2 y}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\frac{1}{\sqrt[3]{0,98} \cdot \sqrt[4]{(1,04)^3}}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^2 + 2xy - y^2 + x + y - 1$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 + 2xy - 10$ ;  $y = x^2 - 4$ ;  $y = 0$ .
12. До поверхні  $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2$  провести дотичну площину, паралельну до площини  $2x + 4y + 6z = 0$ .

# Варіант №7

1. Знайти область визначеності функції  $z = \frac{1}{|x|} \sqrt{\ln(x+y)} - \operatorname{arctg} e^{\frac{1}{y}}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = z - 1$ ;  $z = 2$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \frac{x^2 + y^2 + 1}{\sqrt{9x^2 - 4y^2 - 36}}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = (\ln x)^{\cos^2 y}$ ;  $z = \sqrt[3]{\sin \frac{x^2}{y} + \ln^3 \operatorname{tg}(x^2 y)}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = (x - y) \ln \frac{x}{xy + y^3} - \frac{1}{y}$ ;  $y = \sin \cos \frac{1}{x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{5 + x^2}$ ;  $x = \ln(e^t + 1)$ ;  $y = -\frac{1}{\sqrt{t}}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \ln \frac{x}{y} - e^{xy}$ ;  $x = \cos uv$ ;  $y = 1 - v$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \cos^2(x - y)$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $(1, 03)^{3,001}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 y(2 - x - y)$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x + y = 5$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$  у точці  $M(3, 4, 12)$ .

# Варіант №8

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} + \arcsin(x + 1)$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ;  $x^2 + y^2 = Rx$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) \operatorname{tg} \frac{1}{x^2 + y^2}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \sin \operatorname{tg} \frac{x^2 + y}{xy}$ ;  $z = x\sqrt{y} + \ln(x^2y - 5y - 16)$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \frac{1}{y} + \frac{x^2}{2 + y^2} + \ln^2 \frac{x + 1}{y}$ ;  $y = \sqrt[5]{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \arccos(x^2 + y)$ ;  $x = 5\sqrt{t}$ ;  $y = 3t^4$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \operatorname{tg} \sqrt{x^2y - xy^2}$ ;  $x = u \sin v$ ;  $y = 1 - v$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = e^{2x+y^2}x$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\sqrt{(1, 02)^3 + (0, 001)^2}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^2 - 6x + y^2 - 5$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = \ln[(x - 1)(y + 1)]$ ;  $y = 0$ ;  $y = 1$ ;  $x = 2$ ;  $x = 3$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z = y \operatorname{tg} \frac{x}{3}$  у точці  $M\left(\frac{3\pi}{4}, 3, 3\right)$ .



# Варіант №9

1. Знайти область визначеності функції  $z = \lg(4x - y^2 - 8) 2^{\frac{1}{\sqrt{xy}}}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $z^2 = x^2 + y^2$ ;  $x^2 + y^2 = 2y$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \frac{1}{x - y}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = (\sin x)^{\cos y}$ ;  $z = \frac{xy \operatorname{arctg}(x + y)}{xy + 1}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \frac{1}{\ln^2(x - \sqrt{y})} + \cos(x^2y + 1)$ ;  $y = \operatorname{arccos} \sqrt{x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = (x - y) \ln \frac{x + 1}{y - 1}$ ;  $x = e^{t^2} - 1$ ;  $y = \frac{t^3}{3}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \ln(2^x \cdot 2^{\sqrt{y}} - e) - 25$ ;  $x = 5u - \frac{1}{v}$ ;  $y = \frac{\sin u}{v}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \ln \sin \frac{x}{y}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $(2,008)^2 \cdot (2,097)^3$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^2 + xy - 6x + 16y$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ;  $0 \leq x \leq 1$ ;  $0 \leq y \leq 1$ .
12. До поверхні  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  провести дотичну площину, паралельну до площини  $x + 4y + 6z = 0$ .

# Варіант № 10

1. Знайти область визначеності функції  $z = \ln(3 - x) \ln(2x^2 + 3y^2 - 12)$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + y^2 - z^2 = 9$ ;  $x^2 + y^2 = 9$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \frac{1}{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = y^{3x^2}$ ;  $z = \sqrt{x \ln \sin y + y^2}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = 3^{xy^2 - yx^2} + x \sin y$ ;  $y = \sin(x - \ln x)$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = xe^{x^2 + y^2 + 1}$ ;  $x = \cos^2 t$ ;  $y = \cos t^2$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \arccos(x + \sqrt{xy})$ ;  $x = u \operatorname{tg} v^2$ ;  $y = u - \sqrt{v}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \sqrt{xy} + y^2$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\sqrt{(1, 02)^3 + (1, 97)^3}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = \ln(xy) + x$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = \frac{1}{3} \ln \frac{y}{x}$ ;  $y \geq \frac{1}{3}$ ;  $y \leq 1$ ;  $y \geq x^2$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $\operatorname{tg}(x + z) ye^z = 1$  у точці  $M(3, 4, 12)$ .

# Варіант № 11

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $z^2 = x^2 + y^2$ ;  $x^2 + y^2 = 2x$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{1 - \sqrt{1 + x^2 y^2}}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \cos \ln \frac{x}{x - y^2} + \frac{1}{xy}$ ;  $z = \ln(x^3 + 10xy + y^2) + \sqrt{\frac{\sin x}{y}}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \frac{\arcsin(2^x - 2^y)}{\ln^2 \sqrt{\pi}} + \sqrt[3]{xy}$ ;  $y = \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \ln^3(x\sqrt{y} + y\sqrt{x}) - x$ ;  $x = t \sin t$ ;  $y = \frac{1}{\sqrt{t^3}}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \operatorname{arctg} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ;  $x = u \sin v$ ;  $y = \sqrt{u^2 - v^2}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \frac{1}{x + y^2}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\sqrt[3]{0,98} \cdot \sqrt{1,02}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = xe^{-2x^2 - y^2 - y}$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = 2 - x^2 + y^2$ ;  $y = x^2 - 4$ ;  $y = 1$ .
12. До поверхні  $z = 4xy$  провести дотичну площину, перпендикулярну до прямої  $\frac{x - 2}{9} = \frac{y - 1}{6} = \frac{z + 1}{-1}$ .

## Варіант № 12

1. Знайти область визначеності функції  $z = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-2}} + \ln(x^2 - y)$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $z = x^2 + y^2$ ;  $y = x^2$ ;  $y = 1$ ,  $z = 0$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = y^{\sqrt{x}} \cos^2 \frac{x}{y}$ ;  $z = \frac{1}{2xye^x}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \arcsin(x^2 + y)$ ;  $y = \frac{1}{x} + e^{\ln^2 x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \sqrt{1 + \frac{1}{\sin xy}} + 2^{x-y}$ ;  $x = \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{t}}$ ;  $y = 5^t$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = 2^{x \cos y} + \operatorname{tg} \sqrt{y}$ ;  $x = \operatorname{tg} \frac{u}{v}$ ;  $y = \frac{1}{u}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = 2x^2 - e^{xy}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $(2,003)^2 (3,002)^3$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = e^x (x^2 + y^2 - 4x - 1)$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2(x - y)$ ;  $y = 0$ ,  $y = x + 2$ ;  $x = 3$ .
12. До поверхні  $z = xy$  провести дотичну площину, перпендикулярну до прямої  $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{8} = \frac{z}{-1}$ .

# Варіант № 13

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt{x - y^2} + \frac{1}{\sin y}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $z^2 = xy; x = 0; x = 1; y = 0; y = 4$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \operatorname{tg} x e^{\frac{1}{xy}}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \frac{6}{\ln \sqrt{x + y}} 2^{xy}; z = \ln \sqrt{x + \ln y}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y), y = y(x): z = 5^{x^3 - yx^2} + y \cos^2 x; y = \ln^2 \frac{1}{x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y), x = x(t), y = y(t): z = 2^{\ln x + \operatorname{ctg} y} - \frac{1}{\operatorname{tg} xy}; x = \frac{1}{\ln t}; y = \sqrt{\operatorname{tg} t}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y): z = \sqrt{\ln(y + e^x)} - \frac{1}{y}; x = \cos u - \sin v; y = uv$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \frac{x^2}{\sin y}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\sqrt[3]{(1, 02)^2 + (0, 05)^2}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1; x = 0; y = 0; x + y + 3 = 0$ .
12. До поверхні  $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2$  провести дотичну площину, перпендикулярну до прямої  $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z - 3}{-1}$ .

# Варіант № 14

1. Знайти область визначеності функції  $z = \frac{1}{xy} + 2 \ln(x^2 - 4)$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + y^2 = 8x$ ;  $z = \frac{x^2 + y^2}{4}$ ;  $z = 0$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \frac{x^2 + y^2}{(y^2 - x)(x + y)}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \frac{1}{\sin(x - y^2)} + \arcsin \sqrt{x^2 + y^3}$ ;  
 $z = \ln \frac{x^2 + y^2 - 7}{xy}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = e^y - 11 \cos^2(x - y^3)$ ;  $y = \sin \sqrt{x} + \sqrt{\sin x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \sin \frac{x}{y} + 3^{\frac{y}{x}}$ ;  $x = \operatorname{ctg}^2 t$ ;  $y = \sqrt{t^2 + 1}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \frac{1}{\sqrt{x - y}} + \sin(x^2 y)$ ;  $x = \frac{u - 1}{v}$ ;  $y = v^2 + e^{uv}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = x \sqrt{\operatorname{tg}(x - y)}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\sqrt{(4, 04)^2 + (2, 94)^2}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = 3^{x^2 + y^2 - 2x + 1}$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ ;  $|x| + |y| \leq 1$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z = x^2 + y^2$  у точці  $M(1, 3, 10)$ .

# Варіант № 15

1. Знайти область визначеності функції  $z = \ln x + \ln \cos 2y$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + y^2 = 16$ ;  $x^2 + z^2 = 16$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \ln(1 - 4x^2 - 4y^2)$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = e^{\ln^2(x\sqrt{y})} + \frac{1}{2x + 2y}$ ;  $z = \sqrt{\cos^2 y \cdot x} + \sin \sqrt{x} \cdot y$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy} + \frac{1}{xy}$ ;  $y = 5^{\sin^2 x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \sqrt[3]{x^2 + y^5} + \frac{y}{\sin x}$ ;  $x = \ln^2 t$ ;  $y = \cos \frac{1}{t^2}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \frac{1}{e^{xy^2-1}} + x \cos y$ ;  $x = u\sqrt{v}$ ;  $y = \frac{u}{\sqrt{v}}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = y \cos x + \operatorname{tg}(xy)$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $(3, 02)^2 \cdot e^{0,03}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ ;  $2y = x - 4$ ;  $x = 0$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$  у точці  $M(-1, -2, 9)$ .

# Варіант № 16

1. Знайти область визначеності функції  $z = \arcsin \frac{x^2}{y} + \ln(-x - y + 1)$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^3 \sin \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \sqrt{x \ln \sin y + y^2}$ ;  $z = 2x^{\cos y}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \cos^2 \left( \frac{1}{x^2 + y^2} - 3 \right)$ ;  $y = \sqrt{\lg x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \operatorname{ctg} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \frac{y}{\cos x}$ ;  $x = \ln(2t + 2^t)$ ;  $y = \frac{1}{t^2}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = y \sin x + x \sin y$ ;  $x = \operatorname{tg} \frac{u}{v}$ ;  $y = \sqrt{u \ln v}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \ln(xy) \sin x$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\cos 29^\circ \cdot \operatorname{ctg} 46^\circ$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^2 y (8 - x - y)$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = y^2 - x^2 + 8$ ;  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  у точці  $M \left( 1, 1, \frac{\pi}{4} \right)$ .



# Варіант № 17

1. Знайти область визначеності функції  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{2x+y} \sqrt{\ln(1-x^2-y^2)}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ;  $z = 2$ ;  $x+z = 2$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{(x^2+y^2)e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \cos(x^2+y) \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{x+y}$ ;  $z = \frac{x}{\ln \frac{x}{y}}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = 2x^2 - xy + 2^{xy}$ ;  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \operatorname{arctg} \sqrt{2x^2 - y^2 - 1} + \frac{x}{3y}$ ;  $x = 3t^2$ ;  $y = \operatorname{ctg} \frac{1}{t}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \frac{1}{xy} + \sin \frac{1}{xy}$ ;  $x = \sin(u^2 + v^2)$ ;  $y = u \operatorname{tg} v$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \frac{x}{y \operatorname{tg} x}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = ye^{-2y^2-x^2-x}$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 + xy - 2$ ;  $y \leq 2x^2 - 2$ ;  $y \leq 0$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $4x^2 + 2y^2 - z = 1$  у точці  $M(1, 2, 11)$ .

# Варіант № 18

1. Знайти область визначеності функції  $z = \frac{1}{\ln(2-y)} + \sqrt{\frac{\cos 2x}{y}}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1; y = 0; z = \frac{x}{2}; z = x$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = (x + 3^{xy^2})^2; z = \sin^3 \left( \ln \frac{x^2 - 2xy}{y^2 + e^x} \right)$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y), y = y(x): z = \frac{x}{\arctg(xy^2)} + \frac{y}{x}; y = 2^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y), x = x(t), y = y(t): z = \sqrt{y - 2x^2} + \ln \frac{x}{y}; x = \operatorname{tg} 2t; y = \arcsin t + t^2$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y): z = \arctg \frac{1}{x-y} + \operatorname{tg} \frac{1}{x+y}; x = \frac{u}{v}; y = \frac{v}{u} - 1$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \frac{1}{xy} + \frac{1}{y} \cos x$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $(0,95)^{2,01}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = e^x (x^2 + y^2 + x)$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = y^2 - x^2 + 8; x^2 + y^2 \leq 4$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z = x \sin(x - y)$  у точці  $M(1, 1, 0)$ .

# Варіант № 19

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt{y \sin(x^2 + y^2)}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $y = 2 + x^2 + z^2; x^2 + z^2 = 9; y = 0$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = e^{\frac{1}{2x^2+9y^2-18}}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \frac{1}{e^{xy}} + \arctg \frac{\sqrt{x}}{y}; z = \sqrt{\pi} + \ln \frac{1}{x+5y} - \frac{1}{y+5x}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y), y = y(x): z = \sin x \cdot \cos(x^2 + 2y); y = x^2 \cdot \sin^2 x$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y), x = x(t), y = y(t): z = \sin \cos(x^2 - y^2); x = \left(\frac{1}{2}\right)^{t^2}; y = \ln(1+t)$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y): z = \sqrt{\cos \frac{x}{y} + \sin \frac{y}{x}}; x = \sqrt{uv} + v^2; y = u\sqrt{v^8}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \frac{x}{\ln y}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\frac{(1, 03)^3}{\sqrt[3]{0,97}}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = e^{x+y}(x^2 - 2y^2)$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = e^{x^2+y^2}; y = 1; x^2 + y^2 = 4$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$  у точці  $M(3, 4, 12)$ .

# Варіант №20

1. Знайти область визначеності функції  $z = \arccos \frac{x+5}{y} + \frac{1}{\sqrt[6]{y+1}}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $y^2 + z^2 = x^2$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \operatorname{tg} x e^{\frac{1}{xy}}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \frac{x-y}{x+y} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{y}}$ ;  $z = (x-y) \ln \frac{x^2}{y}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - y^3}} + \sin \frac{x}{y}$ ;  $y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \operatorname{arctg} \frac{x^3 - y}{xy} - \frac{1}{\sqrt{xy}}$ ;  $x = e^{\sqrt{t}}$ ;  $y = t^e$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \operatorname{ctg} \frac{1}{xy} + \operatorname{tg} \cos x$ ;  $x = e^{\frac{1}{u}}$ ;  $y = v \ln(u - v)$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\sqrt{\ln 1,03 + (1,04)^2}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = (x-1)^2 + (y+2)^2$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ ;  $x = 0$ ;  $x = 3$ ;  $y = 0$ ;  $y = 3$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z = y + \ln \frac{x}{y}$  у точці  $M(1, 1, 1)$ .

# Варіант №21

1. Знайти область визначеності функції  $z = \frac{1}{2^x - 2^y} + \arccos \frac{y+5}{x}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $z = 4 - y^2$ ;  $z = y^2 + 2$ ;  $x = -1$ ;  $x = 2$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \frac{x^2 + y^2}{\sin x \sin y}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \sin xy^2 + \frac{1}{2^{x+\sqrt{y}}}$ ;  $z = \arcsin \sqrt{x + \ln y}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \frac{2^\pi}{\ln \sin(x + y^2)} - x \operatorname{tg} y$ ;  $y = x \operatorname{ctg} \sqrt{x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = y^2 + 3x^2 \ln y$ ;  $x = \ln(2^t + 1)$ ;  $y = \cos \sqrt{t}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \sqrt[3]{x + 8xy}$ ;  $x = u \ln v$ ;  $y = u^2 + \frac{1}{v}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = (y - \sin \sqrt{x})^2$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $(2,003)^2 (3,004)^3$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^2 - 6y^2 + 12$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ;  $y = \sqrt{x}$ ;  $x = 1$ ;  $y = 0$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $3^{\frac{x}{z}} + 3^{\frac{y}{z}} = 18$  у точці  $M(2, 2, 1)$ .

# Варіант №22

1. Знайти область визначеності функції  $z = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} + e^{\frac{xy}{x-1}}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $y = \sqrt{x}$ ;  $y = 2\sqrt{x}$ ;  $z = 0$ ;  $x + z = 6$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \frac{\sin 2x + 1}{2^x - 2^y}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = 2^{\sqrt[3]{x-y}} + \sin \frac{x}{y}$ ;  $z = \arccos(6^{x^2y} - 12) - \frac{1}{x}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \sqrt{y} - \sqrt{x+y} + \arctg^2(xy)$ ;  $y = \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \frac{1}{\ln(e^x + y - 1)} - \cos y$ ;  $x = \sqrt{\lg t}$ ;  $y = \cos^2 \frac{1}{t}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \sqrt[3]{\ln \frac{x^2}{y}} - \frac{1}{\sin x}$ ;  $x = \frac{u}{\cos v}$ ;  $y = e^{\sin u}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \sin(y^2 + \sqrt{x}) - 10$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $(1,003)^{2,06}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = 5 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженої кривими.  $z = 3^{x^2+y^2}$ ;  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $y = 1$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z^3 - 3x^2yz = 1$  у точці  $M\left(1, \frac{7}{6}, 2\right)$ .

# Варіант №23

1. Знайти область визначеності функції  $z = (x + \sqrt{y}) \ln(x^2 - y^2)$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ;  $x^2 + y^2 = 1$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos xy}{x^2 y^2}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = x^{y^2}$ ;  $z = \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \ln^2 \sqrt{x^2 - y^2} + \frac{1}{x}$ ;  $y = \sin \frac{1}{x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \arcsin\left(\ln \frac{x}{\sqrt{y}}\right) + x^2 y$ ;  $x = \frac{t^3}{3}$ ;  $y = \operatorname{tg}^3 \frac{1}{t^3}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \operatorname{tg}(x \cos y) - 1$ ;  $x = \ln \frac{u}{v}$ ;  $y = u - \frac{1}{v}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = 2^{\ln(x-y)} + \cos^2 x$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\cos 61^\circ \cdot \sin 29^\circ$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 + y^2 + 1$ ;  $x \geq y$ ;  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
12. До поверхні  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$  провести дотичну площину, паралельну до площини  $2x - 6y + 3z - 10 = 0$ .

# Варіант №24

1. Знайти область визначеності функції  $z = \arcsin \frac{x}{y} + e^{\frac{1}{\sqrt{xy}}}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $y^2 + z^2 = x^2$ ;  $x^2 + y^2 = 9$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \frac{3x + y^2}{3x - y^2}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \frac{x}{3x^2 - y^2}$ ;  $z = \sin^{-5} \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} + xy^2$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \operatorname{arctg} \cos(2^x + 2^y)$ ;  $y = \sin^3 \sin x$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \operatorname{ctg}^2(1 - x \cdot 2^y) + \frac{\sqrt{x}}{y}$ ;  $x = e^t$ ;  $y = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{t}}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \frac{1}{e^{x^2 + \sqrt{\sin y}}}$ ;  $x = u\sqrt{v}$ ;  $y = \sqrt{u} \sin v$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = x \ln y - \sin \sqrt{xy}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $(1, 02)^{4,05}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^2 - 4y^2 + 8xy - 16$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ ;  $x = 0$ ;  $x = 3$ ;  $y = 0$ ;  $y = 3$ .
12. До поверхні  $z = 2x^2 - 4y^2$  провести дотичну площину, паралельну до площини  $4x - 4y - \frac{1}{2}z = 1$ .



# Варіант №25

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt[4]{\sin(x^2 + y^2)} + \ln 2y$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $4z = 4 - x^2$ ;  $z = 0$ ;  $y = 4$ ;  $4x + 3y = 12$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ y \rightarrow \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin 2x \sin 2y}{\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y - xy - \frac{\pi^2}{4}}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = (\operatorname{tg} x)^{\ln y}$ ;  $z = \left(2^{xy} + 3^{\frac{x}{y}} - 1\right)^3$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \sqrt[3]{x^2 + \frac{x}{y^3}} + y \sin x$ ;  $y = 6^{\ln^2 x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = x^2 + \sqrt{x} \ln y + \frac{\ln x}{\sqrt{y}}$ ;  $x = \frac{1}{\sin t}$ ;  $y = \cos 2\sqrt{t}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \operatorname{ctg} \frac{\sin x}{y} - x$ ;  $x = u^2v$ ;  $y = 1 + u$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \frac{1}{e^{xy}}$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $1,002 \cdot (2,003)^2$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = e^{x^2 + 2y^2 - 4y + 10x - 8}$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = y^2 \ln x$ ;  $x = 1$ ;  $x = 2$ ;  $x = y^2$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z = e^{y \cos 2x}$  у точці  $M\left(\frac{\pi}{2}, 1, \frac{1}{e}\right)$ .

# Варіант №26

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt{x+2} + \frac{1}{\log_2(x^2 + 4y^2 - 16)}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ;  $x^2 + y^2 = 6x$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \frac{1}{(x^2 + y^2 - 4)(x^2 - y^2 - 1)}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = (\ln y)^{\cos x}$ ;  $z = (6x^3y - y^36^{\sqrt{x}})^2$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \frac{1}{\cos(xy)} + e^{\frac{x^2}{y^2}}$ ;  $y = \ln^3 \sin x$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \sqrt{\ln\left(\frac{x}{e^y} + 1\right)}$ ;  $x = \sqrt{t}$ ;  $y = \sin^3 t$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = e^{x-2y^2} + \sin x$ ;  $x = \frac{u}{\ln v}$ ;  $y = \frac{1}{e^{uv}}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = x^2y - xy$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\ln [(0,99)^3 + (0,08)^3]$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = (x-6)^2 - 4y^3$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = 3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y$ ;  $x^2 + y^2 \leq 25$ .
12. На поверхні  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$  знайти точки, в яких дотичні площини паралельні до координатних площин.

# Варіант №27

1. Знайти область визначеності функції  $z = \arcsin \frac{2x}{x-y} + \ln x$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $z = x^2 - y^2$ ;  $z = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = -1$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \operatorname{tg} \cos \frac{x^2 - y^2}{x + 7}$ ;  $z = 2^{\sin \frac{y^2 - x}{y}}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \sqrt{\arcsin \frac{x}{y} + \frac{1}{x-y}}$ ;  $y = 5^x - 3^{\frac{1}{x}}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \frac{1}{\operatorname{tg}(xy)} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;  $x = e^{\sqrt{t}}$ ;  $y = \cos^2 \frac{1}{t^3}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \frac{2 - \ln y}{\sin x \cos y}$ ;  $x = uv$ ;  $y = \ln u$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \operatorname{tg}(x\sqrt{y}) - 1$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\frac{(1,001)^2}{\sqrt{0,98}}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^2 + xy - 4x + 8y$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ ;  $y = x^2$ ;  $y = 5$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $9x^2 + 4y^2 - z^2 = 36$  у точці  $M(2, 1, 1)$ .

# Варіант №28

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt{x \ln(x^2 + y^2 - 9)}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $z = x + y + 1; y^2 = x; x = 1; y = 0; z = 0$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = e^{\frac{x}{y}} + \ln(x + \cos x^2 y); z = \frac{1}{x^2 y} + \operatorname{arctg}(x + 2^y)$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y), y = y(x): z = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(x^3 - y)} + \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}); y = e^{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y), x = x(t), y = y(t): z = \sqrt{x^y + 1} - \frac{1}{x}; x = \cos \sin t; y = \frac{1}{2^t}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y): z = e^{\sqrt{x-y^2}} + \ln(y^2 \sqrt{x}); x = \sin \frac{u}{v}; y = u \cos v$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = \frac{x}{\sin y} + \cos y$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\sqrt{(2,01)^2 + 5 \cdot e^{0,02}}$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = x^2 + xy + y^2 + x + y - 1$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = \frac{x}{x^2 + y^2}; 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$ .
12. До поверхні  $2x^2 = z - 4y^2$  провести нормаль, перпендикулярну до площини  $8x - 32y - 2z + 3 = 0$ .

# Варіант №29

1. Знайти область визначеності функції  $z = \arcsin(x - y) + e^{\frac{2}{\sqrt{3-x}}}$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ .
3. Знайти границю  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = \frac{1}{xy} + y^2 \sqrt{x}$ ;  $z = \operatorname{ctg}^2(2^x \cdot 2^y) + \frac{1}{\sqrt{xy}}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = 3x + \sqrt[3]{x \cos y} - \frac{1}{y^2}$ ;  $y = \ln \frac{x^2}{1+x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = y \sin x + x \cos y$ ;  $x = \ln \left(1 - \frac{1}{t}\right)$ ;  $y = 7^{t+\sqrt{t}}$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = \arcsin \sqrt{x^3 y - 1}$ ;  $x = u^v$ ;  $y = \frac{1}{u - v}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = y \sin x - x \operatorname{tg} y$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $e^{0,01} \cdot (2,01)^2$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = \sqrt{2x^2 + y^2 - 4}$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 \ln y$ ;  $y = 4x^2$ ;  $y = 2$ ;  $y = 3$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z = x \sin(x - y)$  у точці  $M(1, 1, 0)$ .

# Варіант №30

1. Знайти область визначеності функції  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln xy$ .
2. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $z = x^2 + y^2$ ;  $z^2 = x^2 + y^2$ .
3. Дослідити функцію на неперервність  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ .
4. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від вказаних функцій:  $z = x^{xy}$ ;  $z = 8 \sin^2 \frac{xy}{8} + \frac{1}{\arctg \frac{x}{y}}$ .
5. Знайти повну похідну  $\frac{dz}{dx}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(x)$ :  $z = \operatorname{tg}(x^2 - y^3) + 2^{\ln y}$ ;  $y = \sqrt{\sin \cos x}$ .
6. Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = \sin y \cos(y - 2^x)$ ;  $x = \sqrt{2t - 1}$ ;  $y = \ln \sin t$ .
7. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , де  $z = z(x, y)$ :  $z = x^y$ ;  $x = u - v^2$ ;  $y = \sqrt{uv}$ .
8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції  $z = e^{y^2} \cos(x + y)$ .
9. Обчислити наближено за допомогою диференціала:  $\ln \left( 0,01 + \sqrt{(0,01)^2 + (1,02)^2} \right)$ .
10. Дослідити на екстремум функцію  $z = \sqrt{9y^2 + 4x^2 - 36}$ .
11. Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими.  $z = x^2 - y^2 + 4$ ;  $y = 4 - x^2$ ;  $y = -2$ .
12. Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні:  $z^2 + xy^3 = 0$  у точці  $M(-1, 1, 1)$ .