# ЛЕКЦІЯ 2

## Тема: ЛОГІЧНІ ОСНОВИ ПОБУДОВИ ЕЛЕМЕНТІВ

## ПЛАН

2.1 Алгебра логіки (АЛ)
2.2 Основні закони алгебри логіки
2.3 Теорема Шенона
2.4 Мінімізація булевих функцій

**Час:** 2 год.

**Література:** [1,2].

### 2.1 Алгебра логіки (АЛ)

**Алгебра логіки** (**АЛ**) є теоретичною основою комп'ютерної схемотехніки. Це наука, яка використовує математичні методи для розв’язання логічних задач. Алгебру логіки називають булевою на честь англійського математика Дж. Буля. Основним предметом булевої алгебри є висловлювання.

**Висловлюванням** називається просте твердження, про яке можна стверджувати: істинне воно або хибне. Зазвичай прості висловлювання в АЛ позначаються буквами будь-якого алфавіту: *A,BC,...,X,Y,Z*. Істинність або хибність висловів називають **значеннями істинності**. В **АЛ** прийнято позначати істинність висловлювання числом *1*, а хибність – числом *0*. Приклад. Нехай $A$=1, $B$=0. Значить, $A$ – істинне, $B$ – хибне.

Змінну із скінченним числом значень (станів) називають **перемикальною**, а з двома значеннями – булевою. Функція, яка має як і кожна її змінна скінчене число значень, називається перемикальною (логічною). Логічна функція, число можливих значень якої і кожної її незалежної змінної дорівнює двом, є булевою. Таким чином, булева функція – це є окремий випадок перемикальної.

**Операція** – це чітко визначена дія над одним або декількома операндами, яка створює новий об’єкт (результат).

Основними булевими операціями є заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, які можна задати за допомогою таблиць істинності.

Способи завдання логічних функцій:

1. Таблиця істинності.
2. Порядковий номер, який має ця функція.
3. Аналітично (у вигляді формули).

**Таблиця істинності –** таблиця, в якій кожну інтерпретацію логічної функції поставлено у відповідність її значення.

Форма таблиці істинності на рис. 2.1.

| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ | $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *0* | *0* |
| *1* | *0* | *0* | *0* | ... |
| *0* | *1* | *0* | *0* | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| *1* | *1* | *1* | *1* | *1* |

Рис. 2.1

Таблиця 2.1 – Логічні функції $\varphi(x)$, які залежать від однієї змінної

| $x$ | $\varphi_0$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ |
|---|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *1* | *0* | *1* |

$\varphi_0 = 0$ – функція константи 0;
$\varphi_1 = x$ – функція повторення змінної;
$\varphi_2 = \bar{x}$ - функція інверсії або заперечення змінної;
$\varphi_3 = 1$- функція константи 1.

Таблиця 2.2 – Логічні функції $f(x,y)$

| $x$ | $y$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* |
| *0* | *1* | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *0* | *0* | *1* | *1* | *0* | *0* | *1* | *1* | *0* | *0* | *1* | *1* |
| *1* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* |

Таблиця 2.3 – Назви логічних функцій $f(x,y)$

| *Функція* | *Позначення* | *Назва* | *Прочитання* |
|---|---|---|---|
| $f_0(x,y)$ | *0* | ***константа 0*** | *константа 0* |
| $f_1(x,y)$ | $x\&y=x\wedge y=x\bullet y$ | ***кон'юнкція (логічне «І»)*** | *x і y* |
| $f_2(x,y)$ | $x\Delta y$ | ***заборона або заперечення імплікації*** | *x і не y* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f_3(x,y)$ | $x$ | ***повторення першого аргументу*** | *як x* |
| $f_4(x,y)$ | $y\Delta x$ | ***заборона або заперечення оберненої імплікації*** | *y і не x* |
| $f_5(x,y)$ | $y$ | ***повторення другого елементу*** | *як y* |
| $f_6(x,y)$ | $x®y$ | ***що виключає «або» (сума за модулем 2)*** | *x не як y* |
| $f_8(x,y)$ | $x\downarrow y$ | ***стрілка Пірса (заперечення диз'юнкції)*** | *не x і не y* |
| $f_9(x,y)$ | $x\sim y$ | ***еквівалентність*** | *x як y* |
| $f_{10}(x,y)$ | $\bar{y}$ | ***заперечення другого елемента*** | *не y* |
| $f_{11}(x,y)$ | $y\to x$ | ***обернена імплікація*** | *x, якщо y (x або не y)* |
| $f_{12}(x,y)$ | $\bar{x}$ | ***заперечення першого елементу*** | *не x* |
| $f_{13}(x,y)$ | $x\to y$ | ***імплікація*** | *якщо x, то y ( не x або y)* |
| $f_{14}(x,y)$ | $x \mid y$ | ***функція Шеффера (заперечення кон'юнкції)*** | *не x або не y* |
| $f_{15}(x,y)$ | 1 | ***константа 1*** | *константа 1* |

При завданні логічної функції **порядковим номером** кожній функції привласнюють порядковий номер у вигляді натурального числа, двійковий код якого зображує стовпчик значень функції у таблиці істинності. Вказаний порядковий номер функції, як двійковий, так і десятковий, повністю визначає логічну функцію.

**Приклад 2.1.** Знайти порядковий номер функції $f(x,y)$, що приймає такі значення: $f(0, 0)=1, f(0, 1)=1, f(1, 0)=0, f(1, 1)=1$.

*Розв'язання.* Будуємо таблицю істинності для заданої функції $f(x,y)$, табл. 2.4.

Таблиця 2.4

| $x$ | $y$ | $f(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Як випливає з таблиці 2.4, двійковий код, що відповідає значенням функцій, дорівнює 1101. Перевівши двійкове число $1101_2$ у десяткову систему числення, отримаємо:

$$11010_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$$

Таким чином, цьому числу відповідає розглянута функція імплікації:

$$f_{13}(x, y) = x \to y(\textit{таблиця}2.3)$$

Логічні функції можуть бути задані аналітично, тобто формулами. Якщо у формулі відсутні дужки, то операції необхідно виконувати у такій послідовності:

1. Заперечення < $^-$ ;
2. Кон’юнкція ^;
3. Диз’юнкція v;
4. Імплікація →;
5. Еквівалентність ~>.

**Приклад 2.2.** У заданій логічній функції $f(x,y,z)=x\sim y\to z\vee\bar{x}$ розставити дужки.

*Розв’язок*. Враховуючи пріоритет виконання логічних функцій розставимо дужки для заданої функції:

$$f(x,y,z)=x\sim(y\to(z \vee \bar{x}))$$

**2.2 Основні закони алгебри логіки**

1. Комутативність кон’юнкції та диз’юнкції

$$x \cdot y = y \cdot x;$$
$$x \vee y = y \vee x.$$

2. Асоціативність кон’юнкції та диз’юнкції

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z.$$

3. Дистрибутивність кон’юнкції та диз’юнкції відносно одна одної

$$x \bullet (y \vee z) = (x \bullet y) \vee (x \bullet z);$$
$$x \vee (y \bullet z) = (x \vee y) \bullet (x \vee z).$$

4. Ідемпотентність кон'юнкції та диз'юнкції

$$x \bullet x)=x;$$
$$x \vee x=x.$$

5. Закон виключеного третього

$$x \vee \bar{x}=1$$

6. Закон протиріччя

$$x \bullet \bar{x}=0$$

7. Закон тотожності з константами

$$x \bullet 0=0; \; x \bullet 1=x;$$
$$x \vee 0=x; \; x \vee 1=1.$$

8. Закон елімінації

$$x \bullet (x \vee y)=x;$$
$$x \vee (x \bullet y)=x$$

9. Закон подвійного заперечення

$$\bar{\bar{x}} = x$$

10. Закон де Моргана

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y};$$
$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

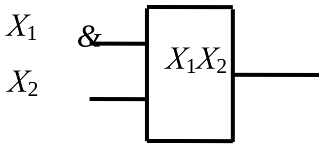
Схему, яка здійснює елементарну логічну операцію, називають ***логічним елементом***.

Сукупність взаємозалежних елементів з формальними методами описання називається **логічною схемою**.

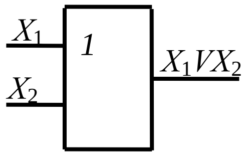
Для реалізації однієї і тієї ж логічної функції існує велика кількість різних електронних схем. З метою спрощення документації були введені символи, так звані логічні елементи, які позначають тільки логічну функцію і не розкривають внутрішню будову схеми.

Назви і умовні графічні позначення основних логічних функцій, які застосовуються в комп'ютерній схемотехніці наведені нижче:

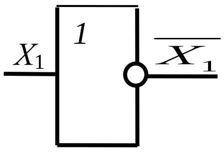
Операція кон'юнкція реалізується логічним елементом «**І**»




Операція диз'юнкція реалізується логічним елементом **«АБО»**

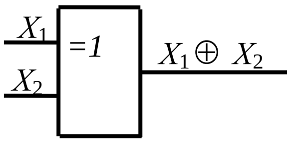



Операція заперечення реалізується логічним елементом **«НІ»**

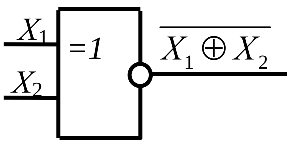



Операція заперечення еквівалентністі реалізується логічним елементом

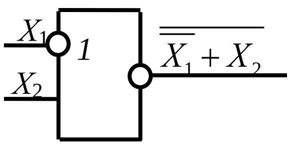
**«Виключальне АБО»**



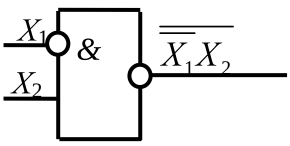

Операція еквівалентность реалізується логічним елементом




Операція імплікація реалізується логічним елементом




Операція заборона реалізується логічним елементом



Рядом з однофункціональними елементами (І, АБО, НІ), широко використовуються двофункціональні (АБО-НІ, І-НІ)


Будь-яку логічну функцію можна реалізувати на логічних елементах. Наприклад $Y=\overline{X_1}X_2V\overline{X_1+X_2}$

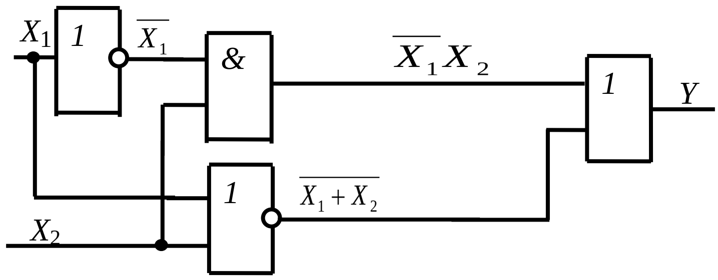



*Рис. 2.1. Схема для реалізації логічної функції* $Y=\overline{X_1}X_2V\overline{X_1+X_2}$.

Приклад. Необхідно скласти схему, на виході якої при *B>A*, де *A* і *B* є однозначними двійковими цифрами, встановлюється логічна одиниця 1. Складаємо табл. 2.7.

Таблиця 2.7

| *A* | *B* | *Y* |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

З таблиці маємо, що *Y=1* при виконанні тільки однієї умови, коли *A=0* і *B=1*. Логічна функція записується у вигляді $Y=\overline{A}\wedge B$. Вона реалізується на таких логічних елементах:

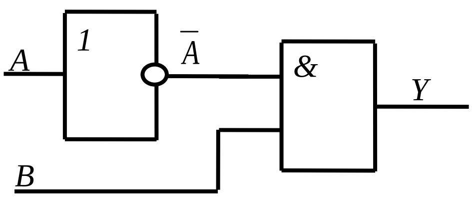



*Рис. 2.3. Схема для реалізації логічної функції* $Y=\overline{A}\wedge B$.

## 2.3 Теорема Шеннона

Широке використання під час перетворення логічних функцій знаходять теорема Шеннона та ряд тотожностей, які випливають з неї.

Теорема Шеннона формулюється у такий спосіб: будь-яку функцію *n* змінних можна записати у вигляді:

$$F\left(X_{n-1},...,X_i,...,X_0\right)=\overline{X_i}\cdot F\left(X_{n-1},...,0,...,X_0\right)+X_i\cdot F\left(X_{n-1},...,1,...,X_0\right)$$

(2.4)

Теорема Шеннона виявляється дуже корисною при виконанні перетворень логічних виразів, що містять операцію виключальне АБО.

Приклад. Виконати перетворення логічної функції:

$$Y=X_2X_1\oplus\left(X_3+\overline{X_1}\right)\otimes X_3X_1$$

*Розв'язання.* Використовуючи теорему Шеннона, виконуємо такі перетворення:

$$X_2X_1\oplus(X_3+\overline{X_1})\oplus X_3X_1=\overline{X_1}\left[X_2\cdot 0\oplus(X_3+\bar{0})\oplus(X_3\cdot 0)\right]+X_1\left[X_2\cdot 1\oplus(X_3+\bar{1})\oplus(X_3\cdot 1)\right]=$$
$$=\overline{X_1}\left[0\oplus 1\oplus 1\right]+X_1\left[X_2\oplus X_3\oplus X_3\right]=\overline{X_1}+X_1\cdot\overline{X_2}=\overline{X_1}+\overline{X_2}$$

З теоремою Шеннона (2.4) пов'язані тотожності:

$$\begin{aligned}&\overline{X_i}\cdot F\left(X_{n-1},...,X_i,...,X_0\right)=\overline{X_i}\cdot F\left(X_{n-1},...,0,...,X_0\right);\\&X_i\cdot F\left(X_{n-1},...,X_i,...,X_0\right)=X_i\cdot F\left(X_{n-1},...,1,...,X_0\right).\end{aligned}\quad(2.5)$$

Виходячи з теореми де Моргана, тотожностям (1.9) відповідають такі тотожності:

$$\begin{aligned}&\overline{X_i}+F\left(X_{n-1},...,X_i,...,X_0\right)=\overline{X_i}+F\left(X_{n-1},...,1,...,X_0\right);\\&X_i+F\left(X_{n-1},...,X_i,...,X_0\right)=X_i+F\left(X_{n-1},...,0,...,X_0\right).\end{aligned}\quad(2.6)$$

Тотожності (2.5) і (2.6) широко використовуються для спрощення логічних виразів. З них випливають формули:

$$X+X\cdot Y=X+0\cdot Y=X;$$
$$X+\overline{X}\cdot Y=X+\bar{0}\cdot Y=X+Y.$$

Наведені тотожності дозволяють суттєво спрощувати складні функції багатьох змінних, особливо за наявності заперечень.

Приклад. Спростити логічну функцію:

$$F\left(X_1,X_2,X_3\right)=\overline{\overline{X_2\overline{X_1}\oplus X_3\cdot\overline{X_2}}\oplus X_1+\overline{X_2}}\cdot X_1.$$

*Розв'язання.* Використовуючи тотожність (1.8) відносно $\overline{X_2}$, маємо:

$$\overline{\overline{0\cdot\overline{\overline{X_1}}\oplus X_3\cdot\overline{0}}\oplus X_1+X_3\cdot\overline{0}}\cdot\overline{X_1}=\overline{\overline{\overline{X_3}}\oplus X_1+X_3}\cdot\overline{X_2}.$$

З тотожності (1.9) знаходимо:

$\overline{X_3}\oplus X_1+X_3=X_3+\overline{0}\oplus X_1=X_3+\overline{X_1}$

У результаті визначаємо:

$\overline{X_3+\overline{\overline{X_1}}}\cdot\overline{X_2}=\overline{X_3}\cdot\overline{X_2}\cdot X_1.$

Подані вище тотожності використовуються для того, щоб розкладати складні логічні функції на більш прості.

### 2.4 Логіка мінімізації булевих функцій

Мінімізація (спрощення форми запису) функції є важливою операцією при синтезі логічної схеми, так як завдяки попередньо проведеній мінімізації схема реалізується з найменшим числом елементів.

Метою мінімізації є зменшення вартості технічної реалізації логічних функцій незалежно від використовуваних апаратних засобів.

Виявити і виділити надлишковість в записі функції можливо шляхом перетворень з використанням аксіом, законів, тотожностей та теорем алгебри логіки. Однак такі перетворення потребують громіздких викладок і пов’язані з великою витратою часу.

Логічні функції апаратно реалізуються за допомогою мікросхем, орієнтованих на виконання тих чи інших операцій. Мікросхеми загального використання у більшості випадків можуть реалізовувати кілька простих одиночних операцій.

Тому справедливо стверджувати, що, чим простіше аналітична форма запису логічної функції, тим менше використовується логічних елементів і, як результат, тим менше мікросхем необхідно для її реалізації. Складність логічних функцій визначається кількістю логічних змінних, які входять до їхнього складу в прямому й інверсному вигляді, та кількістю простих логічних операцій над ними.

Будь-яка логічна функція може записуватися різними аналітичними виразами різного рівня складності. Серед них є такі, які містять мінімальну кількість логічних змінних і операцій над ними. Задача знаходження таких аналітичних виразів називається *мінімізацією логічних функцій.*

Для мінімізації функції з числом змінних до п’яти-шести найбільш зручними є два методи: метод Квайна і метод карт Карно.

Задача мінімізації – це задача неоднозначна, і розв'язуючи її різними способами, можна отримати різні вирази мінімізованої функції, які відрізнятимуться між собою кількістю змінних і операцій над ними.

**Аналітичний спосіб мінімізації.** Для зменшення складності логічних функцій найчастіше використовують операції склеювання:

$$X_1X_2+X_1\overline{X_2}=X_1\left(X_2+\overline{X_2}\right)=X_1;$$

$$\left(X_1+X_2\right)\left(X_1+\overline{X_2}\right)=X_1$$

та поглинання:

$$X_1 + X_1X_2 = X_1\left(1 + X_2\right) = X_1;$$

$$X_1\left(X_1 + X_2\right) = X_1.$$

Як приклад розглянемо процедуру спрощення такої функції:

$$Y = X_1X_2X_3 + \overline{X_1}X_2X_3 + \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3 + \overline{X_1}\,\overline{X_2}\,\overline{X_3} + \overline{X_1}X_2\overline{X_3} =$$

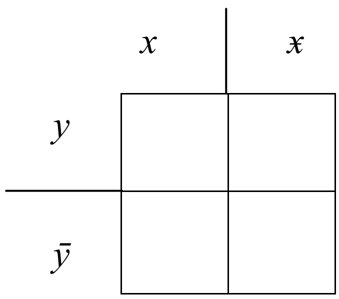
$$= X_1X_2X_3 + \left(\overline{X_1}X_2 + \overline{X_1}\,\overline{X_2}\right)\left(X_3 + \overline{X_3}\right) = X_1X_2X_3 + \overline{X_1}X_2 + \overline{X_1}\,\overline{X_2} =$$

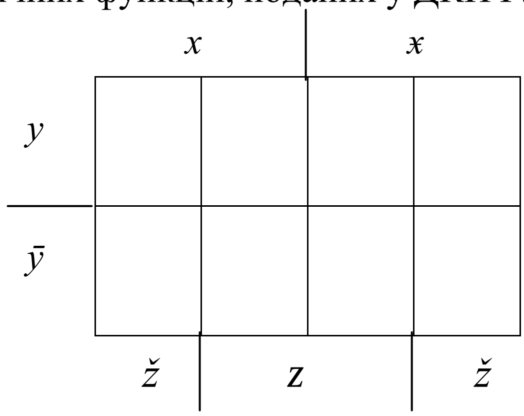
$$= X_1X_2X_3 + \overline{X_1}\left(X_2 + \overline{X_2}\right) = X_1X_2X_3 + \overline{X_1}.$$

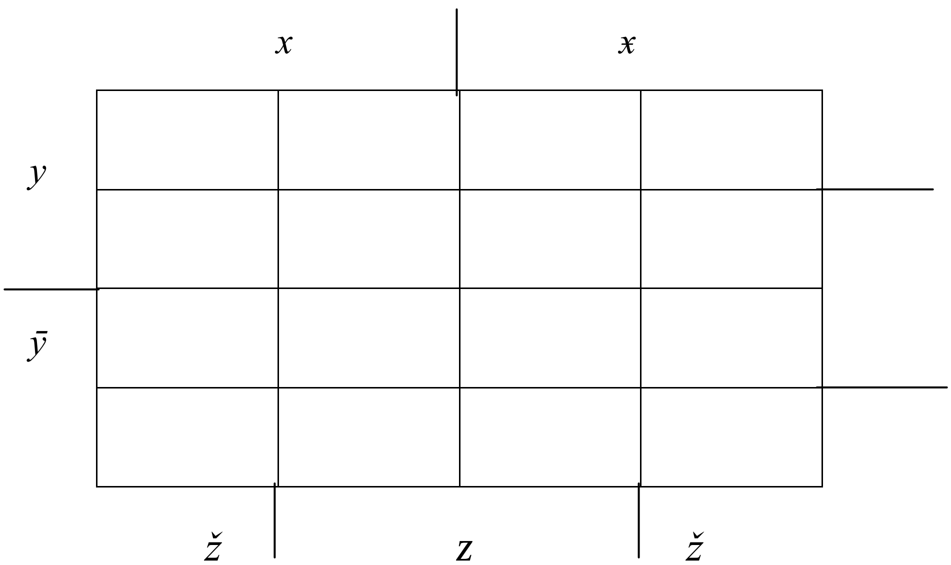
Одержана функція має мінімальну складність.

## Метод Вейча

Мінімізацію логічних функцій методом Вейча застосовують для функцій $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, які містять, як правило, **не більше чотирьох змінних** і повинні бути задані в аналітичній формі. У методі Вейча для мінімізації використовують таблиці, які являють собою прямокутник, що вміщує $n$-клітинок, до яких заносять одиниці при мінімізації у ДДНФ або нулі, у випадку мінімізації логічних функцій, поданих у ДКНФ.



На рис. 2.4 показана структура таблиці Вейча для трьох змінних.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x \bullet y \bullet \bar{z}$ | $x \bullet y \bullet z$ | $\bar{x} \bullet y \bullet z$ | $\bar{x} \bullet y \bullet \bar{z}$ |
| $x \bullet \bar{y} \bullet \bar{z}$ | $x \bullet \bar{y} \bullet z$ | $\bar{x} \bullet \bar{y} \bullet z$ | $\bar{x} \bullet \bar{y} \bullet \bar{z}$ |

*Рис. 2.4.*

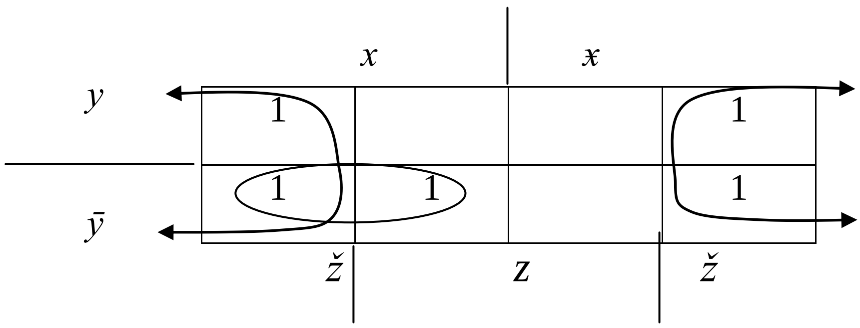
Правила склеювання клітинок у таблиці Вейча:

1. Клітинки об'єднуються у групи, що позначають операції склеювання. В об'єднанні беруть участь тільки ті сусідні клітинки, в яких містяться одиниці.
2. В групу дозволяється об'єднувати кількість клітинок $2^n$, n=1,2,3… При цьому група може мати лише прямокутну або квадратну форму.
3. При склеюванні необхідно знайти набір максимальних груп клітинок. Під максимально групою розуміють групу, яка не входить цілком у жодну іншу групу і відповідає простій імпліканті функції. Кількість груп у такому наборі повинна бути мінімальною, оскільки така група відповідає мінімальній тупиковій ДНФ. Кожна одиниця таблиці Вейча повинна входити хоча б до однієї групи, що забезпечує покриття функції отриманим набором імплікант.
4. Кожна група клітинок, що отримана після склеювання, відповідає тій імпліканті функції, реальні змінні якої мають однакове значення для всіх клітинок групи.
5. Диз'юнкція всіх отриманих простих імплікант зображує результат мінімізації формули і є мінімальною ДНФ.

**Приклад.** Знайти МДНФ логічної функції

$$f(x,y,z) = x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$$

*Розв'язання*. Будуємо таблицю Вейча.



Виконуємо склеювання клітинок таблиці. При склеюванні необхідно об’єднати чотири клітинки, де містяться чотири одиниці, що перебувають у двох клітинках першого і останнього стовпчиків, які накриваються змінною ž, а одиниця, яка залишилися у другому стовпчику, склеюється з одиницею першого стовпчика нижнього рядка таблиці. У результаті чого отримуємо логічну функцію

$$f(x, y, z) = \overline{z} + x \cdot \overline{y}$$

### *Метод карт Карно*

**Карти Карно** є графічним представленням таблиць станів.

Карта Карно являє собою прямокутник, поділений на чотирикутники, кількість яких дорівнює загальному числу наборів для даної функції *n* змінних, тобто воно дорівнює $2^n$. Кожен чотирикутник відповідає певному набору, або терму, при чому набори розташовуються таким чином, щоб сусідні набори або терми, як по горизонталі, так і по вертикалі, відрізнялися тільки значенням однієї змінної: в одному чотирикутнику вона з інверсією, а в іншому, сусідньому – без.

| X1 → <br> X2 ↓ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Умова *X1=0, X2=0* відповідає верхній лівій комірці, а *X1=1, X2=1* – правій нижній.

Для трьох вхідних змінних карта Карно має вигляд:

| X2X1 → <br> X3 ↓ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |

При переході від однієї комірки до сусідньої змінюється лише одна зміна (00,01,11,10).

Для чотирьох вхідних змінних карта Карно має вигляд:

X2X1

00 0111 10

X4X3

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | | | |
| 11 | | | | |
| 10 | | | | |

**Приклад**

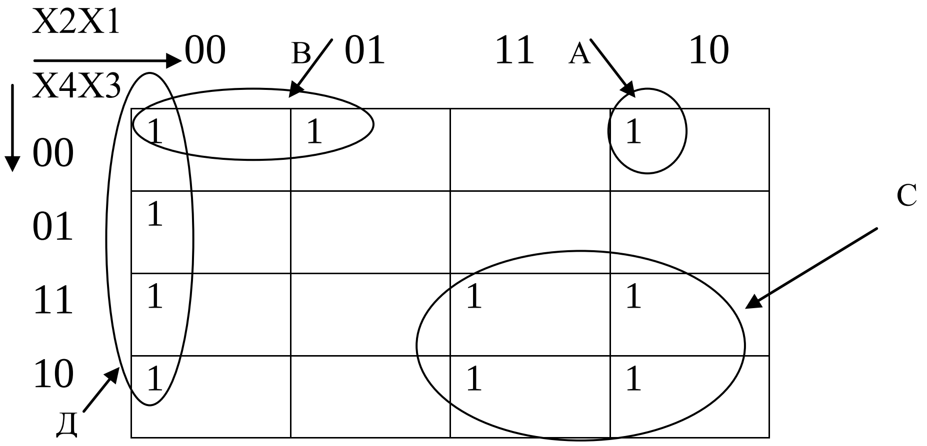
Дана таблиця станів 3 мінімізувати робочу функцію методом карт Карно.

Таблиця 3 – Таблиця станів

| X1 | X2 | X3 | X4 | У |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Рішення**

1. Складаємо карту Карно для таблиці 1.3




2. Об'єднуємо одиниці у групи.
3. Складаємо логічні вирази всіх вхідних параметрів для кожної комірки, в якій стоїть 1. У групі В для комірки у верхньому лівому куті маємо кон'юнкцію:

$$\kappa_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

Для комірки, розташованої правіше, маємо:

$$\kappa_2 = \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

В логічній сумі вираз перетворимо у вигляд:

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

Звідси маємо правило: якщо у двох, чотирьох, восьми тощо комірках, обмежених контуром, стоять лише одиниці, можна безпосередньо записувати логічну кон'юнкцію для всієї групи. В дану кон'юнкцію входять лише ті змінні, які залишаються незмінними для всіх комірок даної групи.

Для групи В:

$$\kappa_B = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

В одну групу також зв'язують ті комірки, які знаходяться у лівому і правому краях строчки або у верхній і нижній частинах стовпця. Для стовпця Д, що складається з чотирьох комірок маємо:

$$\kappa_{Д} = \bar{x}_1\bar{x}_2$$

У випадку контура С:

$$\kappa_C = x_1 x_3$$

Якщо одна одиниця залишилася у правому верхньому кутку, вона може бути пов'язана, наприклад, з одиницею у нижній частині цього ж стовпця у групу $К_A$, що містить дві комірки. Друга можливість міститься в об'єднані одиниць, що знаходяться у лівому і правому краях першої строчки. Якщо прийняти до уваги, що одиниці є у всіх кутках таблиці, тоді об'єднуючи їх у чотириелементну групу, отримаємо:

$$\kappa_A = \bar{x}_2\bar{x}_4$$

В результаті відразу знаходимо ДНФ і разом з нею визначаємо максимально простий вигляд:

$$y = \kappa_A + \kappa_B + \kappa_{Д} + \kappa_C = \bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1 x_5 + \bar{x}_1\bar{x}_2$$

**Повний процес спрощення**

Алгоритм дій, яким слід керуватися при спрощенні булевих виразів.

*Етап 1*. Побудувати карту Карно і помістите одиниці в ті комірки, які відповідають одиницям в таблиці істинності. Решту всіх комірок заповнити нулями.

*Етап 2*. Проаналізувати карту, знайти області прилеглих одиниць і виділити ті одиниці, які *не* прилягають до інших одиниць. Вони називаються ізольованими одиницями.

*Етап 3.* Знайти одиниці, які прилягають тільки до ще однієї одиниці. Згрупувати в пари дві будь-які прилеглі одиниці.

*Етап 4.* Згрупувати всі октети, навіть якщо вони містять одиниці, які вже були згруповані.

*Етап 5.* Згрупувати всі квартети, що містять одну або декілька одиниць, які ще не були згруповані. При цьому переконайтеся, що використовується мінімальна кількість груп.

*Етап 6*. Згрупувати будь-які пари, які необхідні, щоб включити ті одиниці, які ще не були згруповані. Переконайтеся, що використовується мінімальна кількість груп.

*Етап 7.* Підсумувати всі члени, що описанняються кожною групою.

Ці етапи повинні виконуватися в тій послідовності, в якій вони тут наведені. Використовуйте їх при обробці карт Карно. В кожному випадку отриманий логічний вираз матиме просту диз'юнктивну форму.

### *Метод Квайна*

Метод отримання скороченої диз’юктивної нормальної форми логічної функції називається ***методом Квайна***.

Задача мінімізації за методом Квайна міститься у парному порівнянні імплікант, що входять до СНДФ, з метою виявлення можливості поглинання будь-якої змінної:

$$Fxi \;\; Fxi = F$$

**Теорема Квайна.** *Якщо в удосконаленій диз’юнктивній нормальній формі логічної функції провести всі операції неповного склеювання і потім всі операції поглинання, тоді в результаті отримується скорочена диз’юнктивна нормальна форма цієї функції, тобто диз’юнкція всіх її простих імплікант.*

Для знаходження логічної функції за таблицею істинності використовують метод Квайна. Цей метод представлено у вигляді послідовності таких дій:

1. У таблиці істинності виділяють рядки, в яких вихідна змінна має значення *1*.
2. Для кожного рядка, де $Y=1$ складають кон'юнкцію всіх вхідних змінних цього рядка, причому записують співмножник $X_i$, якщо змінна приймає значення *1*, інакше записують $\overline{X_i}$. Таким чином, встановлюється стільки складових функції, скільки є рядків з $Y=1$.
3. Далі записують логічну суму всіх знайдених складових кон'юнкції , яка представляє шукану функцію.

**Приклад 1**Скласти комбінаційну схему для наступної умови. Є два вимикача. При включені одного з них загорається лампа (світлодіод). Скласти таблицю роботи.

***Рішення:***

1. Складаємо таблицю 1 роботи:

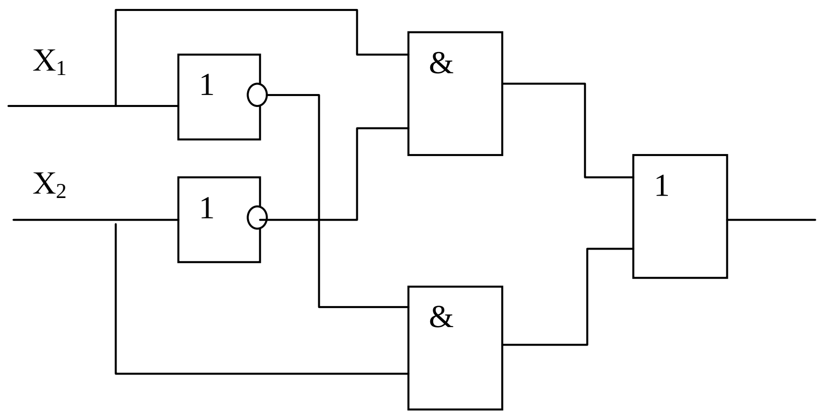
Таблиця 1 – Таблиця роботи схеми

| $X_1$ | $X_2$ | У |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

2. У відповідності з таблицею 1 знайдемо функцію:

$$У = \overline{X}_1 X_2 + X_1 \overline{X}_2$$

3. Комбінаційна схема має вигляд:




**Приклад 2** Скласти комбінаційну схему для наступної таблиці станів:

Таблиця 2 – Таблиця станів

| Строчка | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | У |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 0 |

***Рішення:***

Для третього рядка кон’юнкція: $К_3 = \overline{X}_1 X_2 \overline{X}_3$

Для п’ятого рядка кон’юнкція: $К_5 = X_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3$

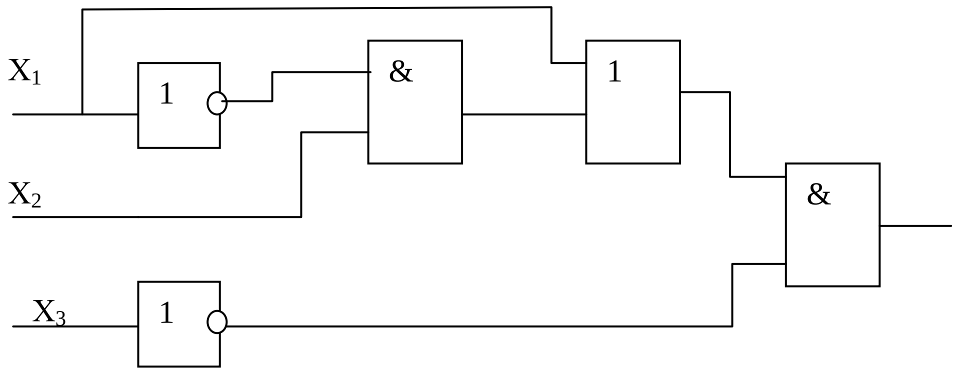
Для сьомого рядка кон'юнкція: $K_7 = X_1 X_2 \overline{X}_3$

Вихідна функція:

$$У = K_3 + K_5 + K_7 = \overline{X}_1 X_2 \overline{X}_3 + X_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3 + X_1 X_2 \overline{X}_3$$

Використовуючи закони Булевої алгебри, отримуємо:

$$У = \left[\overline{X}_1 X_2 + X_1\left(\overline{X}_2 + X_2\right)\right]\overline{X}_3 = \left(\overline{X}_1 X_2 + X_1\right)\overline{X}_3$$




**Контрольні запитання**

1. Дати визначення терміну алгебра логіки (булева алгебра.
2. Наведіть відомі способи запису логічних функції.
3. 10. Умовні графічні позначення основних логічних елементів.
4. Основні положення двійкової алгебри.
5. Які логічні операції використовуються для аналітичного способу мінімізації логічних функцій?
6. Поясніть суть мінімізації булевих функцій методом Квайна.
7. Поясніть властивості карти Карно.
8. У чому полягає особливість мінімізації логічних функцій методом карт Карно?