Розв'язання задач на рівняння прямої на площині

Задача 1

Знайти точки перетину прямої $2x - 3y - 12 = 0$ з координатними осями і побудувати цю пряму на кресленні.

Розв'язання

Для визначення точок перетину послідовно підставимо до рівняння прямої

1. $x = 0$:

$$2 \cdot 0 - 3y - 12 = 0$$

Розв'язання

Для визначення точок перетину послідовно підставимо до рівняння прямої

1. $x = 0$:

$$2 \cdot 0 - 3y - 12 = 0 \Rightarrow -3y = 12$$

Розв'язання

Для визначення точок перетину послідовно підставимо до рівняння прямої

1. $x = 0$:
$$2 \cdot 0 - 3y - 12 = 0 \Rightarrow -3y = 12 \Rightarrow y = -4.$$

2. $y = 0$:
$$2x - 3 \cdot 0 - 12 = 0$$

Розв'язання

Для визначення точок перетину послідовно підставимо до рівняння прямої

1. $x = 0$:
$$2 \cdot 0 - 3y - 12 = 0 \Rightarrow -3y = 12 \Rightarrow y = -4.$$
2. $y = 0$:
$$2x - 3 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow 2x = 12$$

Розв'язання

Для визначення точок перетину послідовно підставимо до рівняння прямої

1. $x = 0$:
$$2 \cdot 0 - 3y - 12 = 0 \Rightarrow -3y = 12 \Rightarrow y = -4.$$

2. $y = 0$:
$$2x - 3 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6.$$

Розв'язання

Для визначення точок перетину послідовно підставимо до рівняння прямої

1. $x = 0$:
$$2 \cdot 0 - 3y - 12 = 0 \Rightarrow -3y = 12 \Rightarrow y = -4.$$

2. $y = 0$:
$$2x - 3 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6.$$

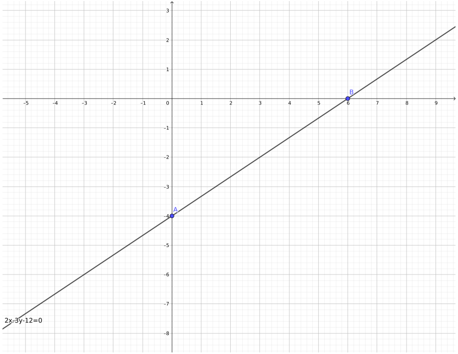
Отже, точками перетину з осями є $A(0; -4)$ та $B(6; 0)$.

Розв'язання

Креслимо спочатку точки перетину з осями, потім проводимо крізь них пряму.

Розв'язання

Креслимо спочатку точки перетину з осями, потім проводимо крізь них пряму.



Задача 2

Сторони AB, BC та AC трикутника ABC задано, відповідно, рівняннями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Визначити координати його вершин.

Розв'язання

Сторони AB та AC перетинаються у точці $A(x_A; y_A)$. Отже, координати цієї точки мають задовольняти обидва рівняння:

$$\begin{cases} 4x_A + 3y_A - 5 = 0 \\ x_A - 2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Сторони AB та AC перетинаються у точці $A(x_A; y_A)$. Отже, координати цієї точки мають задовольняти обидва рівняння:

$$\begin{cases} 4x_A + 3y_A - 5 = 0 \\ x_A - 2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, маємо $x_A = 2$, $y_A = -1$.

Розв’язання

Сторони AB та AC перетинаються у точці $A(x_A; y_A)$. Отже, координати цієї точки мають задовольняти обидва рівняння:

$$\begin{cases} 4x_A + 3y_A - 5 = 0 \\ x_A - 2 = 0 \end{cases}$$

Розв’язуючи систему рівнянь, маємо $x_A = 2$, $y_A = -1$. Аналогічно, для $B(x_B; y_B)$:

$$\begin{cases} 4x_B + 3y_B - 5 = 0 \\ x_B - 3y_B + 10 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Сторони AB та AC перетинаються у точці $A(x_A; y_A)$. Отже, координати цієї точки мають задовольняти обидва рівняння:

$$\begin{cases} 4x_A + 3y_A - 5 = 0 \\ x_A - 2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, маємо $x_A = 2$, $y_A = -1$. Аналогічно, для $B(x_B; y_B)$:

$$\begin{cases} 4x_B + 3y_B - 5 = 0 \\ x_B - 3y_B + 10 = 0 \end{cases}$$

$x_B = -1$, $y_B = 3$.

Розв'язання

Сторони AB та AC перетинаються у точці $A(x_A; y_A)$. Отже, координати цієї точки мають задовольняти обидва рівняння:

$$\begin{cases} 4x_A + 3y_A - 5 = 0 \\ x_A - 2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, маємо $x_A = 2$, $y_A = -1$. Аналогічно, для $B(x_B; y_B)$:

$$\begin{cases} 4x_B + 3y_B - 5 = 0 \\ x_B - 3y_B + 10 = 0 \end{cases}$$

$x_B = -1$, $y_B = 3$. Для $C(x_C; y_C)$:

$$\begin{cases} x_C - 3y_C + 10 = 0 \\ x_C - 2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Сторони AB та AC перетинаються у точці $A(x_A; y_A)$. Отже, координати цієї точки мають задовольняти обидва рівняння:

$$\begin{cases} 4x_A + 3y_A - 5 = 0 \\ x_A - 2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, маємо $x_A = 2$, $y_A = -1$. Аналогічно, для $B(x_B; y_B)$:

$$\begin{cases} 4x_B + 3y_B - 5 = 0 \\ x_B - 3y_B + 10 = 0 \end{cases}$$

$x_B = -1$, $y_B = 3$. Для $C(x_C; y_C)$:

$$\begin{cases} x_C - 3y_C + 10 = 0 \\ x_C - 2 = 0 \end{cases}$$

$x_C = 2$, $y_C = 4$.

Задача 3

Площа трикутника $S_{\triangle ABC} = 1,5$, двома його вершинами є точки $A(2; -3)$ та $B(3; -2)$, центр мас цього трикутника лежить на прямій $3x - y - 8 = 0$. Визначити координати третьої вершини C.

Розв'язання

Нехай $C(x_C; y_C)$, тоді центр мас, точка $M(x_M; y_M)$, має координати, які є середніми арифметичними відповідних координат вершин трикутника:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 + 3 + x_C}{3}; y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-3 - 2 + y_C}{3};$$

Розв'язання

Нехай $C(x_C; y_C)$, тоді центр мас, точка $M(x_M; y_M)$, має координати, які є середніми арифметичними відповідних координат вершин трикутника:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 + 3 + x_C}{3}; y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-3 - 2 + y_C}{3};$$

За умовами задачі координати M мають задовольняти рівняння прямої $3x - y - 8 = 0$. Тому

$$3 \cdot \frac{2 + 3 + x_C}{3} - \frac{-3 - 2 + y_C}{3} - 8 = 0$$

Розв'язання

Нехай $C(x_C; y_C)$, тоді центр мас, точка $M(x_M; y_M)$, має координати, які є середніми арифметичними відповідних координат вершин трикутника:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 + 3 + x_C}{3}; y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-3 - 2 + y_C}{3};$$

За умовами задачі координати M мають задовольняти рівняння прямої $3x - y - 8 = 0$. Тому

$$3 \cdot \frac{2 + 3 + x_C}{3} - \frac{-3 - 2 + y_C}{3} - 8 = 0$$

Звідси

$$15 + 3x_C + 5 - y_C = 24 \Rightarrow y_C = 3x_C - 4.$$

Розв'язання

Далі,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_C \cdot AB,$$

де h_C – висота, проведена з вершини C до сторони AB.

Розв'язання

Далі,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_C \cdot AB,$$

де h_C – висота, проведена з вершини C до сторони AB.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-(-3))^2}$$

Розв'язання

Далі,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_C \cdot AB,$$

де h_C – висота, проведена з вершини C до сторони AB.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

Розв'язання

Далі,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}h_C \cdot AB,$$

де h_C – висота, проведена з вершини C до сторони AB.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Розв'язання

Далі,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_C \cdot AB,$$

де h_C – висота, проведена з вершини C до сторони AB.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Висоту h_C знайдемо як довжину відрізка CH, де H – точка перетину висоти зі стороною AB.

Розв'язання

Далі,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_C \cdot AB,$$

де h_C – висота, проведена з вершини C до сторони AB.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Висоту h_C знайдемо як довжину відрізка CH, де H – точка перетину висоти зі стороною AB.

Спочатку, знайдемо рівняння сторони AB. За відомим з лекції рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, маємо:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Розв'язання

Далі,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}h_C \cdot AB,$$

де h_C – висота, проведена з вершини C до сторони AB.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Висоту h_C знайдемо як довжину відрізка CH, де H – точка перетину висоти зі стороною AB.

Спочатку, знайдемо рівняння сторони AB. За відомим з лекції рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, маємо:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{-2+3}$$

Розв'язання

Далі,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_C \cdot AB,$$

де h_C – висота, проведена з вершини C до сторони AB.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Висоту h_C знайдемо як довжину відрізка CH, де H – точка перетину висоти зі стороною AB.

Спочатку, знайдемо рівняння сторони AB. За відомим з лекції рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, маємо:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{-2+3} \Rightarrow y = x - 5.$$

Розв'язання

Далі,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_C \cdot AB,$$

де h_C – висота, проведена з вершини C до сторони AB.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Висоту h_C знайдемо як довжину відрізка CH, де H – точка перетину висоти зі стороною AB.

Спочатку, знайдемо рівняння сторони AB. За відомим з лекції рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, маємо:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{-2+3} \Rightarrow y = x - 5.$$

Це рівняння прямої із кутовим коефіцієнтом.

Розв'язання

Далі,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}h_C \cdot AB,$$

де h_C – висота, проведена з вершини C до сторони AB.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Висоту h_C знайдемо як довжину відрізка CH, де H – точка перетину висоти зі стороною AB.

Спочатку, знайдемо рівняння сторони AB. За відомим з лекції рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, маємо:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{-2+3} \Rightarrow y = x-5.$$

Це рівняння прямої із кутовим коефіцієнтом.

Рівняння прямої, яка перпендикулярна до цієї прямої, матиме кутовий коефіцієнт, добуток якого з кутовим коефіцієнтом цього рівняння дорівнюватиме -1.

Розв'язання

Нехай рівняння $CH - y = kx + b$, тоді $k \cdot 1 = -1$, тобто $k = -1$.

Розв'язання

Нехай рівняння $CH - y = kx + b$, тоді $k \cdot 1 = -1$, тобто $k = -1$.
Пряма CH проходить через C, тому

$$y_C = -x_C + b \Rightarrow b = x_C + y_C.$$

Розв'язання

Нехай рівняння CH – $y = kx + b$, тоді $k \cdot 1 = -1$, тобто $k = -1$.
Пряма CH проходить через C, тому

$$y_C = -x_C + b \Rightarrow b = x_C + y_C.$$

Отже, рівнянням CH є рівняння $y = -x + x_C + y_C$.

Розв'язання

Нехай рівняння CH – $y = kx + b$, тоді $k \cdot 1 = -1$, тобто $k = -1$.
Пряма CH проходить через C, тому

$$y_C = -x_C + b \Rightarrow b = x_C + y_C.$$

Отже, рівнянням CH є рівняння $y = -x + x_C + y_C$.
Точка $H(x_H; y_H)$ належить одночасно AB та CH. Тому

$$\begin{cases} y_H = x_H - 5 \\ y_H = -x_H + x_c + y_C \end{cases}$$

Розв'язання

Нехай рівняння CH – $y = kx + b$, тоді $k \cdot 1 = -1$, тобто $k = -1$.
Пряма CH проходить через C, тому

$$y_C = -x_C + b \Rightarrow b = x_C + y_C.$$

Отже, рівнянням CH є рівняння $y = -x + x_C + y_C$.
Точка $H(x_H; y_H)$ належить одночасно AB та CH. Тому

$$\begin{cases} y_H = x_H - 5 \\ y_H = -x_H + x_c + y_C \end{cases}$$

Звідси $x_H = \frac{1}{2}(5 + x_C + y_C)$, $y_H = \frac{1}{2}(x_C + y_C - 5)$.

Розв'язання

Нехай рівняння CH – $y = kx + b$, тоді $k \cdot 1 = -1$, тобто $k = -1$.
Пряма CH проходить через C, тому

$$y_C = -x_C + b \Rightarrow b = x_C + y_C.$$

Отже, рівнянням CH є рівняння $y = -x + x_C + y_C$.
Точка $H(x_H; y_H)$ належить одночасно AB та CH. Тому

$$\begin{cases} y_H = x_H - 5 \\ y_H = -x_H + x_c + y_C \end{cases}$$

Звідси $x_H = \frac{1}{2}(5 + x_C + y_C)$, $y_H = \frac{1}{2}(x_C + y_C - 5)$.
Знайдемо h_C як відстань від C до H:

$$h_C = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(5 + x_C + y_C) - x_C\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(x_C + y_C - 5) - y_C\right)^2}$$

Розв'язання

Нехай рівняння CH – $y = kx + b$, тоді $k \cdot 1 = -1$, тобто $k = -1$.
Пряма CH проходить через C, тому

$$y_C = -x_C + b \Rightarrow b = x_C + y_C.$$

Отже, рівнянням CH є рівняння $y = -x + x_C + y_C$.
Точка $H(x_H; y_H)$ належить одночасно AB та CH. Тому

$$\begin{cases} y_H = x_H - 5 \\ y_H = -x_H + x_c + y_C \end{cases}$$

Звідси $x_H = \frac{1}{2}(5 + x_C + y_C)$, $y_H = \frac{1}{2}(x_C + y_C - 5)$.
Знайдемо h_C як відстань від C до H:

$$h_C = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(5 + x_C + y_C) - x_C\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(x_C + y_C - 5) - y_C\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}|5 - x_C + y_C|$$

Розв'язання

Отже,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_C \cdot AB$$

Розв'язання

Отже,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}h_C \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}|5 - x_C + y_C| \cdot \sqrt{2}$$

Розв'язання

Отже,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_C \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} |5 - x_C + y_C| \cdot \sqrt{2} = 1,5.$$

Розв'язання

Отже,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}h_C \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}|5 - x_C + y_C| \cdot \sqrt{2} = 1,5.$$

Підставляючи $y_C = 3x_C - 4$ до цього рівняння, отримаємо

$$2x_C + 1 = \pm 3$$

Розв'язання

Отже,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}h_C \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}|5 - x_C + y_C| \cdot \sqrt{2} = 1,5.$$

Підставляючи $y_C = 3x_C - 4$ до цього рівняння, отримаємо

$$2x_C + 1 = \pm 3 \Rightarrow x_C^{(1)} = 1; x_C^{(2)} = -2; \Rightarrow y_C^{(1)} = -1; y_C^{(2)} = -10;$$

Розв'язання

Отже,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}h_C \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}|5 - x_C + y_C| \cdot \sqrt{2} = 1,5.$$

Підставляючи $y_C = 3x_C - 4$ до цього рівняння, отримаємо

$$2x_C + 1 = \pm 3 \Rightarrow x_C^{(1)} = 1; x_C^{(2)} = -2; \Rightarrow y_C^{(1)} = -1; y_C^{(2)} = -10;$$

Відповідь: $C_1(1; -1)$, $C_2(-2; -10)$.

Задача 4

Дано пряму $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить крізь точку $M_0(2; 1)$ під кутом $45°$ до заданої прямої.

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом заданої прямої виглядає так:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом заданої прямої виглядає так:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$\frac{\left|k + \frac{2}{3}\right|}{1 - \frac{2}{3}k} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом заданої прямої виглядає так:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$\frac{\left|k + \frac{2}{3}\right|}{1 - \frac{2}{3}k} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\left|k + \frac{2}{3}\right| = 1 - \frac{2}{3}k$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом заданої прямої виглядає так:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$\frac{\left|k + \frac{2}{3}\right|}{1 - \frac{2}{3}k} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\left|k + \frac{2}{3}\right| = 1 - \frac{2}{3}k \Rightarrow k + \frac{2}{3} = \pm 1 \mp \frac{2}{3}k$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом заданої прямої виглядає так:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$\frac{\left|k + \frac{2}{3}\right|}{1 - \frac{2}{3}k} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\left|k + \frac{2}{3}\right| = 1 - \frac{2}{3}k \Rightarrow k + \frac{2}{3} = \pm 1 \mp \frac{2}{3}k \Rightarrow k_1 = \frac{1}{5}; k_2 = -5.$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом заданої прямої виглядає так:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$\frac{\left|k + \frac{2}{3}\right|}{1 - \frac{2}{3}k} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\left|k + \frac{2}{3}\right| = 1 - \frac{2}{3}k \Rightarrow k + \frac{2}{3} = \pm 1 \mp \frac{2}{3}k \Rightarrow k_1 = \frac{1}{5}; k_2 = -5.$$

Оскільки пряма має проходити крізь точку $M_0(2; 1)$,

$$1 = k \cdot 2 + b$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом заданої прямої виглядає так:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$\frac{\left|k + \frac{2}{3}\right|}{1 - \frac{2}{3}k} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\left|k + \frac{2}{3}\right| = 1 - \frac{2}{3}k \Rightarrow k + \frac{2}{3} = \pm 1 \mp \frac{2}{3}k \Rightarrow k_1 = \frac{1}{5}; k_2 = -5.$$

Оскільки пряма має проходити крізь точку $M_0(2;1)$,

$$1 = k \cdot 2 + b \Rightarrow b_1 = \frac{3}{5}; b_2 = 11$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом заданої прямої виглядає так:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$\frac{\left|k + \frac{2}{3}\right|}{1 - \frac{2}{3}k} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\left|k + \frac{2}{3}\right| = 1 - \frac{2}{3}k \Rightarrow k + \frac{2}{3} = \pm 1 \mp \frac{2}{3}k \Rightarrow k_1 = \frac{1}{5}; k_2 = -5.$$

Оскільки пряма має проходити крізь точку $M_0(2; 1)$,

$$1 = k \cdot 2 + b \Rightarrow b_1 = \frac{3}{5}; b_2 = 11$$

Відповідь: $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$, $y = -5x + 11$.

Задача 5

Промінь світла спрямовано уздовж прямої $x - 2y + 5 = 0$. Дійшовши до прямої $3x - 2y + 7 = 0$, промінь відбився від неї. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом прямої, від якої відбився промінь, виглядає так:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2},$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом прямої, від якої відбився промінь, виглядає так:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2},$$

а прямої початкового напрямку променя, так:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом прямої, від якої відбився промінь, виглядає так:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2},$$

а прямої початкового напрямку променя, так:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом, та закону відбиття (кут падіння дорівнює куту відбиття):

$$\frac{k - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}k} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом прямої, від якої відбився промінь, виглядає так:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2},$$

а прямої початкового напрямку променя, так:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом, та закону відбиття (кут падіння дорівнює куту відбиття):

$$\frac{k - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}k} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом прямої, від якої відбився промінь, виглядає так:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2},$$

а прямої початкового напрямку променя, так:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом, та закону відбиття (кут падіння дорівнює куту відбиття):

$$\frac{k - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}k} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7k - \frac{21}{2} = 4 + 6k$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої – $y = kx + b$.
Оскільки рівняння з кутовим коефіцієнтом прямої, від якої відбився промінь, виглядає так:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2},$$

а прямої початкового напрямку променя, так:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

з формули для кута між прямими, які задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом, та закону відбиття (кут падіння дорівнює куту відбиття):

$$\frac{k - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}k} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7k - \frac{21}{2} = 4 + 6k \Rightarrow k = \frac{29}{2}.$$

Розв'язання

Шукана пряма має проходити крізь точку перетину початкового променя та прямої відбиття.

Розв'язання

Шукана пряма має проходити крізь точку перетину початкового променя та прямої відбиття.
Нехай точкою перетину є точка $M(x_0; y_0)$. Тоді

$$\begin{cases} y_0 = \frac{3}{2}x_0 + \frac{7}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2} \end{cases}$$

Розв'язання

Шукана пряма має проходити крізь точку перетину початкового променя та прямої відбиття.
Нехай точкою перетину є точка $M(x_0; y_0)$. Тоді

$$\begin{cases} y_0 = \frac{3}{2}x_0 + \frac{7}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2} \end{cases}$$

Звідки $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

Розв'язання

Шукана пряма має проходити крізь точку перетину початкового променя та прямої відбиття.
Нехай точкою перетину є точка $M(x_0; y_0)$. Тоді

$$\begin{cases} y_0 = \frac{3}{2}x_0 + \frac{7}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2} \end{cases}$$

Звідки $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.
Підставивши ці координати до рівняння відбитого променя, маємо

$$2 = \frac{29}{2} \cdot (-1) + b$$

Розв'язання

Шукана пряма має проходити крізь точку перетину початкового променя та прямої відбиття.
Нехай точкою перетину є точка $M(x_0; y_0)$. Тоді

$$\begin{cases} y_0 = \frac{3}{2}x_0 + \frac{7}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2} \end{cases}$$

Звідки $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.
Підставивши ці координати до рівняння відбитого променя, маємо

$$2 = \frac{29}{2} \cdot (-1) + b \Rightarrow b = \frac{33}{2}.$$

Розв'язання

Шукана пряма має проходити крізь точку перетину початкового променя та прямої відбиття.
Нехай точкою перетину є точка $M(x_0; y_0)$. Тоді

$$\begin{cases} y_0 = \frac{3}{2}x_0 + \frac{7}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2} \end{cases}$$

Звідки $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.
Підставивши ці координати до рівняння відбитого променя, маємо

$$2 = \frac{29}{2} \cdot (-1) + b \Rightarrow b = \frac{33}{2}.$$

Відповідь: $y = \frac{29}{2}x + \frac{33}{2}$.

Задача 5

Скласти рівняння прямої, яка проходить крізь точку $C(1;1)$ і відсікає від координатного кута трикутник із площею, рівною 2.

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої задано «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої задано «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Площа трикутника, який така пряма відсікає від координатного кута, дорівнює $\frac{1}{2}|ab|$. Тому $|ab| = 4$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої задано «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Площа трикутника, який така пряма відсікає від координатного кута, дорівнює $\frac{1}{2}|ab|$. Тому $|ab| = 4$

З належності C прямій маємо $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Отже, $a = \frac{b}{b-1}$.

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої задано «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Площа трикутника, який така пряма відсікає від координатного кута, дорівнює $\frac{1}{2}|ab|$. Тому $|ab| = 4$
З належності C прямій маємо $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Отже, $a = \frac{b}{b-1}$.
Звідси

$$\frac{b^2}{|b-1|} = 4$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої задано «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Площа трикутника, який така пряма відсікає від координатного кута, дорівнює $\frac{1}{2}|ab|$. Тому $|ab| = 4$
З належності C прямій маємо $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Отже, $a = \frac{b}{b-1}$.
Звідси

$$\frac{b^2}{|b-1|} = 4 \Rightarrow b^2 = \pm 4b \mp 4$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої задано «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Площа трикутника, який така пряма відсікає від координатного кута, дорівнює $\frac{1}{2}|ab|$. Тому $|ab| = 4$

З належності C прямій маємо $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Отже, $a = \frac{b}{b-1}$.

Звідси

$$\frac{b^2}{|b-1|} = 4 \Rightarrow b^2 = \pm 4b \mp 4 \Rightarrow b^2 \mp 4b \pm 4 = 0$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої задано «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Площа трикутника, який така пряма відсікає від координатного кута, дорівнює $\frac{1}{2}|ab|$. Тому $|ab| = 4$

З належності C прямій маємо $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Отже, $a = \frac{b}{b-1}$.

Звідси

$$\frac{b^2}{|b-1|} = 4 \Rightarrow b^2 = \pm 4b \mp 4 \Rightarrow b^2 \mp 4b \pm 4 = 0 \Rightarrow b_1 = 2; b_2 = -2+2\sqrt{2}; b_3 = -2-2\sqrt{2}.$$

Розв'язання

Нехай рівняння шуканої прямої задано «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Площа трикутника, який така пряма відсікає від координатного кута, дорівнює $\frac{1}{2}|ab|$. Тому $|ab| = 4$
З належності C прямій маємо $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Отже, $a = \frac{b}{b-1}$.
Звідси

$$\frac{b^2}{|b-1|} = 4 \Rightarrow b^2 = \pm 4b \mp 4 \Rightarrow b^2 \mp 4b \pm 4 = 0 \Rightarrow b_1 = 2; b_2 = -2+2\sqrt{2}; b_3 = -2-2\sqrt{2}.$$

Обчислюючи значення a, маємо

$$a_1 = 2; a_2 = -2 - 2\sqrt{2}; a_3 = -2 + 2\sqrt{2};$$

Відповідь: $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$, $\frac{x}{-2-2\sqrt{2}} + \frac{y}{-2+2\sqrt{2}} = 1$, $\frac{x}{-2+2\sqrt{2}} + \frac{y}{-2-2\sqrt{2}} = 1$.

Задача 6

Знайти відстань від точки $M(2; -1)$ до прямої $4x + 3y + 10 = 0$.

Розв'язання

Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду.

$$A = 4; B = 3.$$

Розв'язання

Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду.

$$A = 4; B = 3.$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Розв'язання

Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду.

$$A = 4; B = 3.$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

Розв'язання

Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду.

$$A = 4; B = 3.$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = -\frac{1}{5}.$$

(мінус вибираємо, щоб після множення вільний член лишався від'ємним).

Розв'язання

Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду.

$$A = 4; B = 3.$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = -\frac{1}{5}.$$

(мінус вибираємо, щоб після множення вільний член лишався від'ємним). Отже, нормальний вигляд буде таким:

$$-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$$

Розв'язання

Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду.

$$A = 4; B = 3.$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = -\frac{1}{5}.$$

(мінус вибираємо, щоб після множення вільний член лишався від'ємним). Отже, нормальний вигляд буде таким:

$$-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$$

Обчислюємо відстань, підставляючи до лівої частини рівняння координати точки M і беручи отримане значення за модулем:

$$d_M = \left| -\frac{4}{5}x_M - \frac{3}{5}y_M - 2 \right|$$

Розв'язання

Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду.

$$A = 4; B = 3.$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = -\frac{1}{5}.$$

(мінус вибираємо, щоб після множення вільний член лишався від'ємним). Отже, нормальний вигляд буде таким:

$$-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$$

Обчислюємо відстань, підставляючи до лівої частини рівняння координати точки M і беручи отримане значення за модулем:

$$d_M = \left| -\frac{4}{5}x_M - \frac{3}{5}y_M - 2 \right| = \left| -\frac{4}{5} \cdot 2 - \frac{3}{5} \cdot (-1) - 2 \right|$$

Розв'язання

Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду.

$$A = 4; B = 3.$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = -\frac{1}{5}.$$

(мінус вибираємо, щоб після множення вільний член лишався від'ємним). Отже, нормальний вигляд буде таким:

$$-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$$

Обчислюємо відстань, підставляючи до лівої частини рівняння координати точки M і беручи отримане значення за модулем:

$$d_M = \left| -\frac{4}{5}x_M - \frac{3}{5}y_M - 2 \right| = \left| -\frac{4}{5} \cdot 2 - \frac{3}{5} \cdot (-1) - 2 \right| = 3.$$

Задача 7

Довести, що пряма $2x + y + 3 = 0$ перетинає відрізок, обмежений точками $A(-5; 1)$ і $B(3; 7)$.

Розв'язання

Щоб пряма перетинала відрізок, відхилення (ліві частини нормального рівняння прямої) для точок A і B мають бути різних знаків. Тому, незалежно від знаку нормувального множника μ, знаки лівих частин початкового рівняння після підставляння координат A і B мають бути різними.

Розв'язання

Щоб пряма перетинала відрізок, відхилення (ліві частини нормального рівняння прямої) для точок A і B мають бути різних знаків. Тому, незалежно від знаку нормувального множника μ, знаки лівих частин початкового рівняння після підставляння координат A і B мають бути різними.

$$2 \cdot (-5) + 1 + 3 = -6 < 0;$$

Розв'язання

Щоб пряма перетинала відрізок, відхилення (ліві частини нормального рівняння прямої) для точок A і B мають бути різних знаків. Тому, незалежно від знаку нормувального множника μ, знаки лівих частин початкового рівняння після підставляння координат A і B мають бути різними.

$$2 \cdot (-5) + 1 + 3 = -6 < 0;$$

$$2 \cdot 3 + 7 + 3 = 16 > 0,$$

Розв'язання

Щоб пряма перетинала відрізок, відхилення (ліві частини нормального рівняння прямої) для точок A і B мають бути різних знаків. Тому, незалежно від знаку нормувального множника μ, знаки лівих частин початкового рівняння після підставляння координат A і B мають бути різними.

$$2 \cdot (-5) + 1 + 3 = -6 < 0;$$

$$2 \cdot 3 + 7 + 3 = 16 > 0,$$

що й слід було встановити.