Розв'язання задач на правило Лопіталя

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$.

Розв'язання

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

Розв’язання

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

$$f'(x) = mx^{m-1}; g'(x) = nx^{n-1};$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

$$f'(x) = mx^{m-1}; g'(x) = nx^{n-1};$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

$$f'(x)=mx^{m-1}; g'(x)=nx^{n-1};$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

$$f'(x) = mx^{m-1}; g'(x) = nx^{n-1};$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

$$f'(x) = mx^{m-1}; g'(x) = nx^{n-1};$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя (невизначеність $\frac{0}{0}$).

Розв'язання

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя (невизначеність $\frac{0}{0}$).

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2; g'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 32x + 2;$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя (невизначеність $\frac{0}{0}$).

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2; g'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 32x + 2;$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя (невизначеність $\frac{0}{0}$).

$$f'(x)=3x^2-10x+2; g'(x)=4x^3-6x^2-32x+2;$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя (невизначеність $\frac{0}{0}$).

$$f'(x)=3x^2-10x+2; g'(x)=4x^3-6x^2-32x+2;$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\frac{15}{24}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$$

Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя (невизначеність $\frac{0}{0}$).

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2; g'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 32x + 2;$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2 - 10x + 2}{4x^3 - 6x^2 - 32x + 2} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$$

Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$$

Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{n}\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(-nx^{n-1}\right); g'(x) = nx^{n-1};$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{a-\sqrt[n]{a^n-x^n}}{x^n}$$

Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

$$f'(x)=-\frac{1}{n}\left(a^n-x^n\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\left(-nx^{n-1}\right);g'(x)=nx^{n-1};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt[n]{a^n-x^n}}{x^n}$$

Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{n}\left(a^n-x^n\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\left(-nx^{n-1}\right); g'(x) = nx^{n-1};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{n}\left(a^n-x^n\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\left(-nx^{n-1}\right)}{nx^{n-1}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$$

Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{n}\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(-nx^{n-1}\right); g'(x) = nx^{n-1};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{n}\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(-nx^{n-1}\right)}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{n}\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$$

Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{n}\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(-nx^{n-1}\right); g'(x) = nx^{n-1};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{n}\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(-nx^{n-1}\right)}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{n}\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}-1} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$$

Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{n}\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(-nx^{n-1}\right); g'(x) = nx^{n-1};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{n}\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(-nx^{n-1}\right)}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{n}\left(a^n - x^n\right)^{\frac{1}{n}-1} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{a^{1-n}}{n}.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$.

Розв'язання

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x};\, g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2-2x)$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x}; g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) = -\frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x};g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2-2x)=-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x};\, g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2-2x)=-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x};\, g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2-2x)=-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x};\, g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2-2x)=-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x};\, g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2-2x)=-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}=-\frac{1}{1}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x};\, g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2-2x)=-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}=-\frac{1}{1}=-1.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Розв'язання

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = 1 - \cos x; g'(x) = 3x^2.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = 1 - \cos x; g'(x) = 3x^2.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = 1 - \cos x; g'(x) = 3x^2.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}}_{\text{Знову } \frac{0}{0}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = 1-\cos x; g'(x) = 3x^2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}_{\text{Знову } \frac{0}{0}} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}}_{\text{Знову } \frac{0}{0}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = 1 - \cos x; g'(x) = 3x^2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}_{\text{Знову } \frac{0}{0}} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}}_{\text{Знову } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=1-\cos x; g'(x)=3x^2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}_{\text{Знову } \frac{0}{0}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}}_{\text{Знову } \frac{0}{0}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x;$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x; g'(x) = 3\sin^2 x\cos x.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x; g'(x) = 3\sin^2 x\cos x.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x; g'(x) = 3\sin^2 x\cos x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3\sin^2 x\cos x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x; g'(x) = 3\sin^2 x\cos x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3\sin^2 x\cos x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{3\sin x\cos x}}_{\text{Знову } \frac{0}{0}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x; g'(x) = 3\sin^2 x\cos x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3\sin^2 x\cos x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{3\sin x\cos x}}_{\text{Знову } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3\cos x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x; g'(x) = 3\sin^2 x\cos x.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{3\sin^2 x\cos x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x}{3\sin x\cos x}}_{\text{Знову } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos x} = \frac{1}{3}.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

Розв'язання

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=\frac{1}{x};$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \frac{1}{x}; g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=\frac{1}{x};\, g'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=\frac{1}{x};\, g'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=\frac{1}{x};\,g'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \frac{1}{x}; g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to+0} x$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=\frac{1}{x};\, g'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

Розв'язання

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x};$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}; g'(x) = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}; g'(x) = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}; g'(x) = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}; g'(x) = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}} = \frac{3}{5} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x};\, g'(x) = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}} = \frac{3}{5} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x};\, g'(x) = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}} = \frac{3}{5} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x}\right)^2$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}; g'(x) = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}} = \frac{3}{5} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x}\right)^2 = \frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}\left(\frac{1}{-1}\right)^2$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x)=\frac{3}{\cos^2 3x};\, g'(x)=\frac{5}{\cos^2 5x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}}_{\text{Невизначеність }\frac{0}{0}}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2=$$

$$=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}\left(\frac{1}{-1}\right)^2=\frac{5}{3}.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = e^x;$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = e^x; g'(x) = 2x.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = e^x; g'(x) = 2x.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = e^x; g'(x) = 2x.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}}_{\text{Невизначеність } \frac{\infty}{\infty}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = e^x; g'(x) = 2x.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\text{Невизначеність } \frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$$

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо правило Лопіталя.

$$f'(x) = e^x; g'(x) = 2x.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}}_{\text{Невизначеність } \frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x}$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty - \infty$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty - \infty$.
Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty-\infty$.
Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty-\infty$.
Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty-\infty$.

Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty-\infty$.
Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}}_{\text{Невизначеність }\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}}_{\text{Невизначеність }\frac{0}{0}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{0+1+1}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty-\infty$.
Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty - \infty$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty - \infty$.
Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{2-x+1}{x^2-1}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty-\infty$.
Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to1}\frac{2-x+1}{x^2-1}}_{\text{Невизначеність }\frac{0}{0}}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Невизначеність типу $\infty-\infty$.
Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to1}\frac{2-x+1}{x^2-1}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$$

Невизначеність типу $+\infty \cdot 0$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$$

Невизначеність типу $+\infty \cdot 0$.
Зводимо до $\frac{\infty}{\infty}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$$

Невизначеність типу $+\infty \cdot 0$.
Зводимо до $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$$

Невизначеність типу $+\infty \cdot 0$.
Зводимо до $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{Правило Лопіталя}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$$

Невизначеність типу $+\infty \cdot 0$.
Зводимо до $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{Правило Лопіталя}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to +0} x^x$.

Розв’язання

Маємо невизначеність типу 0^0.

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 0^0.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln x^x = x \ln x$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 0^0.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln x^x = x \ln x$$

Отже,

$$\ln \lim_{x \to +0} x^x = \lim_{x \to +0} x \ln x$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 0^0.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln x^x = x \ln x$$

Отже,

$$\ln \lim_{x \to +0} x^x = \lim_{x \to +0} x \ln x = \underbrace{\lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\text{Невизначеність } \frac{\infty}{\infty}}$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 0^0.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln x^x = x \ln x$$

Отже,

$$\ln \lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} x \ln x = \underbrace{\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\text{Невизначеність } \frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 0^0.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln x^x = x \ln x$$

Отже,

$$\ln \lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} x \ln x = \underbrace{\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\text{Невизначеність } \frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 0^0.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln x^x = x \ln x$$

Отже,

$$\ln \lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} x \ln x = \underbrace{\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\text{Невизначеність } \frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 0^0.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln x^x = x \ln x$$

Отже,

$$\ln \lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} x\ln x = \underbrace{\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\text{Невизначеність } \frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Значення границі в умові отримуємо потенціюючи отримане значення:

$$\lim_{x\to+0} x^x = e^0 = 1.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 1^∞.

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 1^∞.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln \cos ax}{x^2}$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 1^∞.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln\cos ax}{x^2}$$

Отже,

$$\ln\lim_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{x^2}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}}$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 1^∞.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln\cos ax}{x^2}$$

Отже,

$$\ln\lim_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{x^2}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos ax}\cdot\sin ax\cdot a}{2x}$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 1^∞.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln\cos ax}{x^2}$$

Отже,

$$\ln\lim_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{x^2}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos ax}\cdot\sin ax\cdot a}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos ax\cdot a}{2}$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 1^∞.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln\cos ax}{x^2}$$

Отже,

$$\ln\lim_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{x^2}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos ax}\cdot\sin ax\cdot a}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos ax\cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 1^∞.
Прологарифмуємо функцію:

$$\ln(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln\cos ax}{x^2}$$

Отже,

$$\ln\lim_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{x^2}}_{\text{Невизначеність } \frac{0}{0}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos ax}\cdot\sin ax\cdot a}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos ax\cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Значення границі в умові отримуємо потенціюючи отримане значення:

$$\lim_{x\to +0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{a^2}{2}}.$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.