Розв'язання задач на знаходження похідних вищих порядків

Задача

$$y = \sin^2 x$$

Знайти y^{IV}.

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$y''' = (y'')'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$y''' = (y'')' = (2\cos 2x)'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$y''' = (y'')' = (2\cos 2x)' = 2 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$y''' = (y'')' = (2\cos 2x)' = 2 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -4\sin 2x$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$y''' = (y'')' = (2\cos 2x)' = 2 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -4\sin 2x$$

$$y^{IV} = (y''')'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$y''' = (y'')' = (2\cos 2x)' = 2 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -4\sin 2x$$

$$y^{IV} = (y''')' = (-4\sin 2x)'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$y''' = (y'')' = (2\cos 2x)' = 2 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -4\sin 2x$$

$$y^{IV} = (y''')' = (-4\sin 2x)' = -4\cos 2x \cdot 2$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$y''' = (y'')' = (2\cos 2x)' = 2 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -4\sin 2x$$

$$y^{IV} = (y''')' = (-4\sin 2x)' = -4\cos 2x \cdot 2 = -8\cos 2x$$

Задача

$$y = \sqrt{x+5}$$

Знайти y^V.

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sqrt{x+5}$$

$$y' = \left(\sqrt{x+5}\right)'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sqrt{x+5}$$

$$y' = \left(\sqrt{x+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sqrt{x+5}$$

$$y' = \left(\sqrt{x+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$y'' = \left[\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\right]'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sqrt{x+5}$$

$$y' = \left(\sqrt{x+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$y'' = \left[\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x+5)^{-\frac{3}{2}}$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \sqrt{x+5}$$

$$y' = \left(\sqrt{x+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$y'' = \left[\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x+5)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}$$

Розв'язання

$$y''' = \left[-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right]'$$

Розв'язання

$$y''' = \left[-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right]' = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{5}{2}}$$

Розв'язання

$$y''' = \left[-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right]' = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (x+5)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}$$

Розв'язання

$$y''' = \left[-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right]' = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (x+5)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}$$

$$y^{IV} = \left[\frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}\right]'$$

Розв'язання

$$y''' = \left[-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right]' = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}$$

$$y^{IV} = \left[\frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}\right]' = \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{7}{2}}$$

Розв'язання

$$y''' = \left[-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right]' = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}$$

$$y^{IV} = \left[\frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}\right]' = \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}$$

$$y^{V} = \left[-\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}\right]'$$

Розв'язання

$$y''' = \left[-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right]' = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}$$

$$y^{IV} = \left[\frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}\right]' = \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}$$

$$y^{V} = \left[-\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}\right]' = -\frac{15}{16}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{9}{2}}$$

Розв'язання

$$y''' = \left[-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right]' = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}$$

$$y^{IV} = \left[\frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}\right]' = \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}$$

$$y^{V} = \left[-\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}\right]' = -\frac{15}{16}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot(x+5)^{-\frac{9}{2}} = \frac{105}{32}(x+5)^{-\frac{9}{2}}$$

Задача

$$y = \ln \sin x$$

Знайти y^{IV}.

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \ln \sin x$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \ln \sin x$$

$$y' = (\ln \sin x)'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \ln \sin x$$

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \ln \sin x$$

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \ln \sin x$$

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

$$y'' = (\operatorname{ctg} x)'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \ln \sin x$$

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

$$y'' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \ln \sin x$$

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

$$y'' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)'$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо похідні.

$$y = \ln \sin x$$

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

$$y'' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

Розв'язання

$$y^{IV} = \left(\frac{2\cos x}{\sin^3 x}\right)'$$

Розв'язання

$$y^{IV} = \left(\frac{2\cos x}{\sin^3 x}\right)' = \frac{2 \cdot (-\sin x) \cdot \sin^3 x - 2\cos x \cdot 3\sin^2 x \cos x}{\sin^6 x}$$

Розв'язання

$$y^{IV} = \left(\frac{2\cos x}{\sin^3 x}\right)' = \frac{2\cdot(-\sin x)\cdot\sin^3 x - 2\cos x\cdot 3\sin^2 x\cos x}{\sin^6 x} =$$

$$= -\frac{2\sin^2 x + 6\cos^2 x}{\sin^4 x}$$

Задача

$$y = \arcsin x$$

Знайти y''.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

$$\begin{cases} x = 3t^2; \\ y = \sin t. \end{cases} \quad \text{Знайти } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = 3t^2$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = 3t^2 \Rightarrow x'(t) = 3 \cdot 2t$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = 3t^2 \Rightarrow x'(t) = 3 \cdot 2t = 6t$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = 3t^2 \Rightarrow x'(t) = 3 \cdot 2t = 6t$$

$$y = \sin t$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = 3t^2 \Rightarrow x'(t) = 3 \cdot 2t = 6t$$

$$y = \sin t \Rightarrow y'(t) = \cos t$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = 3t^2 \Rightarrow x'(t) = 3 \cdot 2t = 6t$$

$$y = \sin t \Rightarrow y'(t) = \cos t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\cos t}{6t}\right]$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = 3t^2 \Rightarrow x'(t) = 3 \cdot 2t = 6t$$

$$y = \sin t \Rightarrow y'(t) = \cos t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\cos t}{6t}\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{-\sin t \cdot t - \cos t \cdot 1}{t^2}$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = 3t^2 \Rightarrow x'(t) = 3 \cdot 2t = 6t$$

$$y = \sin t \Rightarrow y'(t) = \cos t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\cos t}{6t}\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{-\sin t \cdot t - \cos t \cdot 1}{t^2} =$$

$$= -\frac{t\sin t + \cos t}{6t^2}$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{1}{6t} \cdot \left[-\frac{t\sin t + \cos t}{6t^2}\right]$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{1}{6t} \cdot \left[-\frac{t\sin t + \cos t}{6t^2}\right] = -\frac{t\sin t + \cos t}{36t^3}$$

Задача

$$\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \cos t^2 \end{cases} \quad \text{Знайти } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = \ln t$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = \ln t \Rightarrow x'(t) = \frac{1}{t}$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = \ln t \Rightarrow x'(t) = \frac{1}{t}$$

$$y = \cos t^2$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = \ln t \Rightarrow x'(t) = \frac{1}{t}$$

$$y = \cos t^2 \Rightarrow y'(t) = -\sin t^2 \cdot 2t$$

Розв’язання

Маємо:

$$x = \ln t \Rightarrow x'(t) = \frac{1}{t}$$

$$y = \cos t^2 \Rightarrow y'(t) = -\sin t^2 \cdot 2t = -2t \sin t^2$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = \ln t \Rightarrow x'(t) = \frac{1}{t}$$

$$y = \cos t^2 \Rightarrow y'(t) = -\sin t^2 \cdot 2t = -2t \sin t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{-2t\sin t^2}{\frac{1}{t}}\right]$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = \ln t \Rightarrow x'(t) = \frac{1}{t}$$

$$y = \cos t^2 \Rightarrow y'(t) = -\sin t^2 \cdot 2t = -2t \sin t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{-2t \sin t^2}{\frac{1}{t}}\right] = -2(t^2 \sin t^2)'$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = \ln t \Rightarrow x'(t) = \frac{1}{t}$$

$$y = \cos t^2 \Rightarrow y'(t) = -\sin t^2 \cdot 2t = -2t \sin t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{-2t\sin t^2}{\frac{1}{t}}\right] = -2(t^2 \sin t^2)' =$$

$$= -2\left(2t \cdot \sin t^2 + t^2 \cdot \cos t^2 \cdot 2t\right)$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = \ln t \Rightarrow x'(t) = \frac{1}{t}$$

$$y = \cos t^2 \Rightarrow y'(t) = -\sin t^2 \cdot 2t = -2t \sin t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{-2t\sin t^2}{\frac{1}{t}}\right] = -2(t^2 \sin t^2)' =$$

$$= -2\left(2t \cdot \sin t^2 + t^2 \cdot \cos t^2 \cdot 2t\right) = -4t\sin t^2 - 4t^3 \cos t^2$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{1}{\frac{1}{t}} \cdot \left[-4t\sin t^2 - 4t^3\cos t^2\right]$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{1}{\frac{1}{t}} \cdot \left[-4t\sin t^2 - 4t^3\cos t^2\right] = -4t^2\sin t^2 - 4t^4\cos t^2$$

Задача

$$\begin{cases} x = e^{t^2}; \\ y = 3t^2. \end{cases} \quad \text{Знайти } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

$$\text{Знайти } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0 \Rightarrow \left(y^2 - x\right) y' = y - x^2$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0 \Rightarrow \left(y^2 - x\right) y' = y - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0 \Rightarrow \left(y^2 - x\right) y' = y - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')'$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0 \Rightarrow \left(y^2 - x\right) y' = y - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{y - x^2}{y^2 - x}\right)'$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0 \Rightarrow \left(y^2 - x\right) y' = y - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{y - x^2}{y^2 - x}\right)' = \frac{(y' - 2x)\cdot(y^2 - x) - (y - x^2)\cdot(2y \cdot y' - 1)}{(y^2 - x)^2}$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0 \Rightarrow \left(y^2 - x\right) y' = y - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{y - x^2}{y^2 - x}\right)' = \frac{(y' - 2x) \cdot (y^2 - x) - (y - x^2) \cdot (2y \cdot y' - 1)}{(y^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{y-x^2}{y^2-x} - 2x\right) \cdot (y^2 - x) - (y - x^2) \cdot \left(2y \cdot \frac{y-x^2}{y^2-x} - 1\right)}{(y^2 - x)^2}$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0 \Rightarrow \left(y^2 - x\right)y' = y - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{y - x^2}{y^2 - x}\right)' = \frac{(y' - 2x)\cdot(y^2 - x) - (y - x^2)\cdot(2y\cdot y' - 1)}{(y^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{y - x^2}{y^2 - x} - 2x\right)\cdot(y^2 - x) - (y - x^2)\cdot\left(2y\cdot\frac{y - x^2}{y^2 - x} - 1\right)}{(y^2 - x)^2} = \frac{2xy(3xy - y^3 - x^3 - 1)}{(y^2 - x)^3}$$

Задача

$$xy - e^{x-y} = 0.$$

Знайти $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(xy)' - \left(e^{x-y}\right)' = 0$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(xy)' - \left(e^{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow y + xy' - e^{x-y}(1 - y') = 0$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(xy)' - \left(e^{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow y + xy' - e^{x-y}(1 - y') = 0 \Rightarrow \left[e^{x-y} + x\right] y' = e^{x-y} - y$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(xy)' - \left(e^{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow y + xy' - e^{x-y}(1 - y') = 0 \Rightarrow \left[e^{x-y} + x\right] y' = e^{x-y} - y \Rightarrow$$

$$y' = \frac{e^{x-y} - y}{e^{x-y} + x}$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(xy)' - \left(e^{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow y + xy' - e^{x-y}(1 - y') = 0 \Rightarrow \left[e^{x-y} + x\right] y' = e^{x-y} - y \Rightarrow$$

$$y' = \frac{e^{x-y} - y}{e^{x-y} + x}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')'$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(xy)' - \left(e^{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow y + xy' - e^{x-y}(1 - y') = 0 \Rightarrow \left[e^{x-y} + x\right] y' = e^{x-y} - y \Rightarrow$$

$$y' = \frac{e^{x-y} - y}{e^{x-y} + x}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{e^{x-y} - y}{e^{x-y} + x}\right)'$$

Розв'язання

Знаходимо $y'(x)$:

$$(xy)' - \left(e^{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow y + xy' - e^{x-y}(1 - y') = 0 \Rightarrow \left[e^{x-y} + x\right] y' = e^{x-y} - y \Rightarrow$$

$$y' = \frac{e^{x-y} - y}{e^{x-y} + x}$$

Диференціюємо рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{e^{x-y} - y}{e^{x-y} + x}\right)' =$$

$$= \frac{\left(e^{x-y}(1 - y') - y'\right)\left(e^{x-y} + x\right) - \left(e^{x-y} - y\right)\left(e^{x-y}(1 - y') + 1\right)}{\left(e^{x-y} + x\right)^2}$$

Розв'язання

$$y'' = \frac{\left(e^{x-y}\left(1-\frac{e^{x-y}-y}{e^{x-y}+x}\right)-\frac{e^{x-y}-y}{e^{x-y}+x}\right)\left(e^{x-y}+x\right)-\left(e^{x-y}-y\right)\left(e^{x-y}\left(1-\frac{e^{x-y}-y}{e^{x-y}+x}\right)+1\right)}{\left(e^{x-y}+x\right)^2}$$

Задача

$$\operatorname{arctg}(x-y)+\ln y=0.$$

$$\text{Знайти } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Розв'язання

Розв'язати самостійно.