

Розв'язання задач на поверхні другого порядку

Задача 1

Встановити, за яких значень m площина $x + mz - 1 = 0$ перетинає двопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 = -1$: а) за еліпсом; б) за гіперболою.

Підставимо x з рівняння площини до рівняння гіперболоїда:

$$x = 1 - mz$$

Підставимо x з рівняння площини до рівняння гіперболоїда:

$$x = 1 - mz$$

$$(1 - mz)^2 + y^2 - z^2 = -1$$

Підставимо x з рівняння площини до рівняння гіперболоїда:

$$x = 1 - mz$$

$$(1 - mz)^2 + y^2 - z^2 = -1$$

$$(m^2 - 1)z^2 - 2mz + y^2 = -2$$

Підставимо x з рівняння площини до рівняння гіперболоїда:

$$x = 1 - mz$$

$$(1 - mz)^2 + y^2 - z^2 = -1$$

$$(m^2 - 1)z^2 - 2mz + y^2 = -2$$

$$(m^2 - 1) \left(z^2 - \frac{2m}{m^2 - 1}z + \left(\frac{m}{m^2 - 1} \right)^2 \right) + y^2 = \frac{m^2}{m^2 - 1} - 2$$

Підставимо x з рівняння площини до рівняння гіперболоїда:

$$x = 1 - mz$$

$$(1 - mz)^2 + y^2 - z^2 = -1$$

$$(m^2 - 1)z^2 - 2mz + y^2 = -2$$

$$(m^2 - 1) \left(z^2 - \frac{2m}{m^2 - 1}z + \left(\frac{m}{m^2 - 1} \right)^2 \right) + y^2 = \frac{m^2}{m^2 - 1} - 2$$

$$(m^2 - 1) \left(z - \frac{m}{m^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \frac{m^2}{m^2 - 1} - 2$$

Щоб крива була еліпсом, має бути

$$\begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ \frac{m^2}{m^2-1} - 2 > 0 \end{cases}$$

Щоб крива була еліпсом, має бути

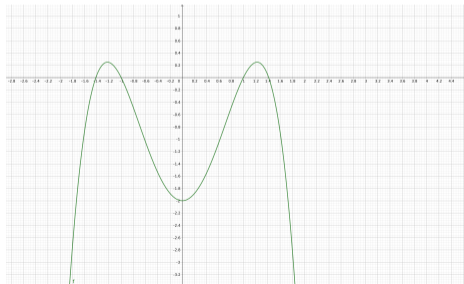
$$\begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ \frac{m^2}{m^2-1} - 2 > 0 \end{cases}$$

$$(2 - m^2)(m^2 - 1) > 0$$

Щоб крива була еліпсом, має бути

$$\begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ \frac{m^2}{m^2 - 1} - 2 > 0 \end{cases}$$

$$(2 - m^2)(m^2 - 1) > 0$$



Відповідь: $1 < |m| < \sqrt{2}$.

Пункт б) розв'язати самостійно.

Задача 2

Довести, що площина $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ перетинає однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ за прямолінійними твірними. Скласти рівняння цих прямолінійних твірних.

Прямолінійні твірні:

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1 - \frac{y^2}{4^2}.$$

Прямолінійні твірні:

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1 - \frac{y^2}{4^2}.$$

Тоді, за формулою різниці квадратів отримаємо

$$\left(\frac{x}{5} - \frac{z}{2}\right) \left(\frac{x}{5} + \frac{z}{2}\right) = \left(1 - \frac{y}{4}\right) \left(1 + \frac{y}{4}\right).$$

Прямолінійні твірні:

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1 - \frac{y^2}{4^2}.$$

Тоді, за формулою різниці квадратів отримаємо

$$\left(\frac{x}{5} - \frac{z}{2}\right) \left(\frac{x}{5} + \frac{z}{2}\right) = \left(1 - \frac{y}{4}\right) \left(1 + \frac{y}{4}\right).$$

Звідси маємо два сімейства прямих, заданих у формі перетину двох площин:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = u \left(1 + \frac{y}{4}\right); \\ \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = \frac{1}{u} \left(1 - \frac{y}{4}\right); \end{cases} \text{ та } \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = \frac{1}{v} \left(1 + \frac{y}{4}\right); \\ \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = v \left(1 - \frac{y}{4}\right), \end{cases}$$

Перетворимо рівняння площини:

$$4x - 5y - 10z - 20 = 0$$

Перетворимо рівняння площини:

$$4x - 5y - 10z - 20 = 0 \Rightarrow 4x - 10z = 20 + 5y$$

Перетворимо рівняння площини:

$$4x - 5y - 10z - 20 = 0 \Rightarrow 4x - 10z = 20 + 5y \Rightarrow \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = 1 + \frac{y}{4}$$

Перетворимо рівняння площини:

$$4x - 5y - 10z - 20 = 0 \Rightarrow 4x - 10z = 20 + 5y \Rightarrow \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = 1 + \frac{y}{4}$$

Це перший випадок. $u = 1$.

Перетворимо рівняння площини:

$$4x - 5y - 10z - 20 = 0 \Rightarrow 4x - 10z = 20 + 5y \Rightarrow \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = 1 + \frac{y}{4}$$

Це перший випадок. $u = 1$.

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = \left(1 + \frac{y}{4}\right); \\ \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = \left(1 - \frac{y}{4}\right); \end{cases}$$

Задача 2

Скласти рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, які паралельні до площини $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

Розв'язати самостійно.

Задача 3

Дослідити і побудувати поверхню другого порядку, яку задано рівнянням

$$5(x+1)^2 + 3y^2 = 15z.$$

$$x = -1:$$

$$15z = 3y^2 - \text{парабола}$$

$$x = -1:$$

$$15z = 3y^2 - \text{парабола}$$

$$y = 0:$$

$$15z = 5(x + 1)^2 - \text{парабола}$$

$$x = -1:$$

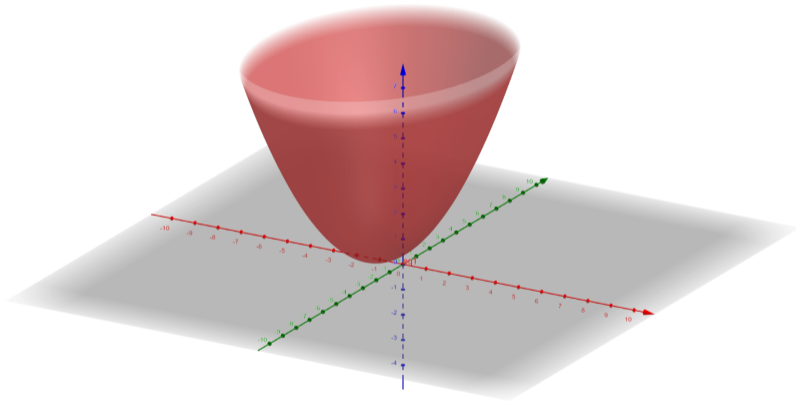
$$15z = 3y^2 - \text{парабола}$$

$$y = 0:$$

$$15z = 5(x + 1)^2 - \text{парабола}$$

$$z = 3:$$

$$5(x + 1)^2 + 3y^2 = 45 - \text{еліпс}$$



Задача 3

Дослідити і побудувати поверхню другого порядку, яку задано рівнянням

$$4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3 = 0.$$

$$4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$$

$$4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$$

$$(4x^2 - 2 \cdot 2x + 1) - (y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 4) - 1 + 4 - 3 = 0$$

$$4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$$

$$(4x^2 - 2 \cdot 2x + 1) - (y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 4) - 1 + 4 - 3 = 0$$

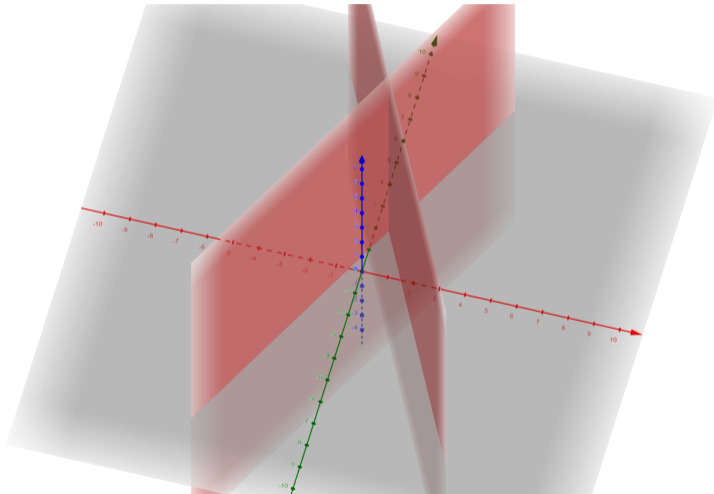
$$(2x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 0$$

$$4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$$

$$(4x^2 - 2 \cdot 2x + 1) - (y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 4) - 1 + 4 - 3 = 0$$

$$(2x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 0$$

$$(2x - y + 1)(2x + y - 3) = 0 \text{ — пара площин}$$



Задача 3

Дослідити і побудувати поверхню другого порядку, яку задано рівнянням

$$x^2 + 2y^2 - 2z = 0.$$

$$x^2 + 2y^2 = 2z - \text{параболоїд}$$

$$x = 0:$$

$$z = y^2 - \text{парабола}$$

$$x^2 + 2y^2 = 2z - \text{параболоїд}$$

$$x = 0:$$

$$z = y^2 - \text{парабола}$$

$$y = 0:$$

$$z = \frac{x^2}{2} - \text{парабола}$$

$$x^2 + 2y^2 = 2z - \text{параболоїд}$$

$$x = 0:$$

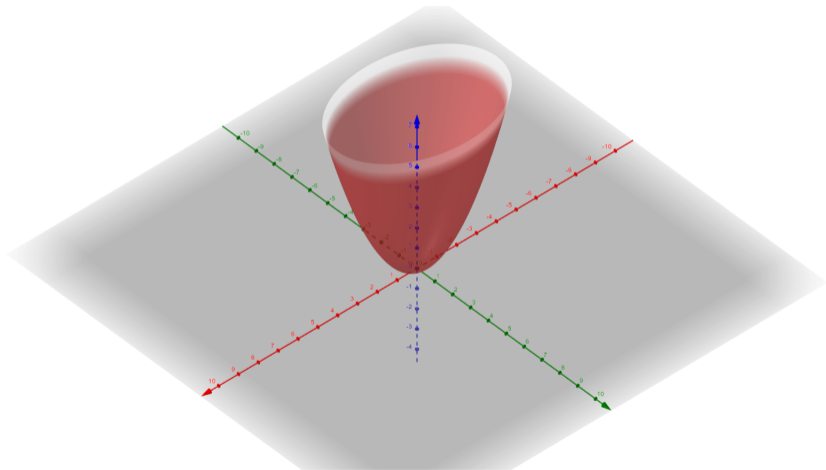
$$z = y^2 - \text{парабола}$$

$$y = 0:$$

$$z = \frac{x^2}{2} - \text{парабола}$$

$$z = 2:$$

$$x^2 + 2y^2 = 4 - \text{еліпс}$$



Задача 3

Дослідити і побудувати поверхню другого порядку, яку задано рівнянням

$$x^2 - 2z + 4x = 0.$$

$$x^2 + 4x + 4 = 2z + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 2z + 4$$

$$\frac{(x + 2)^2}{2} = z + 2$$

