Дослідження і побудова графіків функцій

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.
6. Області опуклості і увігнутості.

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.
6. Області опуклості і увігнутості.
7. Точки перегину. (Якщо вони є).

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.
6. Області опуклості і увігнутості.
7. Точки перегину. (Якщо вони є).
8. Асимптоти. (Якщо вони є).

Порядок дослідження

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.
6. Області опуклості і увігнутості.
7. Точки перегину. (Якщо вони є).
8. Асимптоти. (Якщо вони є).
9. Побудова графіка.

Приклад

Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. $y = \dfrac{x^3}{3} - 4x$

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty; \infty)$.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є непарною $\left(y(-x) = -\dfrac{x^3}{3} + 4x = -y(x)\right)$.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є непарною $\left(y(-x) = -\dfrac{x^3}{3} + 4x = -y(x)\right)$.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x = 0$, $y = 0$;

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є непарною $\left(y(-x) = -\dfrac{x^3}{3} + 4x = -y(x)\right)$.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x = 0$, $y = 0$; з віссю Ox: $y = 0$, $x = 0$, $x = \pm\sqrt{12}$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{3} - 4x}{x}$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3}{3} - 4x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{3} - 4 = \infty$ – похилих асимптот не існує.

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]' = x^2 - 4$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]' = x^2 - 4$$

Рівняння для критичних точок:

$$x^2 - 4 = 0$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]' = x^2 - 4$$

Рівняння для критичних точок:

$$x^2 - 4 = 0$$

Корені – $x = \pm 2$.

Точки перегину

6. Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = 2x$$

Точки перегину

6. Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = 2x$$

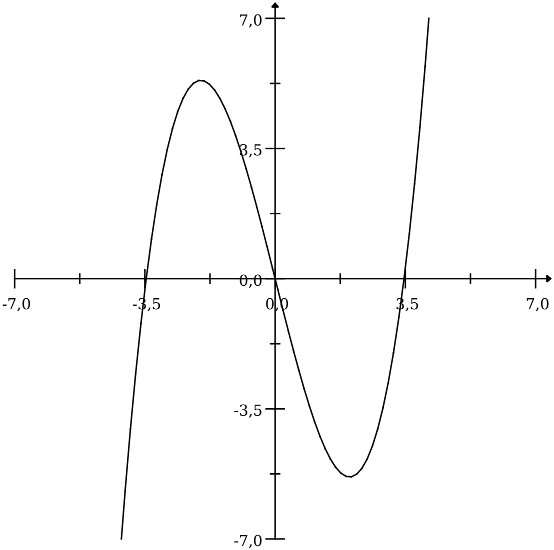
Прирівнюючи до нуля, знаходимо:

$$x = 0$$

Таблиця

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	зростає, опукла	max	спадає, опукла	перегин	спадає, увігнута	min	зростає, увігнута

Графік функції



Приклад

Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. $y = \dfrac{2\ln x}{x}$

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (0; \infty)$.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (0; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (0; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy не перетинається;

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (0; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy не перетинається; з віссю Ox: $y = 0$, $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальна асимптота $x = 0$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальна асимптота $x = 0$. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальна асимптота $x = 0$. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{x}$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальна асимптота $x = 0$. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2}$

Асимптоти кривої

4. Вертикальна асимптота $x = 0$. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x^2} = 0$$

4. Вертикальна асимптота $x = 0$. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2} = 0$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальна асимптота $x = 0$. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x^2} = 0$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x}$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальна асимптота $x = 0$. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x^2} = 0$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальна асимптота $x = 0$. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2} = 0$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$$

Похила асимптота – $y = 0$.

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[\frac{2\ln x}{x}\right]' = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[\frac{2\ln x}{x}\right]' = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

Рівняння для критичних точок:

$$1 - \ln x = 0$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[\frac{2\ln x}{x}\right]' = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

Рівняння для критичних точок:

$$1 - \ln x = 0$$

Корінь – $x = e$.

Точки перегину

6. Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{4\ln x - 6}{x^3}$$

Точки перегину

6. Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{4\ln x - 6}{x^3}$$

Прирівнюючи до нуля, знаходимо:

$$2\ln x - 3 = 0$$

Точки перегину

6. Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{4\ln x - 6}{x^3}$$

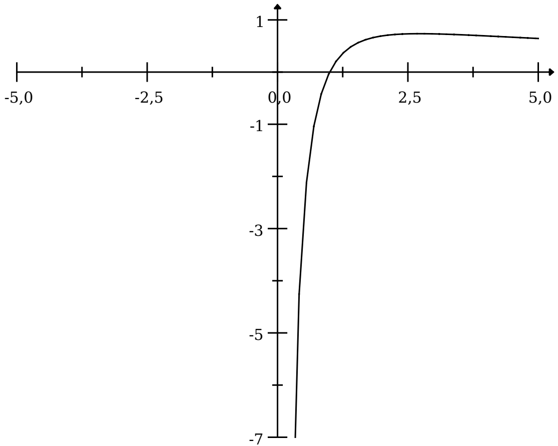
Прирівнюючи до нуля, знаходимо:

$$2\ln x - 3 = 0 \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \approx 4,481689$$

Таблиця

x	$(0;e)$	e	$(e;\ e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}$	$(e^{\frac{3}{2}};\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	зростає, опукла	max	спадає, опукла	перегин	спадає, увігнута

Графік функції



Приклад

Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty; \infty)$.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x = 0$, $y = 0$;

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x = 0$, $y = 0$; з віссю Ox: $2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0$

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x = 0$, $y = 0$; з віссю Ox: $2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x = 0$, $y = 0$; з віссю Ox: $2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{27}{8}$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x}$

Асимптоти кривої

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = 2$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = 2$$
$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right)$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = 2$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right)$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = 2$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right) = \infty$$

Похилих асимптот не існує.

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[2x - 3\sqrt[3]{x^2}\right]' = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}}$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[2x - 3\sqrt[3]{x^2}\right]' = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}}}$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[2x - 3\sqrt[3]{x^2}\right]' = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}}}$$

Рівняння для критичних точок:

$$2x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[2x - 3\sqrt[3]{x^2}\right]' = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}}}$$

Рівняння для критичних точок:

$$2x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$$

Корінь – $x = 1$.

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[2x - 3\sqrt[3]{x^2}\right]' = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}}}$$

Рівняння для критичних точок:

$$2x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$$

Корінь – $x = 1$.
$x = 0$ – теж критична точка (похідна не існує).

Точки перегину

6. Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

Точки перегину

6. Знайдемо другу похідну функції:

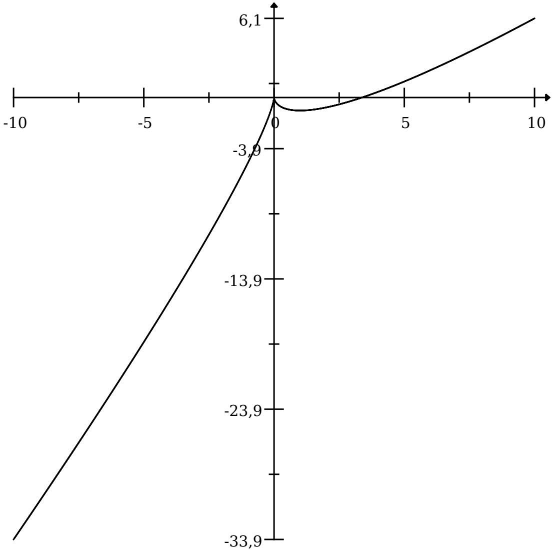
$$y'' = \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

Друга похідна не існує у точці $x = 0$.

Таблиця

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ 1)$	1	$(1;\ \infty)$
$f'(x)$	$+$	не існує	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	не існує	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	зростає, увігнута	max	спадає, увігнута	min	зростає, увігнута

Графік функції



Приклад

Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжки $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжки $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є непарною $\left(y(-x) = -\dfrac{x^3}{x^2 - 4} = -y(x)\right)$.

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжки $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є непарною $\left(y(-x) = -\dfrac{x^3}{x^2 - 4} = -y(x)\right)$.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x = 0$, $y = 0$;

За пунктами

1. Областю визначення даної функції є проміжки $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є непарною $\left(y(-x) = -\dfrac{x^3}{x^2-4} = -y(x)\right)$.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x = 0$, $y = 0$; з віссю Ox: $y = 0$, $x = 0$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальні асимптоти – $x = \pm 2$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальні асимптоти – $x = \pm 2$.
   Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.

Асимптоти кривої

4. Вертикальні асимптоти – $x = \pm 2$.
   Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
   $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x}$$

4. Вертикальні асимптоти – $x = \pm 2$.
Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4}$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальні асимптоти – $x = \pm 2$.
   Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
   $$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальні асимптоти – $x = \pm 2$.
   Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
   $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$
   $$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальні асимптоти – $x = \pm 2$.
   Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
   $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$
   $$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x \right)$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальні асимптоти – $x = \pm 2$.
   Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
   $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4} = 1$
   $$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x}{x^2-4} \right)$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальні асимптоти – $x = \pm 2$.
   Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
   $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$
   $$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x}{x^2-4}\right) = 0$$

Асимптоти кривої

4. Вертикальні асимптоти – $x = \pm 2$.
   Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
   $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$
   $$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x}{x^2-4} \right) = 0$$
   Похила асимптота – $y = x$.

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[\frac{x^3}{x^2 - 4}\right]' = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[\frac{x^3}{x^2 - 4}\right]' = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

   Рівняння для критичних точок:

$$x^2(x^2 - 12) = 0$$

Точки екстремуму

5. Знаходимо точки екстремуму.

$$y' = \left[\frac{x^3}{x^2 - 4}\right]' = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

Рівняння для критичних точок:

$$x^2(x^2 - 12) = 0$$

Корені – $x = 0$, $x = \pm\sqrt{12} \approx \pm 3,4641$.

Точки перегину

6. Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

Прирівнюючи до нуля, знаходимо:

$$x = 0$$

Точки перегину

6. Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

Прирівнюючи до нуля, знаходимо:

$$x = 0$$

Таблиця

x	$< -\sqrt{12}$	$-\sqrt{12}$	$(-\sqrt{12};-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\ \sqrt{12})$	$\sqrt{12}$	$> \sqrt{12}$
f'	$+$	0	$-$	$\varnothing$	$-$	0	$-$	$\varnothing$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	$\varnothing$	$+$	0	-	$\varnothing$	$+$	$+$	$+$
f	зростає, опукла	max	спадає, опукла	$-$	сп., ув.	п	зр., ув.	$-$	спадає, ув.	min	зр., ув.

Графік функції