Розв'язання задач на рівняння площини у просторі

Задача 1

Скласти рівняння площини, яка проходить крізь точку $M_1(2;1;-1)$ і має вектор нормалі $\vec{n} = (1;-2;3)$.

Розв'язання

Скористаємося формулою рівняння площини, яка проходить крізь точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Розв'язання

Скористаємося формулою рівняння площини, яка проходить крізь точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

За умовами задачі маємо

$$1 \cdot (x - 2) + (-2) \cdot (y - 1) + 3 \cdot (z - (-1)) = 0.$$

Розв'язання

Скористаємося формулою рівняння площини, яка проходить крізь точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

За умовами задачі маємо

$$1 \cdot (x - 2) + (-2) \cdot (y - 1) + 3 \cdot (z - (-1)) = 0.$$

Спрощуючи,

$$x - 2y + 3z + 3 = 0.$$

Задача 2

Скласти рівняння площини, що проходить крізь точку $M_1(3;4;-5)$ паралельно до векторів $\vec{a}_1 = (3;1;-1)$ і $\vec{a}_2 = (1;-2;1)$.

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$.

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$. Тому можна покласти $\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$.
Тому можна покласти $\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.

$$\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$.
Тому можна покласти $\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.

$$\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$.
Тому можна покласти $\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.

$$\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2))\vec{i} - (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1)\vec{j} + (3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1)\vec{k}$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$. Тому можна покласти $\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.

$$\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1\cdot 1-(-1)\cdot(-2))\vec{i}-(3\cdot 1-(-1)\cdot 1)\vec{j}+(3\cdot(-2)-1\cdot 1)\vec{k} = -\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$.
Тому можна покласти $\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.

$$\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2))\vec{i} - (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1)\vec{j} + (3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1)\vec{k} = -\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k} = (-1; -4; -7).$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$.
Тому можна покласти $\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.

$$\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1\cdot 1-(-1)\cdot(-2))\vec{i}-(3\cdot 1-(-1)\cdot 1)\vec{j}+(3\cdot(-2)-1\cdot 1)\vec{k} = -\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k} = (-1;-4;-7).$$

Користуючись рівнянням площини, яка проходить крізь точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (A; B; C)$, маємо:

$$(-1)\cdot(x-3) + (-4)\cdot(y-4) + (-7)\cdot(z-(-5)) = 0.$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$. Тому можна покласти $\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.

$$\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1\cdot 1-(-1)\cdot(-2))\vec{i}-(3\cdot 1-(-1)\cdot 1)\vec{j}+(3\cdot(-2)-1\cdot 1)\vec{k} = -\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k} = (-1;-4;-7).$$

Користуючись рівнянням площини, яка проходить крізь точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (A; B; C)$, маємо:

$$(-1)\cdot(x-3)+(-4)\cdot(y-4)+(-7)\cdot(z-(-5)) = 0.$$

$$x + 4y + 7z + 16 = 0.$$

Задача 3

Скласти рівняння площини, що проходить крізь точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ та $M_3(2;0;2)$.

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$.

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$. Тому можна покласти $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$. Тому можна покласти $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4 - 3; -1 - (-1); -1 - 2)$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$. Тому можна покласти $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4-3; -1-(-1); -1-2) = (1; 0; -3);$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$. Тому можна покласти $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4-3; -1-(-1); -1-2) = (1; 0; -3);$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (2-3; 0-(-1); 2-2)$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$. Тому можна покласти $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4-3; -1-(-1); -1-2) = (1; 0; -3);$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (2-3; 0-(-1); 2-2) = (-1; 1; 0);$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$. Тому можна покласти $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4-3; -1-(-1); -1-2) = (1; 0; -3);$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (2-3; 0-(-1); 2-2) = (-1; 1; 0);$$

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$. Тому можна покласти $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4-3; -1-(-1); -1-2) = (1; 0; -3);$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (2-3; 0-(-1); 2-2) = (-1; 1; 0);$$

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$. Тому можна покласти $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4-3; -1-(-1); -1-2) = (1; 0; -3);$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (2-3; 0-(-1); 2-2) = (-1; 1; 0);$$

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (0\cdot 0 - (-3)\cdot 1)\vec{i} - (1\cdot 0 - (-3)\cdot(-1))\vec{j} + (1\cdot 1 - 0\cdot(-1))\vec{k}$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$. Тому можна покласти $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4-3; -1-(-1); -1-2) = (1; 0; -3);$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (2-3; 0-(-1); 2-2) = (-1; 1; 0);$$

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (0\cdot 0 - (-3)\cdot 1)\vec{i} - (1\cdot 0 - (-3)\cdot(-1))\vec{j} + (1\cdot 1 - 0\cdot(-1))\vec{k} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

Розв'язання

Вектор нормалі площини є перпендикулярним одночасно до $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$. Тому можна покласти $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4-3; -1-(-1); -1-2) = (1; 0; -3);$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (2-3; 0-(-1); 2-2) = (-1; 1; 0);$$

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (0\cdot 0 - (-3)\cdot 1)\vec{i} - (1\cdot 0 - (-3)\cdot(-1))\vec{j} + (1\cdot 1 - 0\cdot(-1))\vec{k} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} = (3; 3; 1).$$

Далі самостійно.

Розв'язання

Користуючись рівнянням площини, яка проходить крізь точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (A; B; C)$, маємо:

$$3 \cdot (x - 3) + 3 \cdot (y - (-1)) + 1 \cdot (z - 2) = 0.$$

Розв'язання

Користуючись рівнянням площини, яка проходить крізь точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = (A; B; C)$, маємо:

$$3 \cdot (x - 3) + 3 \cdot (y - (-1)) + 1 \cdot (z - 2) = 0.$$

$$3x + 3y + z - 8 = 0.$$

Задача 4

Скласти рівняння площини, яка проходить крізь точку $M_1(2; -1; 1)$ перпендикулярно до двох площин, $2x - z + 1 = 0$ і $y = 0$.

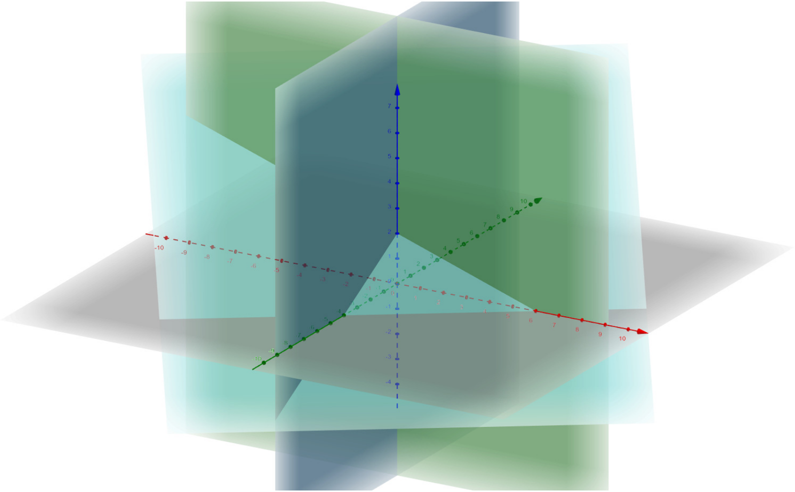
Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача 4

Обчислити об'єм піраміди, яку обмежено площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ та координатними площинами.

Розв’язання



Розв'язання

Скористаємося рівнянням площини «у відрізках».

Розв'язання

Скористаємося рівнянням площини «у відрізках».

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6z = 12 \Rightarrow \frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$$

Розв'язання

Скористаємося рівнянням площини «у відрізках».

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6z = 12 \Rightarrow \frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$$

Отже, площина відтинає на осях координатної системи відрізки $a = 6$, $b = -4$, $c = 2$.

Розв'язання

Скористаємося рівнянням площини «у відрізках».

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6z = 12 \Rightarrow \frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$$

Отже, площина відтинає на осях координатної системи відрізки $a = 6$, $b = -4$, $c = 2$.

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6}|abc|$$

Розв'язання

Скористаємося рівнянням площини «у відрізках».

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6z = 12 \Rightarrow \frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$$

Отже, площина відтинає на осях координатної системи відрізки $a = 6$, $b = -4$, $c = 2$.

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6}|abc| = 8.$$

Задача 5

Скласти рівняння площини, що відтинає на вісі Oz відрізок $c = -5$ і є перпендикулярною до вектора $\vec{n} = (-2; 1; 3)$.

Розв'язання

Нехай нам відоме рівняння цієї площини «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Розв'язання

Нехай нам відоме рівняння цієї площини «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Тоді $c = -5$.

Розв'язання

Нехай нам відоме рівняння цієї площини «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Тоді $c = -5$.
Вектор нормалі площини має бути паралельним до $\vec{n}$, тому координати цього вектора мають бути пропорційними до координат $\vec{n}$:

$$\frac{1}{-2 \cdot a} = \frac{1}{1 \cdot b} = \frac{1}{3 \cdot c} = \frac{1}{3 \cdot (-5)}$$

Розв'язання

Нехай нам відоме рівняння цієї площини «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Тоді $c = -5$.
Вектор нормалі площини має бути паралельним до $\vec{n}$, тому координати цього вектора мають бути пропорційними до координат $\vec{n}$:

$$\frac{1}{-2 \cdot a} = \frac{1}{1 \cdot b} = \frac{1}{3 \cdot c} = \frac{1}{3 \cdot (-5)}$$

Звідси $a = 15/2$, $b = -15$.

Розв'язання

Нехай нам відоме рівняння цієї площини «у відрізках».

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Тоді $c = -5$.
Вектор нормалі площини має бути паралельним до $\vec{n}$, тому координати цього вектора мають бути пропорційними до координат $\vec{n}$:

$$\frac{1}{-2 \cdot a} = \frac{1}{1 \cdot b} = \frac{1}{3 \cdot c} = \frac{1}{3 \cdot (-5)}$$

Звідси $a = 15/2$, $b = -15$.
Відповідь: $\frac{x}{7{,}5} - \frac{y}{15} - \frac{z}{5} = 1$.

Задача 6

Привести рівняння площин до нормального вигляду

1. $2x - 2y + z - 18 = 0$
2. $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$
3. $5y - 12z + 26 = 0$

Розв'язання

1. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Розв'язання

1. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$

Розв'язання

1. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \pm\frac{1}{3}$$

Розв'язання

1. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \pm\frac{1}{3}$$

Вибираємо «+», щоб вільний член лишився від'ємним.

Розв'язання

1. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \pm\frac{1}{3}$$

Вибираємо «+», щоб вільний член лишився від'ємним.

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0$$

Розв'язання

2. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Розв'язання

2. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2}}$$

Розв'язання

2. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(-\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{7}\right)^2}} = \pm 1$$

Розв'язання

2. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2}} = \pm 1$$

Вибираємо «-», щоб вільний член лишився від'ємним.

Розв'язання

2. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(-\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{7}\right)^2}} = \pm 1$$

Вибираємо «-», щоб вільний член лишився від'ємним.

$$-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0$$

Розв'язання

3. Розв'язати самостійно.

Задача 7

Обчислити величину відхилення δ і відстань d від точки $M_1(-2; -4; 3)$ до площини $2x - y + 2z + 3 = 0$.

Розв'язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду.

Розв’язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Розв'язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}$$

Розв'язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \pm \frac{1}{3}$$

Розв'язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \pm\frac{1}{3}$$

Вибираємо «-», щоб вільний член лишився від'ємним.

Розв'язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \pm\frac{1}{3}$$

Вибираємо «-», щоб вільний член лишився від'ємним.

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 1 = 0$$

Розв'язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \pm\frac{1}{3}$$

Вибираємо «-», щоб вільний член лишився від'ємним.

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 1 = 0$$

$$\delta(M_1) = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + \frac{1}{3} \cdot (-4) - \frac{2}{3} \cdot 3 - 1$$

Розв'язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \pm \frac{1}{3}$$

Вибираємо «-», щоб вільний член лишився від'ємним.

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 1 = 0$$

$$\delta(M_1) = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + \frac{1}{3} \cdot (-4) - \frac{2}{3} \cdot 3 - 1 = -3$$

Розв'язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \pm\frac{1}{3}$$

Вибираємо «-», щоб вільний член лишився від'ємним.

$$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1=0$$

$$\delta(M_1) = -\frac{2}{3}\cdot(-2)+\frac{1}{3}\cdot(-4)-\frac{2}{3}\cdot 3-1=-3$$

$$d(M_1)=|\delta(M_1)|$$

Розв'язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \pm\frac{1}{3}$$

Вибираємо «-», щоб вільний член лишився від'ємним.

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 1 = 0$$

$$\delta(M_1) = -\frac{2}{3}\cdot(-2) + \frac{1}{3}\cdot(-4) - \frac{2}{3}\cdot 3 - 1 = -3$$

$$d(M_1) = |\delta(M_1)| = |-3|$$

Розв'язання

Спочатку перетворимо рівняння площини до нормального вигляду. Визначаємо нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \pm\frac{1}{3}$$

Вибираємо «-», щоб вільний член лишився від'ємним.

$$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1=0$$

$$\delta(M_1) = -\frac{2}{3}\cdot(-2)+\frac{1}{3}\cdot(-4)-\frac{2}{3}\cdot 3-1=-3$$

$$d(M_1) = |\delta(M_1)| = |-3| = 3.$$

Задача 8

Довести, що площина $5x - 2y + z - 1 = 0$ не перетинає відрізка, обмеженого точками $M_1(1; 4; -3)$ та $M_2(2; 5; 0)$.

Розв'язання

Щоб пряма не перетинала відрізок, відхилення (ліві частини нормального рівняння прямої) для точок M_1 і M_2 мають бути одного знаку. Тому, незалежно від знаку нормувального множника μ, знаки лівих частин початкового рівняння після підставляння координат M_1 і M_2 мають бути однаковими.

Розв'язання

Щоб пряма не перетинала відрізок, відхилення (ліві частини нормального рівняння прямої) для точок M_1 і M_2 мають бути одного знаку. Тому, незалежно від знаку нормувального множника μ, знаки лівих частин початкового рівняння після підставляння координат M_1 і M_2 мають бути однаковими.

$$5 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + (-3) - 1 = -7 < 0;$$

Розв'язання

Щоб пряма не перетинала відрізок, відхилення (ліві частини нормального рівняння прямої) для точок M_1 і M_2 мають бути одного знаку. Тому, незалежно від знаку нормувального множника μ, знаки лівих частин початкового рівняння після підставляння координат M_1 і M_2 мають бути однаковими.

$$5 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + (-3) - 1 = -7 < 0;$$

$$5 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 0 - 1 = -1 < 0,$$

Розв'язання

Щоб пряма не перетинала відрізок, відхилення (ліві частини нормального рівняння прямої) для точок M_1 і M_2 мають бути одного знаку. Тому, незалежно від знаку нормувального множника μ, знаки лівих частин початкового рівняння після підставляння координат M_1 і M_2 мають бути однаковими.

$$5 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + (-3) - 1 = -7 < 0;$$

$$5 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 0 - 1 = -1 < 0,$$

що й слід було встановити.

Задача 9

Скласти рівняння площини, яка ділить навпіл гострий двогранний кут, який утворено двома площинами, $2x - 3y - 4z - 3 = 0$, $4x - 3y - 2z - 3 = 0$.

Розв'язання

Відстань від точок шуканої площини до двох заданих площин має бути однаковою. Тому, якщо $M(x; y; z)$ належить шуканій площині,

$$d_1(M) = d_2(M)$$

Розв'язання

Відстань від точок шуканої площини до двох заданих площин має бути однаковою. Тому, якщо $M(x;y;z)$ належить шуканій площині,

$$d_1(M) = d_2(M)$$

Знаходимо нормальні рівняння площин з умови:

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y - \frac{4}{\sqrt{29}}z - \frac{3}{\sqrt{29}} = 0, \frac{4}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y - \frac{2}{\sqrt{29}}z - \frac{3}{\sqrt{29}} = 0$$

Розв'язання

Відстань від точок шуканої площини до двох заданих площин має бути однаковою. Тому, якщо $M(x;y;z)$ належить шуканій площині,

$$d_1(M) = d_2(M)$$

Знаходимо нормальні рівняння площин з умови:

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y - \frac{4}{\sqrt{29}}z - \frac{3}{\sqrt{29}} = 0, \frac{4}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y - \frac{2}{\sqrt{29}}z - \frac{3}{\sqrt{29}} = 0$$

Прирівнюємо відстані:

$$\left|\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y - \frac{4}{\sqrt{29}}z - \frac{3}{\sqrt{29}}\right| = \left|\frac{4}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y - \frac{2}{\sqrt{29}}z - \frac{3}{\sqrt{29}}\right|$$

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3$$

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3 \Rightarrow 2x + 2z = 0$$

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0$$

Розкриваємо модулі з різними знаками:

$2x - 3y - 4z - 3 = -4x + 3y + 2z + 3$

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0$$

Розкриваємо модулі з різними знаками:

$2x - 3y - 4z - 3 = -4x + 3y + 2z + 3 \Rightarrow 6x - 6y - 6z - 6 = 0$

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0$$

Розкриваємо модулі з різними знаками:

$$2x - 3y - 4z - 3 = -4x + 3y + 2z + 3 \Rightarrow 6x - 6y - 6z - 6 = 0 \Rightarrow x - y - z - 1 = 0$$

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0$$

Розкриваємо модулі з різними знаками:

$$2x - 3y - 4z - 3 = -4x + 3y + 2z + 3 \Rightarrow 6x - 6y - 6z - 6 = 0 \Rightarrow x - y - z - 1 = 0$$

Гострий кут ділить та площина, нормаль якої утворює більший кут із нормалями площин з умови.

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0$$

Розкриваємо модулі з різними знаками:

$$2x - 3y - 4z - 3 = -4x + 3y + 2z + 3 \Rightarrow 6x - 6y - 6z - 6 = 0 \Rightarrow x - y - z - 1 = 0$$

Гострий кут ділить та площина, нормаль якої утворює більший кут із нормалями площин з умови.

$$\cos\alpha_1 = \left| \frac{(2; -3; -4) \cdot (1; 0; 1)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} \right|$$

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0$$

Розкриваємо модулі з різними знаками:

$$2x - 3y - 4z - 3 = -4x + 3y + 2z + 3 \Rightarrow 6x - 6y - 6z - 6 = 0 \Rightarrow x - y - z - 1 = 0$$

Гострий кут ділить та площина, нормаль якої утворює більший кут із нормалями площин з умови.

$$\cos \alpha_1 = \left| \frac{(2; -3; -4) \cdot (1; 0; 1)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{58}}$$

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0$$

Розкриваємо модулі з різними знаками:

$$2x - 3y - 4z - 3 = -4x + 3y + 2z + 3 \Rightarrow 6x - 6y - 6z - 6 = 0 \Rightarrow x - y - z - 1 = 0$$

Гострий кут ділить та площина, нормаль якої утворює більший кут із нормалями площин з умови.

$$\cos\alpha_1 = \left|\frac{(2;-3;-4)\cdot(1;0;1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{58}}$$

$$\cos\alpha_2 = \left|\frac{(2;-3;-4)\cdot(1;-1;-1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}\right|$$

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0$$

Розкриваємо модулі з різними знаками:

$$2x - 3y - 4z - 3 = -4x + 3y + 2z + 3 \Rightarrow 6x - 6y - 6z - 6 = 0 \Rightarrow x - y - z - 1 = 0$$

Гострий кут ділить та площина, нормаль якої утворює більший кут із нормалями площин з умови.

$$\cos\alpha_1 = \left|\frac{(2;-3;-4)\cdot(1;0;1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{58}}$$

$$\cos\alpha_2 = \left|\frac{(2;-3;-4)\cdot(1;-1;-1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}\right| = \frac{9}{\sqrt{87}}$$

Розв'язання

Розкриваємо модулі з одним знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = 4x - 3y - 2z - 3 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0$$

Розкриваємо модулі з різними знаками:

$$2x - 3y - 4z - 3 = -4x + 3y + 2z + 3 \Rightarrow 6x - 6y - 6z - 6 = 0 \Rightarrow x - y - z - 1 = 0$$

Гострий кут ділить та площина, нормаль якої утворює більший кут із нормалями площин з умови.

$$\cos\alpha_1 = \left|\frac{(2;-3;-4)\cdot(1;0;1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{58}}$$

$$\cos\alpha_2 = \left|\frac{(2;-3;-4)\cdot(1;-1;-1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}\right| = \frac{9}{\sqrt{87}}$$

Відповідь: $x - y - z - 1 = 0$