Область визначення функції двох змінних. Границя функції двох змінних у точці

Задача

Знайти область визначення функції

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Це рівняння кола. Відповідна крива ділить площину на дві області.

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Це рівняння кола. Відповідна крива ділить площину на дві області. Перевіряємо, яка з областей є відповідною нерівності за допомогою тестових точок $A(0;0)$ (усередині області) та $B(5;0)$ (ззовні області).

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Це рівняння кола. Відповідна крива ділить площину на дві області. Перевіряємо, яка з областей є відповідною нерівності за допомогою тестових точок $A(0;0)$ (усередині області) та $B(5;0)$ (ззовні області).

$$4 - 0^2 - 0^2 > 0$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Це рівняння кола. Відповідна крива ділить площину на дві області. Перевіряємо, яка з областей є відповідною нерівності за допомогою тестових точок $A(0;0)$ (усередині області) та $B(5;0)$ (ззовні області).

$$4 - 0^2 - 0^2 > 0$$

$$4 - 5^2 - 0^2 = -21 < 0$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

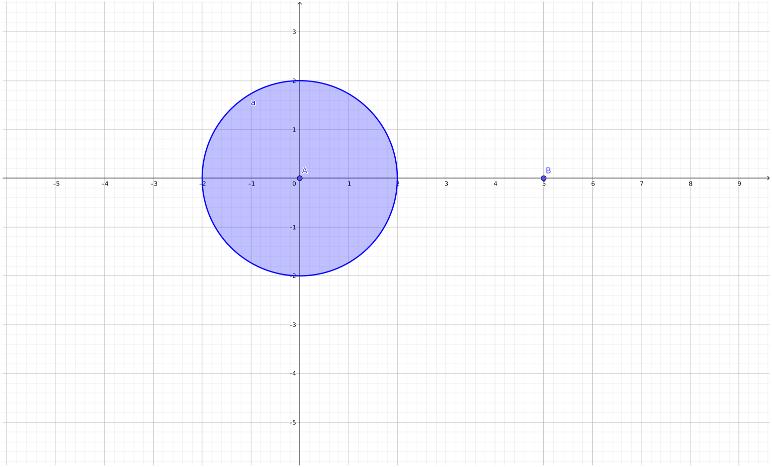
Це рівняння кола. Відповідна крива ділить площину на дві області. Перевіряємо, яка з областей є відповідною нерівності за допомогою тестових точок $A(0;0)$ (усередині області) та $B(5;0)$ (ззовні області).

$$4 - 0^2 - 0^2 > 0$$

$$4 - 5^2 - 0^2 = -21 < 0$$

Отже, A належить області, а B не належить.

Рисунок області



Задача

Знайти область визначення функції

$$z = \arcsin(3 - x^2 - y^2)$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$3 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$
$$3 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$3 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$
$$3 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

Це рівняння кіл. Відповідні криві ділять площину на три області.

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$3 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$
$$3 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

Це рівняння кіл. Відповідні криві ділять площину на три області. Перевіряємо, яка з областей є відповідною нерівності за допомогою тестових точок $A(0;0)$ та $B(5;0)$.

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$3 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$
$$3 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

Це рівняння кіл. Відповідні криві ділять площину на три області. Перевіряємо, яка з областей є відповідною нерівності за допомогою тестових точок $A(0;0)$ та $B(5;0)$.

$$3 - 0^2 - 0^2 > -1 \cup 3 - 0^2 - 0^2 > 1$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$3 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$
$$3 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

Це рівняння кіл. Відповідні криві ділять площину на три області. Перевіряємо, яка з областей є відповідною нерівності за допомогою тестових точок $A(0;0)$ та $B(5;0)$.

$$3 - 0^2 - 0^2 > -1 \cup 3 - 0^2 - 0^2 > 1$$

$$3 - 5^2 - 0^2 = -22 < -1$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$3 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$
$$3 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

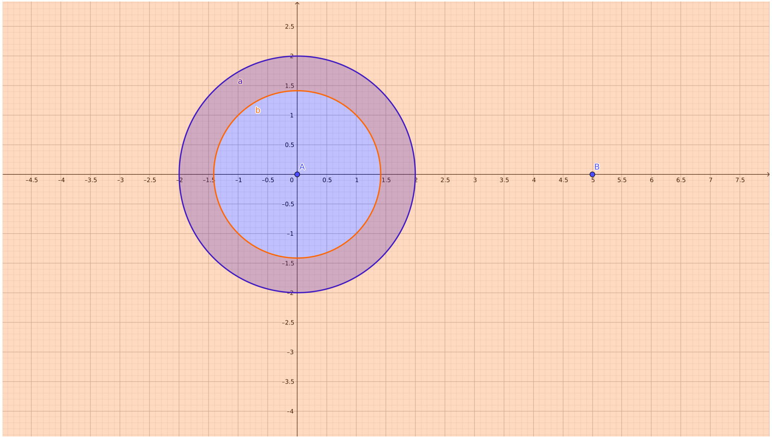
Це рівняння кіл. Відповідні криві ділять площину на три області. Перевіряємо, яка з областей є відповідною нерівності за допомогою тестових точок $A(0;0)$ та $B(5;0)$.

$$3 - 0^2 - 0^2 > -1 \cup 3 - 0^2 - 0^2 > 1$$

$$3 - 5^2 - 0^2 = -22 < -1$$

Отже, A і B не належать області.

Рисунок області



Задача

Знайти область визначення функції

$$z = \arcsin 3xy$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3xy \leqslant 1$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3xy \leqslant 1$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межі:

$$3xy = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3x}$$

$$3xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3x}$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3xy \leqslant 1$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межі:

$$3xy = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3x}$$

$$3xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3x}$$

Це рівняння гіпербол.

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$-1 \leqslant 3xy \leqslant 1$$

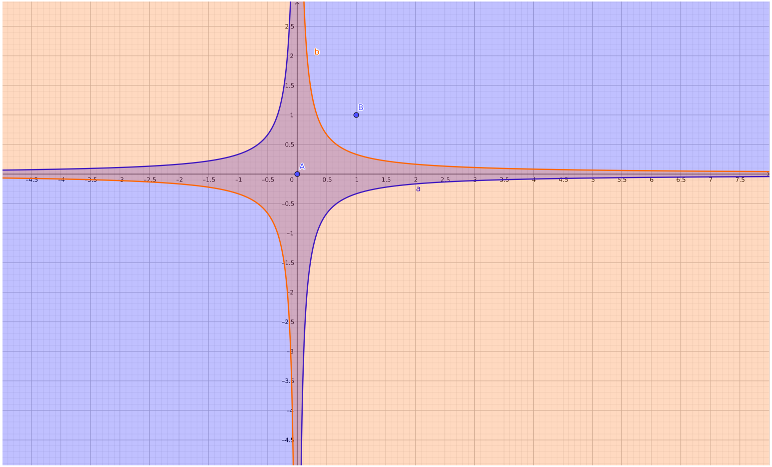
Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межі:

$$3xy = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3x}$$

$$3xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3x}$$

Це рівняння гіпербол.
Перевіряємо, яка з областей є відповідною нерівності за допомогою тестових точок $A(0;0)$ та $B(1;1)$.

Рисунок області



Задача

Знайти область визначення функції

$$z = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$\begin{cases} -1 \leqslant 1 - x^2 - y^2 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 2xy \leqslant 1 \end{cases}$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$\begin{cases} -1 \leqslant 1 - x^2 - y^2 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 2xy \leqslant 1 \end{cases}$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$1 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$\begin{cases} -1 \leqslant 1 - x^2 - y^2 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 2xy \leqslant 1 \end{cases}$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$1 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$2xy = \pm 1$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$\begin{cases} -1 \leqslant 1 - x^2 - y^2 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 2xy \leqslant 1 \end{cases}$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$1 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$2xy = \pm 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2x}$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$\begin{cases} -1 \leqslant 1 - x^2 - y^2 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 2xy \leqslant 1 \end{cases}$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$1 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$2xy = \pm 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2x}$$

Це рівняння кола і гіпербол.

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$\begin{cases} -1 \leqslant 1 - x^2 - y^2 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 2xy \leqslant 1 \end{cases}$$

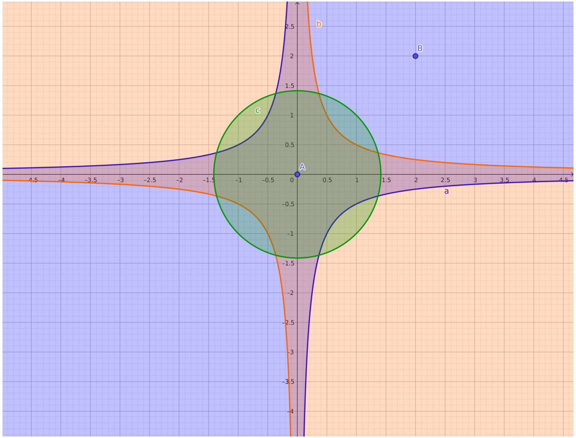
Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$1 - x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$2xy = \pm 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2x}$$

Це рівняння кола і гіпербол. Перевіряємо, яка з областей є відповідною нерівності за допомогою тестових точок $A(0;0)$ та $B(2;2)$.

Рисунок області



Задача

Знайти область визначення функції

$$z = \ln x + \ln y$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$x = 0$$

Розв'язання

Значення функції можна обчислити, якщо

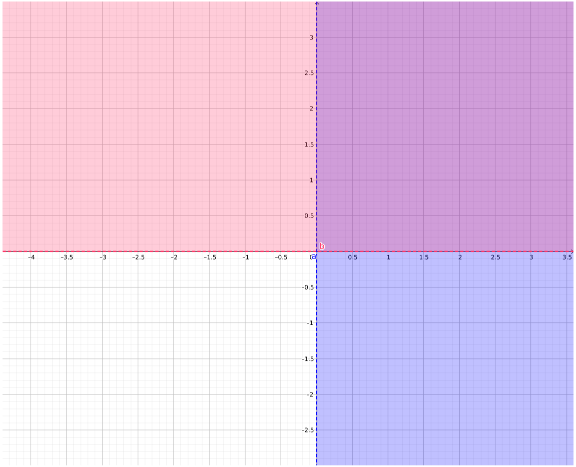
$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Для побудови відповідної області слід спочатку побудувати її межу:

$$x = 0$$

$$y = 0$$

Рисунок області



Задача

Знайти область визначення функції

$$z = \sqrt{\ln x + \ln y}$$

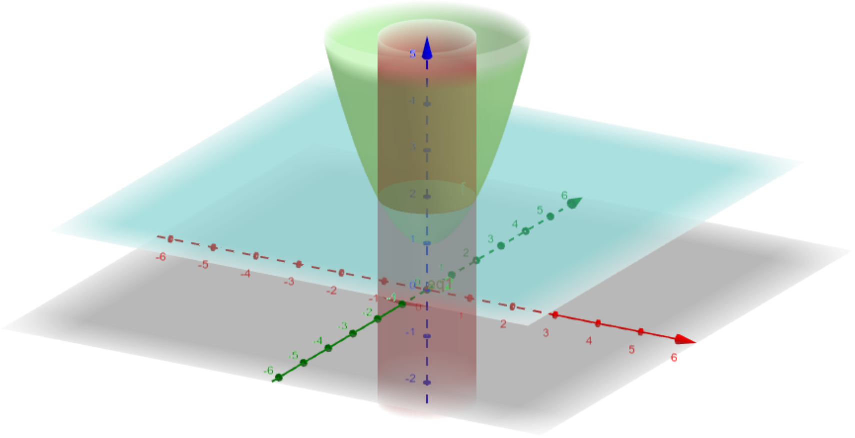
Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = z - 1; z = 2.$

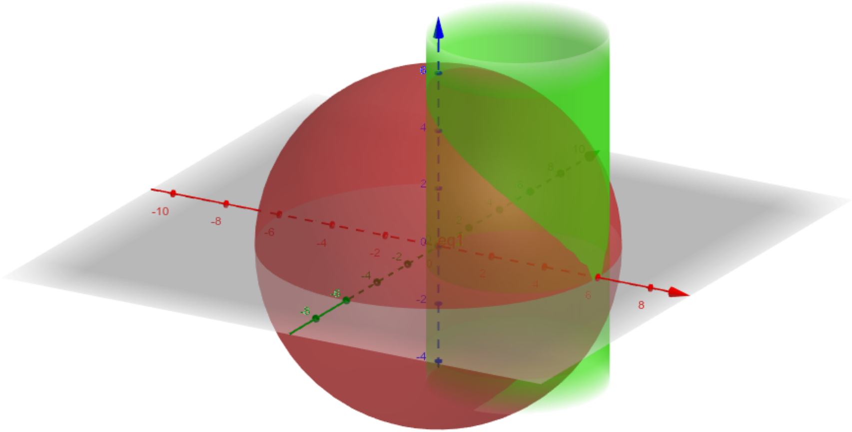
Розв'язання



Задача

Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $x^2 + y^2 + z^2 = 36; x^2 + y^2 = 6x$.

Розв'язання



Задача

Знайти границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{-\dfrac{1}{xy}}$.

Розв'язання

Покладемо $xy = t$.

Розв'язання

Покладемо $xy = t$.
Тоді, при $(x; y) \to (0; 0)$ можемо переписати границю як

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (1 + xy)^{-\dfrac{1}{xy}} = \lim_{t \to 0} (1 + t)^{-\frac{1}{t}}$$

Розв'язання

Покладемо $xy = t$.
Тоді, при $(x; y) \to (0; 0)$ можемо переписати границю як

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1 + xy)^{-\dfrac{1}{xy}} = \lim_{t\to 0}(1 + t)^{-\frac{1}{t}} \overset{\text{визначна}}{\underset{\text{границя}}{=}} e^{-1}$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{x^2 + y^2}$

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x; y) \to (0; 0)$ зберігається співвідношення $y = kx$.

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x;y) \to (0;0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\cdot kx)}{x^2+k^2x^2}$$

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x;y) \to (0;0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\cdot kx)}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx^2}{x^2(1+k^2)}$$

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x;y) \to (0;0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\cdot kx)}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x; y) \to (0; 0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x \cdot kx)}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx^2}{x^2(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}$$

Таким чином, значення границі має залежати від кутового коефіцієнта k. Але це не відповідає означенню, оскільки за означенням границя не повинна залежати від способу прямування $(x; y) \to (0; 0)$.

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x; y) \to (0; 0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(x\cdot kx)}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\sin kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

Таким чином, значення границі має залежати від кутового коефіцієнта k. Але це не відповідає означенню, оскільки за означенням границя не повинна залежати від способу прямування $(x; y) \to (0; 0)$.
Отже, границі у сенсі записаного означення не існує.

Задача

Дослідити функцію на неперервність $z = \dfrac{x^2 + y^2}{\arcsin xy}$.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $\arcsin xy = 0$.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $\arcsin xy = 0$.
Звідси $x = 0$ або $y = 0$.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $\arcsin xy = 0$.
Звідси $x = 0$ або $y = 0$.
Якщо $x \to 0$ і $y \nrightarrow 0$ або $y \to 0$ і $x \nrightarrow 0$, подвійна границя не існує.

Розв'язання

Дослідимо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy}$$

Розв'язання

Дослідимо

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\arcsin xy}$$

Нехай під час прямування $(x; y) \to (0; 0)$ зберігається співвідношення $y = kx$.

Розв'язання

Дослідимо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy}$$

Нехай під час прямування $(x;y) \to (0;0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin(x\cdot kx)}$$

Розв'язання

Дослідимо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy}$$

Нехай під час прямування $(x;y)\to(0;0)$ зберігається співвідношення $y=kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin(x\cdot kx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin kx^2}$$

Розв'язання

Дослідимо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy}$$

Нехай під час прямування $(x;y)\to(0;0)$ зберігається співвідношення $y=kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin(x\cdot kx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+k^2)}{\arcsin kx^2}$$

Розв'язання

Дослідимо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy}$$

Нехай під час прямування $(x;y) \to (0;0)$ зберігається співвідношення $y = kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin(x\cdot kx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+k^2)}{\arcsin kx^2} = \frac{1+k^2}{k}$$

Розв'язання

Дослідимо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy}$$

Нехай під час прямування $(x;y)\to(0;0)$ зберігається співвідношення $y=kx$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin(x\cdot kx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+k^2)}{\arcsin kx^2} = \frac{1+k^2}{k}$$

Таким чином, значення границі має залежати від кутового коефіцієнта k. Але це не відповідає означенню, оскільки за означенням границя не повинна залежати від способу прямування $(x;y)\to(0;0)$.

Розв'язання

Дослідимо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy}$$

Нехай під час прямування $(x;y)\to(0;0)$ зберігається співвідношення $y=kx$.
Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\arcsin xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin(x\cdot kx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+k^2x^2}{\arcsin kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+k^2)}{\arcsin kx^2} = \frac{1+k^2}{k}$$

Таким чином, значення границі має залежати від кутового коефіцієнта k. Але це не відповідає означенню, оскільки за означенням границя не повинна залежати від способу прямування $(x;y)\to(0;0)$.
Отже, функція є неперервною усюди, окрім точки $x=0$ або $y=0$.

Задача

Дослідити функцію на неперервність $z = \dfrac{1 - \cos xy}{x^2 y^2}$.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $xy = 0$.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $xy = 0$.
Звідси $x = 0$ або $y = 0$.

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $xy = 0$.
Звідси $x = 0$ або $y = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos xy}{x^2 y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 y^2 / 2}{x^2 y^2} = \frac{1}{2}$$

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $xy = 0$.
Звідси $x = 0$ або $y = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos xy}{x^2 y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 y^2 / 2}{x^2 y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos xy}{x^2 y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{x^2 y^2 / 2}{x^2 y^2} = \frac{1}{2}$$

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $xy = 0$.
Звідси $x = 0$ або $y = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos xy}{x^2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2/2}{x^2y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos xy}{x^2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2/2}{x^2y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos xy}{x^2y^2}$$

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $xy = 0$.
Звідси $x = 0$ або $y = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos xy}{x^2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2/2}{x^2y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos xy}{x^2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2/2}{x^2y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos xy}{x^2y^2} \overset{t=xy}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t^2/2}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Розв'язання

Функція є суперпозицією (комбінацією) неперервних функцій, тому розрив можливий лише там, де функцію не визначено.
Функцію не визначено там, де $xy = 0$.
Звідси $x = 0$ або $y = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos xy}{x^2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2/2}{x^2y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos xy}{x^2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2/2}{x^2y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos xy}{x^2y^2} \overset{t=xy}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t^2/2}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Отже, функція є неперервною усюди.