

# Розв'язання задач на неперервність і похідні

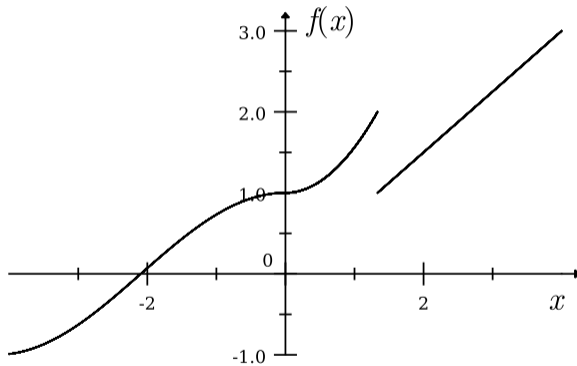
# Задача

Дослідити на неперервність функцію і визначити тип точок розриву, якщо вони є.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 1 & \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1 & \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1 \end{aligned}$$

у точці  $x = 0$  функція неперервна; у точці  $x = 1$  точка розриву 1-го роду



# Задача

Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують.

$$y = 7^{\frac{1}{3+x}}$$

Оскільки функцію складено з неперервних функцій, вона може мати точки розриву лише там, де її не визначено.

Оскільки функцію складено з неперервних функцій, вона може мати точки розриву лише там, де її не визначено.

Функцію не визначено у точці  $x = -3$ . Перевіримо її у цій точці на неперервність.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) =$$

Оскільки функцію складено з неперервних функцій, вона може мати точки розриву лише там, де її не визначено.

Функцію не визначено у точці  $x = -3$ . Перевіримо її у цій точці на неперервність.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = 7^{-\infty}$$



Оскільки функцію складено з неперервних функцій, вона може мати точки розриву лише там, де її не визначено.

Функцію не визначено у точці  $x = -3$ . Перевіримо її у цій точці на неперервність.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = 7^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) =$$

Оскільки функцію складено з неперервних функцій, вона може мати точки розриву лише там, де її не визначено.

Функцію не визначено у точці  $x = -3$ . Перевіримо її у цій точці на неперервність.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = 7^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) = 7^{\infty}$$

Оскільки функцію складено з неперервних функцій, вона може мати точки розриву лише там, де її не визначено.

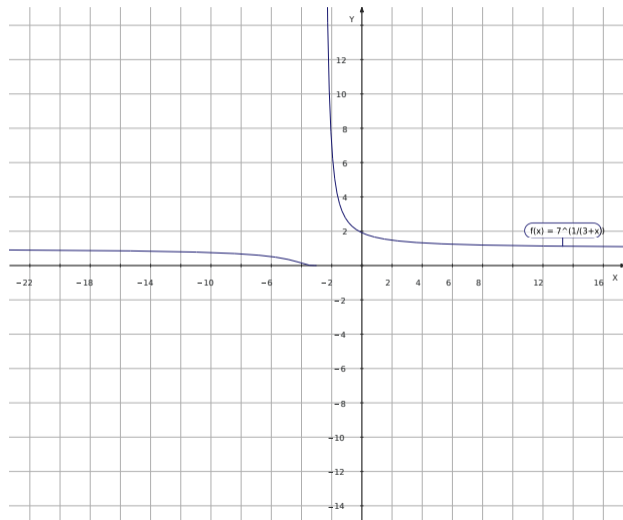
Функцію не визначено у точці  $x = -3$ . Перевіримо її у цій точці на неперервність.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = 7^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) = 7^{\infty} = \infty$$

у точці  $x = -3$  маємо розрив другого роду.

# Розв'язання



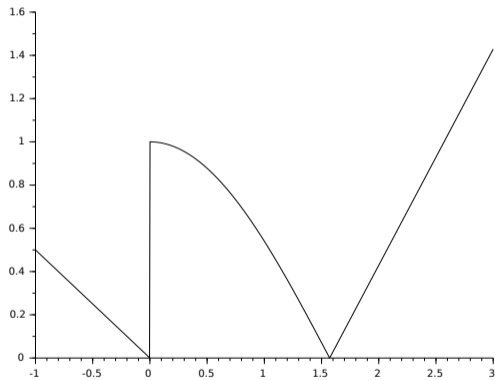
# Задача

Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують.

$$y = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ \cos x, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } \frac{\pi}{2} < x < +\infty. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 0 & \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1 & \lim_{x \rightarrow \pi/2+0} f(x) = 0 \end{array}$$

у точці  $x = 0$  точка розриву 1-го роду; у точці  $x = \pi/2$  функція неперервна.



# Задача

Знайти похідну функції  $y = 5x^3$ .



$$y' = (5x^3)'$$

$$y' = (5x^3)' = 5 \cdot (x^3)'$$

$$y' = (5x^3)' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2$$

$$y' = (5x^3)' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$$

# Задача

Знайти похідну функції  $y = 7\sqrt{x}$ .

$$y' = (7\sqrt{x})'$$

$$y' = (7\sqrt{x})' = (7 \cdot x^{\frac{1}{2}})'$$

$$y' = (7\sqrt{x})' = (7 \cdot x^{\frac{1}{2}})' = 7 \cdot (x^{\frac{1}{2}})'$$



$$y' = (7\sqrt{x})' = (7 \cdot x^{\frac{1}{2}})' = 7 \cdot (x^{\frac{1}{2}})' = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = (7\sqrt{x})' = (7 \cdot x^{\frac{1}{2}})' = 7 \cdot (x^{\frac{1}{2}})' = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{2\sqrt{x}}$$

# Задача

Знайти похідну функції  $y = 4\sqrt[3]{x^2}$ .

Розв'язати самостійно.

# Задача

Знайти похідну функції  $y = \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}$ .

$$y' = \left( \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} \right)'$$

$$y' = \left( \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} \right)' = \left( 3 \cdot x^{-\frac{3}{5}} \right)'$$

$$y' = \left( \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} \right)' = \left( 3 \cdot x^{-\frac{3}{5}} \right)' = 3 \cdot \left( -\frac{3}{5} \right) \cdot x^{-\frac{8}{5}}$$



$$y' = \left( \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} \right)' = \left( 3 \cdot x^{-\frac{3}{5}} \right)' = 3 \cdot \left( -\frac{3}{5} \right) \cdot x^{-\frac{8}{5}} = -\frac{9}{5 \cdot x \sqrt[5]{x^3}}$$

# Задача

Знайти похідну функції  $y = \frac{4}{\sqrt[8]{x^5}}$ .

Розв'язати самостійно.

# Задача

Знайти похідну функції  $y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$ .

$$y' = (5x^3 - 3x^2 + x - 1)'$$

$$y' = (5x^3 - 3x^2 + x - 1)' = (5x^3)' - (3x^2)' + (x)' - (1)'$$

$$y' = (5x^3 - 3x^2 + x - 1)' = (5x^3)' - (3x^2)' + (x)' - (1)' = 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 1$$

$$\begin{aligned}y' &= (5x^3 - 3x^2 + x - 1)' = (5x^3)' - (3x^2)' + (x)' - (1)' = 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 1 = \\ &= 15x^2 - 6x + 1\end{aligned}$$



## Задача

Знайти похідну функції  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6 + \frac{4}{7}x^7$

Розв'язати самостійно.

## Задача

Знайти похідну функції  $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$

$$y' = \left( (5x^2 + 7x + 2)^3 \right)'$$

$$\begin{aligned}y' &= \left( (5x^2 + 7x + 2)^3 \right)' = \\ &= 3 (5x^2 + 7x + 2)^2 (5x^2 + 7x + 2)'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y' &= \left( (5x^2 + 7x + 2)^3 \right)' = \\ &= 3 (5x^2 + 7x + 2)^2 (5x^2 + 7x + 2)' = 3 (5x^2 + 7x + 2)^2 (10x + 7)\end{aligned}$$

# Задача

Знайти похідну функції  $y = \sin 3x$

$$y' = (\sin 3x)'$$



$$y' = (\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)'$$

$$y' = (\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = \cos 3x \cdot 3$$

$$y' = (\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = \cos 3x \cdot 3 = 3 \cos 3x$$

# Задача

Знайти похідну функції  $y = \sqrt{x^2 + 2}$

Розв'язати самостійно.

# Задача

Знайти похідну функції  $y = \operatorname{tg} 5x$

Розв'язати самостійно.

## Задача

Знайти похідну функції  $y = (40 - 12x + \frac{27}{5}x^2) \sqrt{5 + 3x}$ .



$$y' = \left[ \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) \sqrt{5 + 3x} \right]'$$

$$\begin{aligned}y' &= \left[ \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) \sqrt{5 + 3x} \right]' = \\ &= \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right)' \sqrt{5 + 3x} + \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) (\sqrt{5 + 3x})'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y' &= \left[ \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) \sqrt{5 + 3x} \right]' = \\&= \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right)' \sqrt{5 + 3x} + \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) (\sqrt{5 + 3x})' = \\&= \left( -12 + \frac{27}{5} \cdot 2x \right) \sqrt{5 + 3x} + \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) \left( \frac{1}{2\sqrt{5 + 3x}} \cdot 3 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y' &= \left[ \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) \sqrt{5 + 3x} \right]' = \\&= \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right)' \sqrt{5 + 3x} + \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) (\sqrt{5 + 3x})' = \\&= \left( -12 + \frac{27}{5} \cdot 2x \right) \sqrt{5 + 3x} + \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) \left( \frac{1}{2\sqrt{5 + 3x}} \cdot 3 \right) = \\&= \frac{1}{2\sqrt{5 + 3x}} \left( \left( -12 + \frac{54}{5}x \right) (5 + 3x) + 3 \cdot \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y' &= \left[ \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) \sqrt{5 + 3x} \right]' = \\&= \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right)' \sqrt{5 + 3x} + \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) (\sqrt{5 + 3x})' = \\&= \left( -12 + \frac{27}{5} \cdot 2x \right) \sqrt{5 + 3x} + \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) \left( \frac{1}{2\sqrt{5 + 3x}} \cdot 3 \right) = \\&= \frac{1}{2\sqrt{5 + 3x}} \left( \left( -12 + \frac{54}{5}x \right) (5 + 3x) + 3 \cdot \left( 40 - 12x + \frac{27}{5}x^2 \right) \right) = \frac{81x^2}{2\sqrt{5 + 3x}}\end{aligned}$$

## Задача

Знайти похідну функції  $y = (3x^4 + 4) \sqrt[4]{9x^4 - 3}$ .

Розв'язати самостійно.

# Задача

Знайти похідну функції  $y = \cos \sqrt{\frac{1}{1+x}}$ .



$$y' = \left( \cos \sqrt{\frac{1}{1+x}} \right)'$$

$$y' = \left( \cos \sqrt{\frac{1}{1+x}} \right)' = \sin \sqrt{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} \cdot \left( -\frac{1}{(1+x)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}y' &= \left( \cos \sqrt{\frac{1}{1+x}} \right)' = \sin \sqrt{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} \cdot \left( -\frac{1}{(1+x)^2} \right) = \\ &= -\sin \sqrt{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

## Задача

Знайти похідну функції  $y = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$ .

$$y' = \left( \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \right)'$$

$$y' = \left( \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \right)' = \frac{(\cos^3 x)' \cdot \sin^2 x - \cos^3 x \cdot (\sin^2 x)'}{\sin^4 x}$$

$$\begin{aligned}y' &= \left( \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \right)' = \frac{(\cos^3 x)' \cdot \sin^2 x - \cos^3 x \cdot (\sin^2 x)'}{\sin^4 x} = \\ &= \frac{3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) \cdot \sin^2 x - \cos^3 x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y' &= \left( \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \right)' = \frac{(\cos^3 x)' \cdot \sin^2 x - \cos^3 x \cdot (\sin^2 x)'}{\sin^4 x} = \\&= \frac{3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) \cdot \sin^2 x - \cos^3 x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x} = \\&= -\frac{3 \cos^2 x \cdot \sin^2 x + 2 \cos^4 x}{\sin^3 x}\end{aligned}$$



# Задача

Знайти похідну функції  $y = \frac{\sin^6 x}{\cos^2 x}$ .

Розв'язати самостійно.