

Ланцюгове та логарифмічне диференціювання

Задача

Знайти похідну функції $y = x^7 e^x$.

$$y' = (x^7 e^x)'$$

$$y' = (x^7 e^x)' = (x^7)' \cdot e^x + x^7 \cdot (e^x)'$$

$$y' = (x^7 e^x)' = (x^7)' \cdot e^x + x^7 \cdot (e^x)' = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x$$

$$y' = (x^7 e^x)' = (x^7)' \cdot e^x + x^7 \cdot (e^x)' = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x = (x^7 + 7x^6)e^x$$

Задача

Знайти похідну функції $y = \sin x \ln x$.

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти похідну функції $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{\ln x} \right)'$$

$$y' = \left(\frac{x^2}{\ln x} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot \ln x - x^2 \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x}$$

$$y' = \left(\frac{x^2}{\ln x} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot \ln x - x^2 \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$y' = \left(\frac{x^2}{\ln x} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot \ln x - x^2 \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

Задача

Знайти похідну функції $y = \frac{2^x}{\operatorname{arctg} x}$.

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти похідну функції $y = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$.

$$y' = \left[(1 + 3x - 5x^2)^{30} \right]'$$

$$y' = \left[(1 + 3x - 5x^2)^{30} \right]' = 30 (1 + 3x - 5x^2)^{29} \cdot (1 + 3x - 5x^2)'$$

$$\begin{aligned}y' &= \left[(1 + 3x - 5x^2)^{30} \right]' = 30 (1 + 3x - 5x^2)^{29} \cdot (1 + 3x - 5x^2)' = \\ &= 30 (1 + 3x - 5x^2)^{29} \cdot (3 - 10x)\end{aligned}$$

Задача

Знайти похідну функції $y = \ln(\sin x + \cos x)$.

$$y' = [\ln(\sin x + \cos x)]'$$

$$y' = [\ln(\sin x + \cos x)]' = \frac{1}{\sin x + \cos x} \cdot (\sin x + \cos x)'$$

$$y' = [\ln(\sin x + \cos x)]' = \frac{1}{\sin x + \cos x} \cdot (\sin x + \cos x)' = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

Задача

Знайти похідну функції $y = \frac{x + 2}{\sin(x + 2)}$.

$$y' = \left(\frac{x + 2}{\sin(x + 2)} \right)'$$

$$y' = \left(\frac{x+2}{\sin(x+2)} \right)' = \frac{(x+2)' \cdot \sin(x+2) - (x+2) \cdot (\sin(x+2))'}{\sin^2(x+2)}$$

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{x+2}{\sin(x+2)} \right)' = \frac{(x+2)' \cdot \sin(x+2) - (x+2) \cdot (\sin(x+2))'}{\sin^2(x+2)} = \\ &= \frac{\sin(x+2) - (x+2) \cdot \cos(x+2)}{\sin^2(x+2)}\end{aligned}$$

Задача

Знайти похідну функції $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}$.

$$y' = \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\sin x} \right)'$$

$$y' = \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\sin x} \right)' = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\sin x} \right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x$$

$$y' = \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\sin x} \right)' = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\sin x} \right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}$$

Задача

Знайти похідну функції $y = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{1 + \sin 3x}$.

$$y' = \left(\frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{1 + \sin 3x} \right)'$$

$$y' = \left(\frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{1 + \sin 3x} \right)' = \frac{\left(\sqrt{1 + \cos^2 x} \right)' \cdot (1 + \sin 3x) - \sqrt{1 + \cos^2 x} \cdot (1 + \sin 3x)'}{(1 + \sin 3x)^2}$$

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{1 + \sin 3x} \right)' = \frac{(\sqrt{1 + \cos^2 x})' \cdot (1 + \sin 3x) - \sqrt{1 + \cos^2 x} \cdot (1 + \sin 3x)'}{(1 + \sin 3x)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}} \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) \cdot (1 + \sin 3x) - \sqrt{1 + \cos^2 x} \cdot \cos 3x \cdot 3}{(1 + \sin 3x)^2}\end{aligned}$$

Задача

Знайти похідну функції $y = \operatorname{arctg} \sin 3x$.

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти похідну функції $y = \frac{\sin 3x}{1 - \operatorname{tg} 2x}$.

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти похідну функції $\frac{\sqrt{2x-1}\sqrt[3]{x+12}}{\sqrt[4]{3x^2-1}}$.

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)'$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)' = \left(\ln \frac{\sqrt{2x-1} \sqrt[3]{x+12}}{\sqrt[4]{3x^2-1}} \right)'$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$\begin{aligned}(\ln y)' &= \left(\ln \frac{\sqrt{2x-1} \sqrt[3]{x+12}}{\sqrt[4]{3x^2-1}} \right)' = \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln(2x-1) + \frac{1}{3} \ln(x+12) - \frac{1}{4} \ln(3x^2-1) \right)'\end{aligned}$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$\begin{aligned}(\ln y)' &= \left(\ln \frac{\sqrt{2x-1} \sqrt[3]{x+12}}{\sqrt[4]{3x^2-1}} \right)' = \\&= \left(\frac{1}{2} \ln(2x-1) + \frac{1}{3} \ln(x+12) - \frac{1}{4} \ln(3x^2-1) \right)' = \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+12} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3x^2-1} \cdot 6x \\y' &= (\ln y)' \cdot y\end{aligned}$$

Задача

Знайти похідну функції $y = x^{\sin x}$.

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)'$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)' = (\ln x^{\sin x})'$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)' = (\ln x^{\sin x})' = (\sin x \ln x)'$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)' = (\ln x^{\sin x})' = (\sin x \ln x)' = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)'$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)' = (\ln x^{\sin x})' = (\sin x \ln x)' = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = (\ln y)' \cdot y$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)' = (\ln x^{\sin x})' = (\sin x \ln x)' = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot x^{\sin x}$$

Задача

Знайти похідну функції $(\cos x)^{\operatorname{arctg}(2x-1)}$.

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)'$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)' = \left(\ln(\cos x)^{\operatorname{arctg}(2x-1)} \right)'$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)' = \left(\ln(\cos x)^{\operatorname{arctg}(2x-1)} \right)' =$$

$$= (\operatorname{arctg}(2x - 1) \ln \cos x)'$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)' = \left(\ln(\cos x)^{\operatorname{arctg}(2x-1)} \right)' =$$

$$= (\operatorname{arctg}(2x - 1) \ln \cos x)' = (\operatorname{arctg}(2x - 1))' \cdot \ln \cos x + \operatorname{arctg}(2x - 1) \cdot (\ln \cos x)'$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$\begin{aligned}(\ln y)' &= \left(\ln(\cos x)^{\operatorname{arctg}(2x-1)} \right)' = \\ &= (\operatorname{arctg}(2x - 1) \ln \cos x)' = (\operatorname{arctg}(2x - 1))' \cdot \ln \cos x + \operatorname{arctg}(2x - 1) \cdot (\ln \cos x)' = \\ &= \frac{1}{1 + (2x - 1)^2} \cdot 2 \cdot \ln \cos x + \operatorname{arctg}(2x - 1) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)\end{aligned}$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$\begin{aligned}(\ln y)' &= \left(\ln(\cos x)^{\operatorname{arctg}(2x-1)} \right)' = \\&= (\operatorname{arctg}(2x-1) \ln \cos x)' = (\operatorname{arctg}(2x-1))' \cdot \ln \cos x + \operatorname{arctg}(2x-1) \cdot (\ln \cos x)' = \\&= \frac{1}{1+(2x-1)^2} \cdot 2 \cdot \ln \cos x + \operatorname{arctg}(2x-1) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \\&= \frac{2 \ln \cos x}{1+(2x-1)^2} - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg}(2x-1)\end{aligned}$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$\begin{aligned}(\ln y)' &= \left(\ln(\cos x)^{\operatorname{arctg}(2x-1)} \right)' = \\&= (\operatorname{arctg}(2x-1) \ln \cos x)' = (\operatorname{arctg}(2x-1))' \cdot \ln \cos x + \operatorname{arctg}(2x-1) \cdot (\ln \cos x)' = \\&= \frac{1}{1+(2x-1)^2} \cdot 2 \cdot \ln \cos x + \operatorname{arctg}(2x-1) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \\&= \frac{2 \ln \cos x}{1+(2x-1)^2} - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg}(2x-1)\end{aligned}$$

$$y' = (\ln y)' \cdot y$$

Скористаймося логарифмічним диференціюванням.

$$(\ln y)' = \left(\ln(\cos x)^{\operatorname{arctg}(2x-1)} \right)' =$$

$$= (\operatorname{arctg}(2x - 1) \ln \cos x)' = (\operatorname{arctg}(2x - 1))' \cdot \ln \cos x + \operatorname{arctg}(2x - 1) \cdot (\ln \cos x)' =$$

$$= \frac{1}{1 + (2x - 1)^2} \cdot 2 \cdot \ln \cos x + \operatorname{arctg}(2x - 1) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) =$$

$$= \frac{2 \ln \cos x}{1 + (2x - 1)^2} - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg}(2x - 1)$$

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \left(\frac{2 \ln \cos x}{1 + (2x - 1)^2} - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg}(2x - 1) \right) \cdot (\cos x)^{\operatorname{arctg}(2x-1)}$$

Задача

Знайти похідну функції $y = \sqrt[5]{\frac{x(x^2 + 1)}{x - 4}}$.

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти похідну функції $y = (3x^2 - 1)^{\ln(4-x)}$.

Розв'язати самостійно.