Розв'язання задач на криві другого порядку

Задача 1

Гіпербола, симетрична відносно осей координат, має ексцентриситет $e = \sqrt{2}$ та проходить через точку $A\left(1, \sqrt{3}\right)$. Знайти відстані вершин цієї гіперболи від фокуса параболи $y^2 = 2x$. Зробити креслення.

Розв'язання

Нехай рівняння гіперболи записано у канонічній формі:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Розв'язання

Нехай рівняння гіперболи записано у канонічній формі:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Тоді

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{2}$$

Розв'язання

Нехай рівняння гіперболи записано у канонічній формі:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Тоді

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2a^2$$

Розв'язання

Нехай рівняння гіперболи записано у канонічній формі:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Тоді

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow a = b$$

Розв'язання

Нехай рівняння гіперболи записано у канонічній формі:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Тоді

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow a = b$$

$$\frac{1^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = \pm 1$$

Розв'язання

Нехай рівняння гіперболи записано у канонічній формі:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Тоді

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow a = b$$

$$\frac{1^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = \pm 1 \Rightarrow -\frac{2}{b^2} = -1$$

Розв'язання

Нехай рівняння гіперболи записано у канонічній формі:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Тоді

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow a = b$$

$$\frac{1^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = \pm 1 \Rightarrow -\frac{2}{b^2} = -1 \Rightarrow a = b = \sqrt{2}.$$

Розв'язання

Отже, рівняння гіперболи –

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = -1.$$

Розв'язання

Отже, рівняння гіперболи –

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = -1.$$

Це спряжена гіпербола із вершинами у точках $A(0; \sqrt{2})$ та $B(0; -\sqrt{2})$.

Розв'язання

Отже, рівняння гіперболи –

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = -1.$$

Це спряжена гіпербола із вершинами у точках $A(0;\sqrt{2})$ та $B(0;-\sqrt{2})$. Порівнюючи рівняння параболи із умови задачі із канонічним рівнянням ($y^2 = 2px$), маємо $p = 1$. Отже фокус розташовано у точці $F(1/2;0)$.

Розв'язання

Отже, рівняння гіперболи –

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = -1.$$

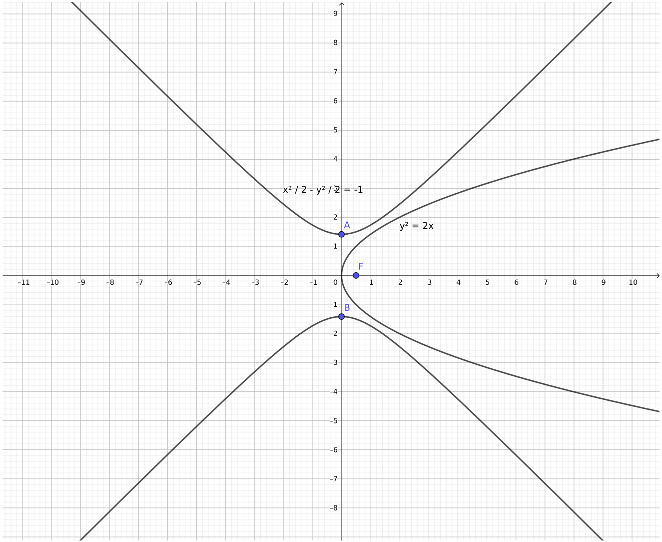
Це спряжена гіпербола із вершинами у точках $A(0; \sqrt{2})$ та $B(0; -\sqrt{2})$. Порівнюючи рівняння параболи із умови задачі із канонічним рівнянням ($y^2 = 2px$), маємо $p = 1$. Отже фокус розташовано у точці $F(1/2; 0)$. Відстані від цієї точки до вершин гіперболи дорівнюють

$$AF = BF = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

Розв'язання

Отже, рівняння гіперболи –
$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = -1.$$
Це спряжена гіпербола із вершинами у точках $A(0; \sqrt{2})$ та $B(0; -\sqrt{2})$. Порівнюючи рівняння параболи із умови задачі із канонічним рівнянням ($y^2 = 2px$), маємо $p = 1$. Отже фокус розташовано у точці $F(1/2; 0)$. Відстані від цієї точки до вершин гіперболи дорівнюють
$$AF = BF = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2}.$$

Розв'язання



Задача 2

Дано гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти співфокусний еліпс, що проходить через точку $A(5;0)$. Зробити креслення.

Розв'язання

Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду поділивши на 8:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Розв'язання

Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду поділивши на 8:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Маємо $a = b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Розв'язання

Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду поділивши на 8:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Маємо $a = b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Звідси $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8 + 8} = 4$.

Розв'язання

Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду поділивши на 8:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Маємо $a = b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Звідси $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8 + 8} = 4$.
Отже, фокуси гіперболи, які збігаються із фокусами еліпса, розташовано у точках $F_1(-4; 0)$ та $F_2(4; 0)$.

Розв'язання

Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду поділивши на 8:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Маємо $a = b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Звідси $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8 + 8} = 4$.
Отже, фокуси гіперболи, які збігаються із фокусами еліпса, розташовано у точках $F_1(-4; 0)$ та $F_2(4; 0)$.
Нехай рівняння еліпса є таким:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

Розв'язання

Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду поділивши на 8:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Маємо $a = b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Звідси $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8 + 8} = 4$.
Отже, фокуси гіперболи, які збігаються із фокусами еліпса, розташовано у точках $F_1(-4; 0)$ та $F_2(4; 0)$.
Нехай рівняння еліпса є таким:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

Тоді

$$a_1^2 - b_1^2 = c^2 = 16$$

Розв'язання

Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду поділивши на 8:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Маємо $a = b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Звідси $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8 + 8} = 4$.
Отже, фокуси гіперболи, які збігаються із фокусами еліпса, розташовано у точках $F_1(-4; 0)$ та $F_2(4; 0)$.
Нехай рівняння еліпса є таким:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

Тоді

$$a_1^2 - b_1^2 = c^2 = 16 \Rightarrow b_1 = \sqrt{a_1^2 - 16}$$

Розв'язання

Оскільки еліпс проходить через точку $A(5;0)$,

$$\frac{5^2}{a_1^2} + \frac{0^2}{b_1^2} = \frac{25}{a_1^2} = 1$$

Розв'язання

Оскільки еліпс проходить через точку $A(5;0)$,

$$\frac{5^2}{a_1^2} + \frac{0^2}{b_1^2} = \frac{25}{a_1^2} = 1 \Rightarrow a_1 = 5$$

Розв'язання

Оскільки еліпс проходить через точку $A(5;0)$,

$$\frac{5^2}{a_1^2} + \frac{0^2}{b_1^2} = \frac{25}{a_1^2} = 1 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow b_1 = \sqrt{5^2 - 16}$$

Розв'язання

Оскільки еліпс проходить через точку $A(5;0)$,

$$\frac{5^2}{a_1^2} + \frac{0^2}{b_1^2} = \frac{25}{a_1^2} = 1 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow b_1 = \sqrt{5^2 - 16} = 3.$$

Розв'язання

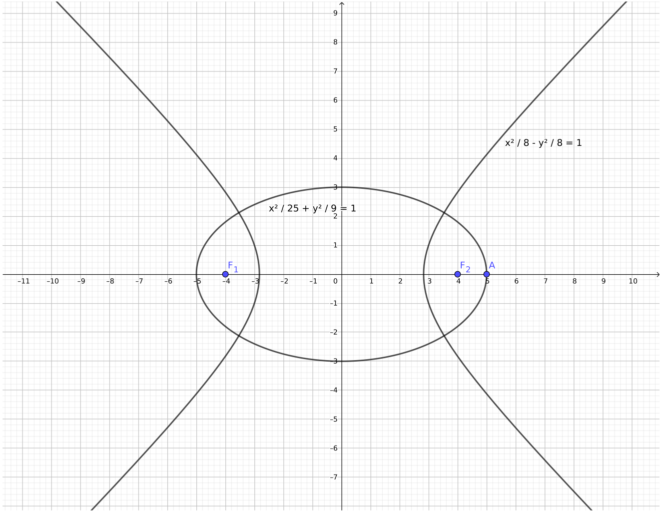
Оскільки еліпс проходить через точку $A(5;0)$,

$$\frac{5^2}{a_1^2} + \frac{0^2}{b_1^2} = \frac{25}{a_1^2} = 1 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow b_1 = \sqrt{5^2 - 16} = 3.$$

Отже, рівняння еліпса буде таким:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Розв'язання



Задача 3

Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву.

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 12$$

Розв'язання

У загальному випадку рівняння кривої другого порядку має вигляд

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Складаючи матрицю з коефіцієнтів при найбільших степенях x та y у правій частині рівності, маємо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця симетрична (елемент на другій позиції першого рядка дорівнює елементу на першій позиції другого рядка), власні вектори лінійного оператора, який вона задає, будуть перпендикулярні (потім перевіримо). Власні значення цього оператора, λ_1 та λ_2, будуть коефіцієнтами у канонічному вигляді квадратичної форми, що може бути отримана шляхом повороту та перенесення початку координат початкової системи координат.

Розв'язання

Тобто, зробивши деяку заміну вигляду

$$\begin{aligned} x &= b_{11}x_1 + b_{12}y_1 + x_0; \\ y &= b_{21}x_1 + b_{22}y_1 + y_0; \end{aligned} \tag{1}$$

ми можемо отримати канонічний вигляд квадратичної форми. Якщо квадратична форма не є виродженою (задає криву саме *другого* порядку), у випадку, якщо λ_1 та λ_2 одного знаку, матимемо еліпс, якщо різних — гіперболу, якщо одне з власних значень рівне нулю — параболу. Канонічним виглядом нашого рівняння буде (еліпс або гіпербола):

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a'_{33} = 0 \tag{2}$$

або (парабола)

$$y_1^2 + a'_{13} x_1 = 0. \tag{3}$$

Розв'язання

При цьому напрямок осей нової системи координат, $x_1O_1y_1$ визначається власними векторами, що відповідають власним значенням λ_1 та λ_2 відповідно.

Розв'язання

Отже план розв'язання прикладу такий:

1. Записати матрицю A та знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, який нею задається.

Розв'язання

Отже план розв'язання прикладу такий:

1. Записати матрицю A та знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, який нею задається.
2. За допомогою власних векторів знайти підстановку, що повертає координати до напрямків, що збігаються з напрямками канонічної системи координат.

Розв'язання

Отже план розв'язання прикладу такий:

1. Записати матрицю A та знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, який нею задається.
2. За допомогою власних векторів знайти підстановку, що повертає координати до напрямків, що збігаються з напрямками канонічної системи координат.
3. Виділивши повні квадрати відносно нових змінних у перетвореному рівнянні, встановити положення початку координат канонічної системи координат та остаточний вигляд канонічного рівняння кривої другого порядку.

Розв'язання

Отже план розв'язання прикладу такий:

1. Записати матрицю A та знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, який нею задається.
2. За допомогою власних векторів знайти підстановку, що повертає координати до напрямків, що збігаються з напрямками канонічної системи координат.
3. Виділивши повні квадрати відносно нових змінних у перетвореному рівнянні, встановити положення початку координат канонічної системи координат та остаточний вигляд канонічного рівняння кривої другого порядку.
4. Все це намалювати $\heartsuit$

Розв'язання

У нашому випадку матриця A матиме вигляд (оскільки коефіцієнт при xy є подвоєним значенням a_{12}, в нашому випадку $a_{12} = \dfrac{-2}{2} = -1$):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Власні значення знаходимо з рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{або після розкриття визначника } \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Розв'язками цього рівняння є, очевидно, $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4$.

Розв'язання

У нашому випадку матриця A матиме вигляд (оскільки коефіцієнт при xy є подвоєним значенням a_{12}, в нашому випадку $a_{12} = \dfrac{-2}{2} = -1$):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Власні значення знаходимо з рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{або після розкриття визначника } \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Розв'язками цього рівняння є, очевидно, $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4$. Ці значення одного знаку, отже маємо рівняння еліпса.

Розв'язання

Почергово знайдемо власні вектори, що відповідають цим власним значенням:

$$\lambda_1 = 2 :$$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0, \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Якщо тепер покласти $a_2 = C$, то можна записати власний вектор $\vec{u}_1$, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 2$, у вигляді

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Аналогічно знаходимо для власного значення $\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = 0, \Rightarrow a_1 = -a_2 = -C.$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Для знаходження першої підстановки нам слід знайти одиничні вектори спрямовані за власними векторами.

Розв'язання

Для знаходження першої підстановки нам слід знайти одиничні вектори спрямовані за власними векторами.
Для цього слід розділити кожну компоненту власного вектора на його модуль: отримані значення будуть компонентами ортів нової системи координат у початковій системі координат.

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Для знаходження першої підстановки нам слід знайти одиничні вектори спрямовані за власними векторами.
Для цього слід розділити кожну компоненту власного вектора на його модуль: отримані значення будуть компонентами ортів нової системи координат у початковій системі координат.

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Координати цих ортів є по суті коефіцієнтами при x та y у виразах для координат у повернутій системі координат. Тобто координати x' та $y\prime$ у повернутій системі координат виражаються через x та y у вигляді

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y;$$
$$y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y.$$

Розв'язання

Звідси можемо знайти x та y за допомогою правила Крамера:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y';$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'. \tag{4}$$

Підставимо отримані значення до вихідного рівняння:

$$3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) -$$
$$-4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 12$$

Розв'язання

Після спрощення матимемо

$$2x'^2 + 4y'^2 - 4\sqrt{2}x' - 12 = 0.$$

Розв'язання

Після спрощення матимемо

$$2x'^2 + 4y'^2 - 4\sqrt{2}x' - 12 = 0.$$

Виділяємо повні квадрати, попередньо розділивши на 2:

$$\left(x'^2 - 2\sqrt{2}x' + 2\right) + 2y'^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x' - \sqrt{2}\right)^2 + 2y'^2 = 8.$$

Розв'язання

Після спрощення матимемо

$$2x'^2 + 4y'^2 - 4\sqrt{2}x' - 12 = 0.$$

Виділяємо повні квадрати, попередньо розділивши на 2:

$$\left(x'^2 - 2\sqrt{2}x' + 2\right) + 2y'^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x' - \sqrt{2}\right)^2 + 2y'^2 = 8.$$

Виконуючи тепер підстановку

$$\begin{aligned} x_1 &= x' - \sqrt{2}; \\ y_1 &= y', \end{aligned} \tag{5}$$

отримуємо канонічну форму рівняння нашого еліпса

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{4} = 1.$$

Розв'язання

Початок нової системи координат $x_1O_1y_1$ — точка O_1, матиме у системі координат $x'Oy'$ координати, що визначаються з рівнянь (5), — $\left(\sqrt{2}; 0\right)$.

Розв'язання

Початок нової системи координат $x_1O_1y_1$ — точка O_1, матиме у системі координат $x'Oy'$ координати, що визначаються з рівнянь (5), — $\left(\sqrt{2}; 0\right)$. Беручи до уваги рівняння (4), знаходимо координати точки O_1 у початковій системі координат:

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = 1;$$
$$y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = 1.$$

Отже координати точки O_1 у початковій системі координат — $O_1(1; 1)$.

Розв'язання

Для того, щоб правильно намалювати еліпс, нам слід спочатку визначити положення його вершин. Порівнюючи наше рівняння з загальною формою канонічного рівняння для еліпса $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\right)$, маємо: $a=2\sqrt{2}; b=\sqrt{4}=2.$

Розв'язання

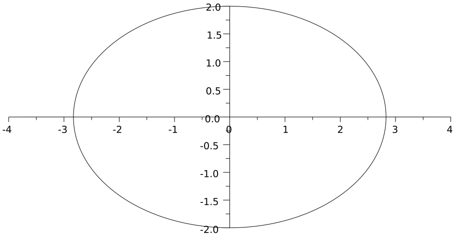
Для того, щоб правильно намалювати еліпс, нам слід спочатку визначити положення його вершин. Порівнюючи наше рівняння з загальною формою канонічного рівняння для еліпса $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\right)$, маємо: $a=2\sqrt{2}; b=\sqrt{4}=2$.

Отже вершини розташовано у точках $x_1=\pm a=\pm 2\sqrt{2}$, $y_1=\pm b=\pm 2$.

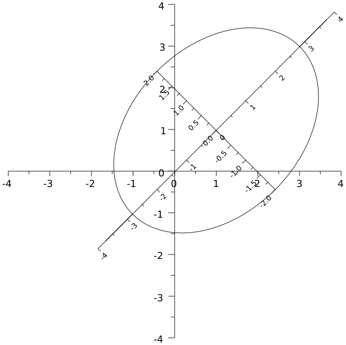
Розв'язання

Спочатку слід намалювати на окремому малюнку еліпс у перетвореній системі координат $(x_1O_1y_1)$. Потім намалювати початкову та перетворену системи координат та еліпс у початковій системі координат.

Розв'язання



(а) Еліпс у системі координат $x_1O_1y_1$



(б) Еліпс у системі координат xOy

Побудова графіків у полярній системі координат

Задача 1

Побудувати криву, задану рівнянням у полярних координатах.

$$r = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)}$$

Розв'язання

- Складаємо таблицю для різних кутів φ і відповідних значень r.

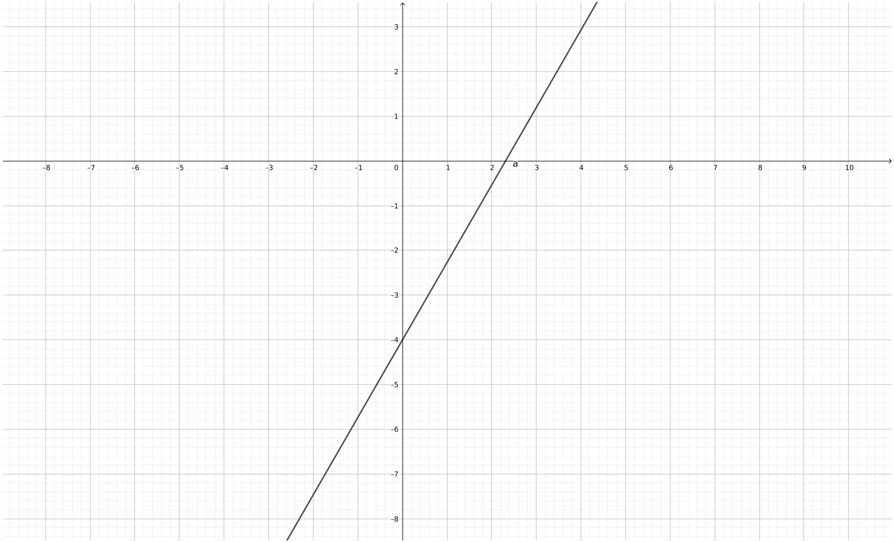
Розв'язання

- Складаємо таблицю для різних кутів φ і відповідних значень r.
- Відкладаємо на полярних променях, проведених під відповідними кутами, значення радіусів.

Розв'язання

- Складаємо таблицю для різних кутів φ і відповідних значень r.
- Відкладаємо на полярних променях, проведених під відповідними кутами, значення радіусів.
- З'єднуємо точки і отримуємо криву.

Розв'язання



Задача 2

Побудувати криву, задану рівнянням у полярних координатах.

$$r = 3\,(1 - \sin\varphi)$$

Розв'язання