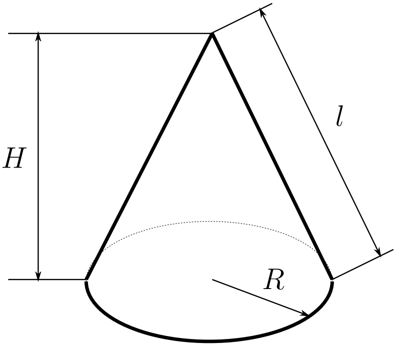
Розв'язання задач на екстремум функції (частина 2)

Задача

Чому має дорівнювати радіус основи R, висота H та твірна l прямого кругового конуса, щоб при заданому об'ємі V він мав найменшу бічну поверхню?

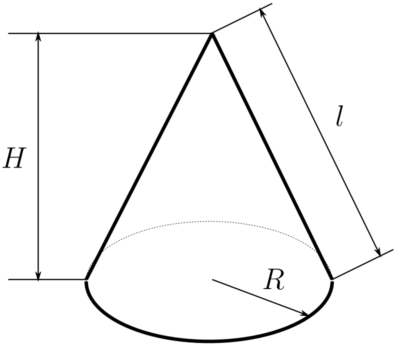
Розв'язання



Площа бокової поверхні конуса

$$S_{\text{бок. кон.}} = \pi R l$$

Розв'язання

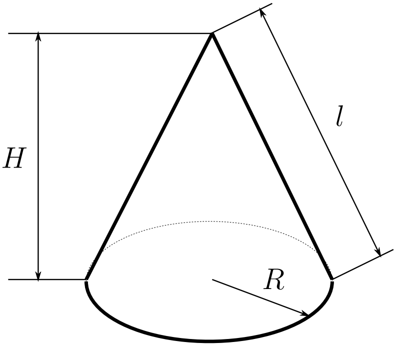


Площа бокової поверхні конуса

$$S_{\text{бок. кон.}} = \pi R l$$

$$l = \sqrt{H^2 + R^2}$$

Розв'язання

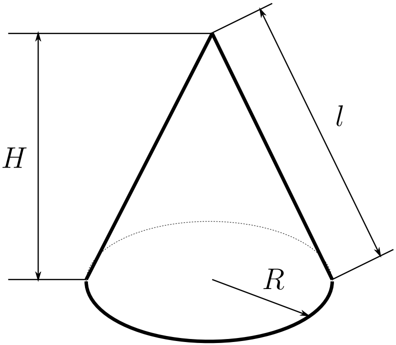


Площа бокової поверхні конуса

$$S_{\text{бок. кон.}} = \pi R l$$

$$l = \sqrt{H^2 + R^2} \Rightarrow S_{\text{бок. кон.}} = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$$

Розв'язання



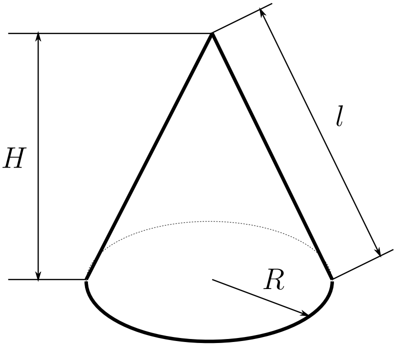
Площа бокової поверхні конуса

$$S_{\text{бок. кон.}} = \pi R l$$

$$l = \sqrt{H^2 + R^2} \Rightarrow S_{\text{бок. кон.}} = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Розв'язання



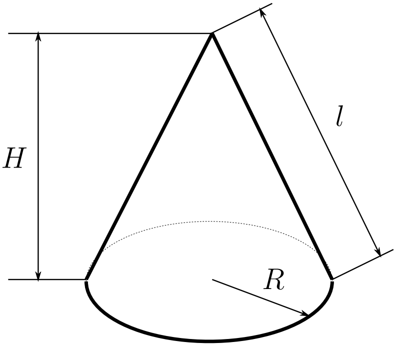
Площа бокової поверхні конуса

$$S_{\text{бок. кон.}} = \pi R l$$

$$l = \sqrt{H^2 + R^2} \Rightarrow S_{\text{бок. кон.}} = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H \Rightarrow H = \frac{3V}{\pi R^2}$$

Розв'язання



Площа бокової поверхні конуса

$$S_{\text{бок. кон.}} = \pi R l$$

$$l = \sqrt{H^2 + R^2} \Rightarrow S_{\text{бок. кон.}} = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H \Rightarrow H = \frac{3V}{\pi R^2}$$

$$S_{\text{бок. кон.}}(R) = \frac{1}{R}\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(R) = \frac{3\pi^2 R^4}{\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}} - \frac{\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}}{R^2}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(R) = \frac{3\pi^2 R^4}{\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}} - \frac{\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}}{R^2} = \frac{2\pi^2 R^6 - 9V^2}{R^2\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(R) = \frac{3\pi^2 R^4}{\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}} - \frac{\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}}{R^2} = \frac{2\pi^2 R^6 - 9V^2}{R^2\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}}$$

$$2\pi^2 R^6 - 9V^2 = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(R) = \frac{3\pi^2 R^4}{\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}} - \frac{\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}}{R^2} = \frac{2\pi^2 R^6 - 9V^2}{R^2\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}}$$

$$2\pi^2 R^6 - 9V^2 = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$S''(R) = \frac{2\pi^4 R^{12} + 117\pi^2 V^2 R^6 + 162V^4}{\sqrt{\pi^2 R^6 + 9V^2}\,(\pi^2 R^9 + 9V^2 R^3)}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(R) = \frac{3\pi^2 R^4}{\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}} - \frac{\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}}{R^2} = \frac{2\pi^2 R^6 - 9V^2}{R^2\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}}$$

$$2\pi^2 R^6 - 9V^2 = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$S''(R) = \frac{2\pi^4 R^{12} + 117\pi^2 V^2 R^6 + 162V^4}{\sqrt{\pi^2 R^6 + 9V^2}\,(\pi^2 R^9 + 9V^2 R^3)} > 0$$

Отже, маємо мінімум.

Розв'язання

$$H = \frac{3V}{\pi R^2}$$

Розв'язання

$$H = \frac{3V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

Розв'язання

$$H = \frac{3V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

$$l = \sqrt{H^2 + R^2}$$

Розв'язання

$$H = \frac{3V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

$$l = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$$

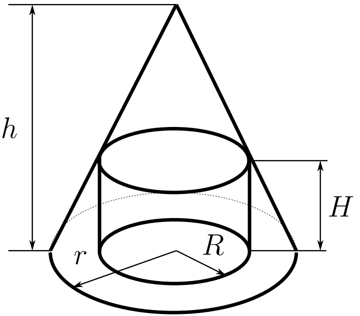
Розв'язання

$$H = \frac{3V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

$$l = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$$

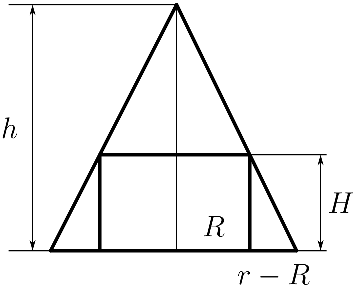
$$R^2 : H^2 : l^2 = 1 : 2 : 3$$

Задача



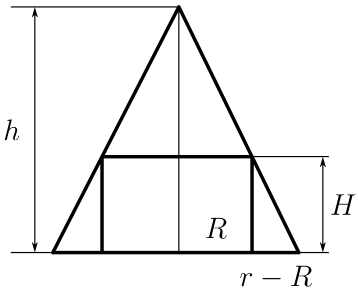
У конус вписано циліндр із заданими висотою H та радіусом основи R. Знайти конус з найменшим об'ємом.

Розв'язання



Нехай висота конуса – h, а радіус основи – r.

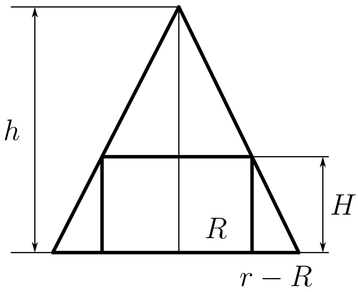
Розв'язання



Нехай висота конуса – h, а радіус основи – r.
Тоді об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

Розв'язання



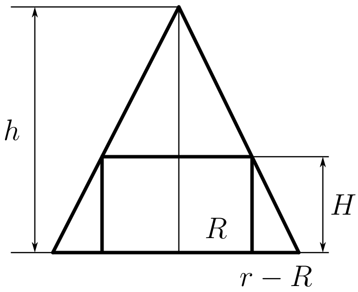
Нехай висота конуса – h, а радіус основи – r. Тоді об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

З подібності трикутників:

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{r-R}$$

Розв'язання



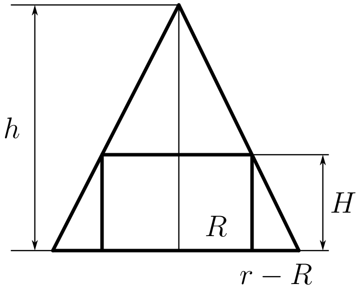
Нехай висота конуса – h, а радіус основи – r. Тоді об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

З подібності трикутників:

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{r-R} \Rightarrow h = \frac{Hr}{r-R}$$

Розв'язання



Нехай висота конуса – h, а радіус основи – r. Тоді об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

З подібності трикутників:

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{r - R} \Rightarrow h = \frac{Hr}{r - R}$$

$$V(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{Hr^3}{r - R}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{Hr^3}{r - R} \right)'$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{Hr^3}{r-R} \right)' = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{3r^2(r-R) - r^3}{(r-R)^2}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{Hr^3}{r - R} \right)' = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{3r^2(r - R) - r^3}{(r - R)^2}$$

$$3r^2(r - R) - r^3 = 0$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{Hr^3}{r-R} \right)' = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{3r^2(r-R) - r^3}{(r-R)^2}$$

$$3r^2(r-R) - r^3 = 0 \Rightarrow 2r = 3R$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{Hr^3}{r-R} \right)' = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{3r^2(r-R) - r^3}{(r-R)^2}$$

$$3r^2(r-R) - r^3 = 0 \Rightarrow 2r = 3R \Rightarrow r = \frac{3}{2}R$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{Hr^3}{r-R} \right)' = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{3r^2(r-R) - r^3}{(r-R)^2}$$

$$3r^2(r-R) - r^3 = 0 \Rightarrow 2r = 3R \Rightarrow r = \frac{3}{2}R$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$V''(r) = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{2r(r^2 - 3Rr + 3R^2)}{(r-R)^3}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{Hr^3}{r-R}\right)' = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{3r^2(r-R) - r^3}{(r-R)^2}$$

$$3r^2(r-R) - r^3 = 0 \Rightarrow 2r = 3R \Rightarrow r = \frac{3}{2}R$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

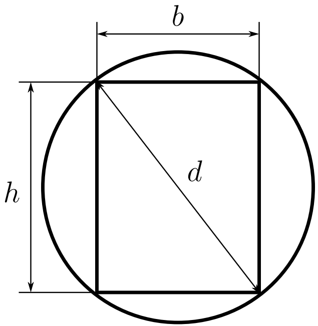
$$V''(r) = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{2r(r^2 - 3Rr + 3R^2)}{(r-R)^3} > 0$$

Отже, маємо мінімум. $h = \frac{Hr}{r-R} = 3H$.

Задача

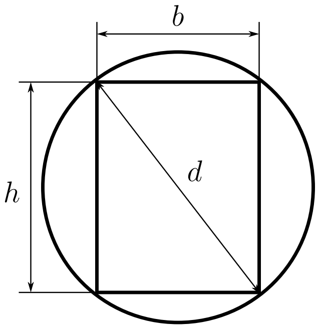
За заданої довжини міцність балки прямокутного перерізу є пропорційною до ширини і квадрата висоти перерізу. З циліндричного стовбура дерева діаметром d слід вирізати балку найбільшої міцності. Визначити ширину і висоту відповідного перерізу балки.

Розв'язання



Нехай висота перерізу – h, а ширина – b.

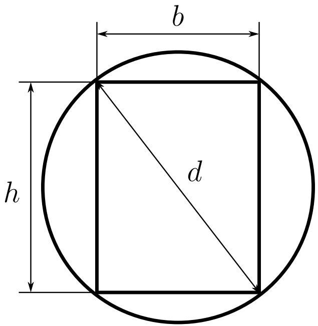
Розв'язання



Нехай висота перерізу – h, а ширина – b.
Тоді міцність балки (k – сталий коефіцієнт)

$$S = kbh^2$$

Розв'язання



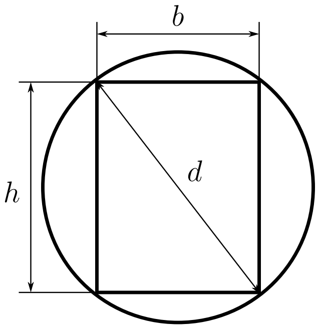
Нехай висота перерізу – h, а ширина – b.
Тоді міцність балки (k – сталий коефіцієнт)

$$S = kbh^2$$

З прямокутного трикутника:

$$h = \sqrt{d^2 - b^2}$$

Розв'язання



Нехай висота перерізу – h, а ширина – b.
Тоді міцність балки (k – сталий коефіцієнт)

$$S = kbh^2$$

З прямокутного трикутника:

$$h = \sqrt{d^2 - b^2}$$

$$S(b) = kb\left(d^2 - b^2\right)$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(b) = \left(kb\left(d^2 - b^2\right)\right)'$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(b) = \left(kb\left(d^2 - b^2\right)\right)' = k \cdot d^2 - k \cdot 3b^2$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(b) = \left(kb\left(d^2 - b^2\right)\right)' = k \cdot d^2 - k \cdot 3b^2$$

$$d^2 - 3b^2 = 0$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(b) = \left(kb\left(d^2 - b^2\right)\right)' = k \cdot d^2 - k \cdot 3b^2$$

$$d^2 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(b) = \left(kb\left(d^2 - b^2\right)\right)' = k \cdot d^2 - k \cdot 3b^2$$

$$d^2 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$S''(b) = -6kb$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(b) = \left(kb\left(d^2 - b^2\right)\right)' = k \cdot d^2 - k \cdot 3b^2$$

$$d^2 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$S''(b) = -6kb < 0$$

Отже, маємо максимум.

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(b) = \left(kb\left(d^2 - b^2\right)\right)' = k \cdot d^2 - k \cdot 3b^2$$

$$d^2 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$S''(b) = -6kb < 0$$

Отже, маємо максимум. $h = \frac{\sqrt{6}}{3}d$.

Задача

На якій висоті слід розташувати джерело світла над освітленою поверхнею, щоб освітленість на відстані a від основи перпендикуляра, що опущений із джерела світла на освітлену поверхню, була найбільшою? Відомо, що освітленість обернено пропорційна до квадрата відстані від джерела світла і обернено пропорційна до кута між променем та освітленою поверхнею.

Розв'язання

Освітленість

$$E = k \cdot \frac{\sin\varphi}{a^2 + h^2},$$

де k – коефіцієнт пропорційності, h – висота джерела світла над освітленою поверхнею, φ – кут між променем і освітленою поверхнею.

Розв'язання

Освітленість

$$E = k \cdot \frac{\sin\varphi}{a^2 + h^2},$$

де k – коефіцієнт пропорційності, h – висота джерела світла над освітленою поверхнею, φ – кут між променем і освітленою поверхнею.

$$\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

Розв'язання

Освітленість

$$E = k \cdot \frac{\sin\varphi}{a^2 + h^2},$$

де k – коефіцієнт пропорційності, h – висота джерела світла над освітленою поверхнею, φ – кут між променем і освітленою поверхнею.

$$\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

Отже,

$$E(h) = k \cdot \frac{h}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$E'(h) = \left(k \cdot \frac{h}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$E'(h) = \left(k \cdot \frac{h}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\right)' = k \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$E'(h) = \left(k \cdot \frac{h}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\right)' = k \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$a^2 - 2h^2 = 0$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$E'(h) = \left(k \cdot \frac{h}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \right)' = k \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$a^2 - 2h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$E'(h) = \left(k \cdot \frac{h}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\right)' = k \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$a^2 - 2h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$E''(h) = k \cdot \frac{3h(2h^2 - 3a^2)}{(a^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$E'(h) = \left(k \cdot \frac{h}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\right)' = k \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$a^2 - 2h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$E''(h) = k \cdot \frac{3h(2h^2 - 3a^2)}{(a^2+h^2)^{\frac{7}{2}}} < 0$$

Отже, маємо максимум.

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$E'(h) = \left(k \cdot \frac{h}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\right)' = k \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

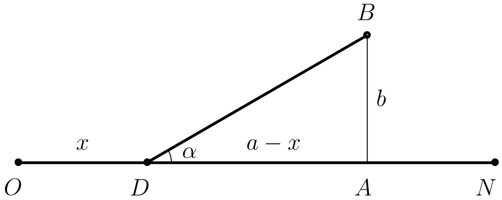
$$a^2 - 2h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$E''(h) = k \cdot \frac{3h(2h^2 - 3a^2)}{(a^2+h^2)^{\frac{7}{2}}} < 0$$

Отже, маємо максимум. $E = \frac{kh}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Задача



На відстані $AB = b$ від прямолінійної магістралі ON знаходиться житловий комплекс B. Від якого місця D магістралі слід зробити прямолінійне відгалуження DB, щоб загальна вартість проведення водопроводу до комплексу була найменшою, якщо відомо, що вартість одиниці довжини трубопроводу за напрямками OD, DN та DB дорівнюють відповідно k_1, k_2 та k_3 гривень, $OA = a$, $ON = l$?

Розв'язання

Вартість водопроводу:

1. на ділянці OD дорівнює $k_1 x$;

Розв'язання

Вартість водопроводу:

1. на ділянці OD дорівнює $k_1 x$;
2. на ділянці DN дорівнює $k_2(l - x)$;

Розв'язання

Вартість водопроводу:

1. на ділянці OD дорівнює $k_1 x$;
2. на ділянці DN дорівнює $k_2(l - x)$;
3. на ділянці DB дорівнює $k_3\sqrt{(a - x)^2 + b^2}$.

Розв'язання

Вартість водопроводу:

1. на ділянці OD дорівнює k_1x;
2. на ділянці DN дорівнює $k_2(l-x)$;
3. на ділянці DB дорівнює $k_3\sqrt{(a-x)^2+b^2}$.

Загальна вартість $C(x) = k_1x + k_2(l-x) + k_3\sqrt{(a-x)^2+b^2}$.

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$C'(x) = \left(k_1 x + k_2(l - x) + k_3\sqrt{(a - x)^2 + b^2}\right)'$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$C'(x) = \left(k_1 x + k_2(l - x) + k_3\sqrt{(a-x)^2 + b^2}\right)' = k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$C'(x) = \left(k_1 x + k_2(l - x) + k_3\sqrt{(a-x)^2 + b^2}\right)' = k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} =$$

$$= k_1 - k_2 - k_3 \cos\alpha$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$C'(x) = \left(k_1 x + k_2(l - x) + k_3\sqrt{(a-x)^2 + b^2}\right)' = k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} =$$

$$= k_1 - k_2 - k_3 \cos\alpha$$

$$k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$C'(x) = \left(k_1x + k_2(l - x) + k_3\sqrt{(a - x)^2 + b^2}\right)' = k_1 - k_2 - \frac{k_3(a - x)}{\sqrt{(a - x)^2 + b^2}} =$$

$$= k_1 - k_2 - k_3 \cos \alpha$$

$$k_1 - k_2 - \frac{k_3(a - x)}{\sqrt{(a - x)^2 + b^2}} = 0 \Rightarrow (k_1 - k_2)\sqrt{(a - x)^2 + b^2} = k_3(a - x)$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$C'(x) = \left(k_1 x + k_2(l-x) + k_3\sqrt{(a-x)^2+b^2}\right)' = k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} =$$

$$= k_1 - k_2 - k_3\cos\alpha$$

$$k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0 \Rightarrow (k_1-k_2)\sqrt{(a-x)^2+b^2} = k_3(a-x)$$

$$x = a - \frac{(k_1-k_2)b}{\sqrt{k_3^2-(k_1-k_2)^2}};$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$C'(x) = \left(k_1 x + k_2(l - x) + k_3\sqrt{(a-x)^2 + b^2}\right)' = k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} =$$

$$= k_1 - k_2 - k_3 \cos\alpha$$

$$k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0 \Rightarrow (k_1 - k_2)\sqrt{(a-x)^2+b^2} = k_3(a-x)$$

$$x = a - \frac{(k_1-k_2)b}{\sqrt{k_3^2 - (k_1-k_2)^2}}; \ \cos\alpha = \frac{k_1-k_2}{k_3};$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$C'(x) = \left(k_1 x + k_2(l-x) + k_3\sqrt{(a-x)^2+b^2}\right)' = k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} =$$

$$= k_1 - k_2 - k_3\cos\alpha$$

$$k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0 \Rightarrow (k_1-k_2)\sqrt{(a-x)^2+b^2} = k_3(a-x)$$

$$x = a - \frac{(k_1-k_2)b}{\sqrt{k_3^2-(k_1-k_2)^2}};\ \cos\alpha = \frac{k_1-k_2}{k_3};\ x = a - b\operatorname{ctg}\alpha$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$C''(x) = \frac{k_3 b^2}{((a-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$C'(x) = \left(k_1 x + k_2(l - x) + k_3\sqrt{(a-x)^2 + b^2}\right)' = k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} =$$

$$= k_1 - k_2 - k_3 \cos\alpha$$

$$k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0 \Rightarrow (k_1 - k_2)\sqrt{(a-x)^2+b^2} = k_3(a-x)$$

$$x = a - \frac{(k_1-k_2)b}{\sqrt{k_3^2 - (k_1-k_2)^2}};\ \cos\alpha = \frac{k_1-k_2}{k_3};\ x = a - b\operatorname{ctg}\alpha$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$C''(x) = \frac{k_3 b^2}{((a-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$ Отже, маємо мінімум.