Розв'язання задач на екстремум функції (частина 1)

Задача

Розкласти 8 на два доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.

Розв'язання

Нехай x та $8 - x$ шукані доданки.

Розв'язання

Нехай x та $8 - x$ шукані доданки.
Тоді, за умовою задачі, слід знайти найменше значення функції

$$f(x) = x^3 + (8 - x)^3$$

- Знаходимо критичні точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(8 - x)^2$$

Розв'язання

Нехай x та $8 - x$ шукані доданки.
Тоді, за умовою задачі, слід знайти найменше значення функції

$$f(x) = x^3 + (8 - x)^3$$

- Знаходимо критичні точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(8 - x)^2 = 48x - 192$$

Розв'язання

Нехай x та $8 - x$ шукані доданки.
Тоді, за умовою задачі, слід знайти найменше значення функції

$$f(x) = x^3 + (8 - x)^3$$

- Знаходимо критичні точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(8 - x)^2 = 48x - 192 = 0$$

Розв'язання

Нехай x та $8 - x$ шукані доданки.
Тоді, за умовою задачі, слід знайти найменше значення функції

$$f(x) = x^3 + (8 - x)^3$$

- Знаходимо критичні точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(8 - x)^2 = 48x - 192 = 0$$

Звідси $x = 192/48 = 4$.

Розв'язання

Нехай x та $8 - x$ шукані доданки.
Тоді, за умовою задачі, слід знайти найменше значення функції

$$f(x) = x^3 + (8 - x)^3$$

- Знаходимо критичні точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(8 - x)^2 = 48x - 192 = 0$$

  Звідси $x = 192/48 = 4$.

- Користуємося достатніми умовами екстремуму:

$$f''(x) = 48$$

Розв'язання

Нехай x та $8-x$ шукані доданки.
Тоді, за умовою задачі, слід знайти найменше значення функції

$$f(x) = x^3 + (8-x)^3$$

- Знаходимо критичні точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(8-x)^2 = 48x - 192 = 0$$

  Звідси $x = 192/48 = 4$.
- Користуємося достатніми умовами екстремуму:

$$f''(x) = 48 \geqslant 0$$

Розв'язання

Нехай x та $8 - x$ шукані доданки.
Тоді, за умовою задачі, слід знайти найменше значення функції

$$f(x) = x^3 + (8 - x)^3$$

- Знаходимо критичні точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(8 - x)^2 = 48x - 192 = 0$$

  Звідси $x = 192/48 = 4$.

- Користуємося достатніми умовами екстремуму:

$$f''(x) = 48 \geqslant 0$$

  Отже, маємо мінімум.

Розв'язання

Нехай x та $8 - x$ шукані доданки.
Тоді, за умовою задачі, слід знайти найменше значення функції

$$f(x) = x^3 + (8 - x)^3$$

- Знаходимо критичні точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(8 - x)^2 = 48x - 192 = 0$$

  Звідси $x = 192/48 = 4$.
- Користуємося достатніми умовами екстремуму:

$$f''(x) = 48 \geqslant 0$$

  Отже, маємо мінімум.
  Відповідь: Шуканими доданками є $x = 4$ та $y = 4$.

Задача

Довести, що серед усіх прямокутників, які мають заданий периметр $2p$, найбільшу площу має квадрат.

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину $p - x$, а площа прямокутника дорівнює

$$S(x) = x(p - x)$$

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину $p - x$, а площа прямокутника дорівнює

$$S(x) = x(p - x)$$

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(x) = p - 2x$$

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину $p - x$, а площа прямокутника дорівнює

$$S(x) = x(p - x)$$

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(x) = p - 2x$$

$$p - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{2}$$

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину $p - x$, а площа прямокутника дорівнює

$$S(x) = x(p - x)$$

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(x) = p - 2x$$

$$p - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{2}$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$S''(x) = -2$$

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину $p - x$, а площа прямокутника дорівнює

$$S(x) = x(p - x)$$

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(x) = p - 2x$$

$$p - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{2}$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$S''(x) = -2 \leqslant 0$$

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину $p - x$, а площа прямокутника дорівнює

$$S(x) = x(p - x)$$

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(x) = p - 2x$$

$$p - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{2}$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$S''(x) = -2 \leqslant 0$$

Отже, маємо максимум.

Розв'язання

Максимальним значенням площі буде $S = \frac{p^2}{4}$ при рівності сторін прямокутника – $x = p - x = \frac{p}{2}$.

Розв'язання

Максимальним значенням площі буде $S = \frac{p^2}{4}$ при рівності сторін прямокутника – $x = p - x = \frac{p}{2}$.
Прямокутник із рівними сторонами – квадрат. Що і слід було довести.

Задача

Довести, що серед усіх прямокутників, що мають задану площу a^2, квадрат має найменший периметр.

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину a^2/x.

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину a^2/x.
Периметр прямокутника при цьому дорівнює

$$p(x) = 2x + 2 \cdot a^2/x$$

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину a^2/x.
Периметр прямокутника при цьому дорівнює

$$p(x) = 2x + 2 \cdot a^2/x$$

- Знаходимо критичну точку:

$$p'(x) = 2 - 2 \cdot a^2/x^2$$

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину a^2/x.
Периметр прямокутника при цьому дорівнює

$$p(x) = 2x + 2 \cdot a^2/x$$

- Знаходимо критичну точку:

$$p'(x) = 2 - 2 \cdot a^2/x^2$$

$$2 - 2 \cdot \frac{a^2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm a$$

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину a^2/x.
Периметр прямокутника при цьому дорівнює

$$p(x) = 2x + 2 \cdot a^2/x$$

- Знаходимо критичну точку:

$$p'(x) = 2 - 2 \cdot a^2/x^2$$

$$2 - 2 \cdot \frac{a^2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm a$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$p''(x) = 4 \cdot \frac{a^2}{x^3}$$

Розв'язання

Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x.
Тоді інша сторона має довжину a^2/x.
Периметр прямокутника при цьому дорівнює

$$p(x) = 2x + 2 \cdot a^2/x$$

- Знаходимо критичну точку:

$$p'(x) = 2 - 2 \cdot a^2/x^2$$

$$2 - 2 \cdot \frac{a^2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm a$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$p''(x) = 4 \cdot \frac{a^2}{x^3} > 0$$

Розв'язання

Отже, маємо мінімум.

Розв'язання

Отже, маємо мінімум.
Мінімальним значенням периметра буде $p = 4a$ при рівності сторін прямокутника – $x = \frac{a^2}{x} = a$.

Розв'язання

Отже, маємо мінімум.
Мінімальним значенням периметра буде $p = 4a$ при рівності сторін прямокутника – $x = \frac{a^2}{x} = a$.
Прямокутник із рівними сторонами – квадрат. Що і слід було довести.

Задача

Основа трикутника дорівнює a, а його периметр – $2p$. Визначити дві інші сторони так, щоб площа трикутника була найбільшою.

Розв'язання

Нехай одна з інших сторін трикутника має довжину $b = x$.

Розв'язання

Нехай одна з інших сторін трикутника має довжину $b = x$.
Тоді третя сторона має довжину $c = 2p - a - x$.

Розв'язання

Нехай одна з інших сторін трикутника має довжину $b = x$.
Тоді третя сторона має довжину $c = 2p - a - x$.
За формулою Герона площа

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Розв'язання

Нехай одна з інших сторін трикутника має довжину $b = x$.
Тоді третя сторона має довжину $c = 2p - a - x$.
За формулою Герона площа

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}$$

Розв'язання

Нехай одна з інших сторін трикутника має довжину $b = x$.
Тоді третя сторона має довжину $c = 2p - a - x$.
За формулою Герона площа

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}$$

Площа буде максимальною, коли буде максимальним вираз
$f(x) = (p-x)(a+x-p)$.

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$f'(x) = -(a + x - p) + p - x$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$f'(x) = -(a + x - p) + p - x = 2p - a - 2x$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$f'(x) = -(a + x - p) + p - x = 2p - a - 2x$$

$$2p - a - 2x = 0 \Rightarrow x = p - \frac{a}{2}$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$f'(x) = -(a + x - p) + p - x = 2p - a - 2x$$

$$2p - a - 2x = 0 \Rightarrow x = p - \frac{a}{2}$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$f''(x) = -2$$

Розв'язання

- Знаходимо критичну точку:

$$f'(x) = -(a + x - p) + p - x = 2p - a - 2x$$

$$2p - a - 2x = 0 \Rightarrow x = p - \frac{a}{2}$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$f''(x) = -2 < 0$$

Розв'язання

Отже, маємо максимум.

Розв'язання

Отже, маємо максимум.
Максимального значення площа досягатиме при $b = x = p - \frac{a}{2}$.

Розв'язання

Отже, маємо максимум.
Максимального значення площа досягатиме при $b = x = p - \frac{a}{2}$.
При цьому $c = c = 2p - a - x = p - \frac{a}{2}$.

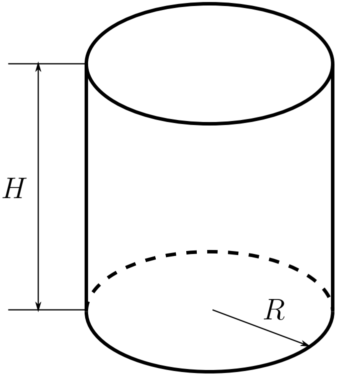
Розв'язання

Отже, маємо максимум.
Максимального значення площа досягатиме при $b = x = p - \frac{a}{2}$.
При цьому $c = c = 2p - a - x = p - \frac{a}{2}$.
Отже, трикутник має бути рівнобедреним.

Задача

Якими повинні бути розміри жерстяного циліндричного бака об'ємом V, щоб на його виготовлення пішло якнайменше матеріалів?

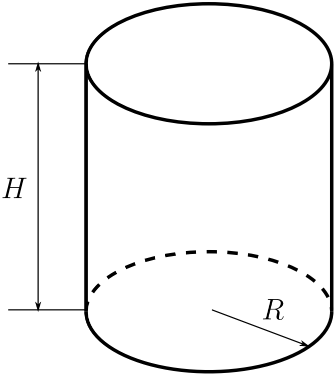
Розв'язання



Кількість жерсті визначається повною площею циліндричного бака. Повна поверхня циліндра дорівнює

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

Розв'язання



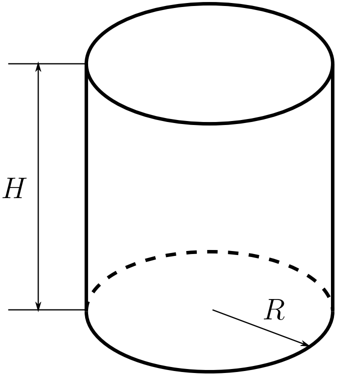
Кількість жерсті визначається повною площею циліндричного бака. Повна поверхня циліндра дорівнює

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

Об'єм циліндра –

$$V = \pi R^2 H$$

Розв'язання



Кількість жерсті визначається повною площею циліндричного бака. Повна поверхня циліндра дорівнює

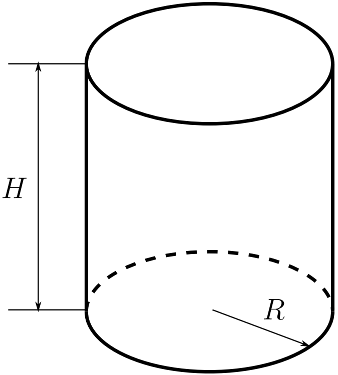
$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

Об'єм циліндра –

$$V = \pi R^2 H$$

Одну з двох змінних з цих рівнянь слід виключити.

Розв'язання



Кількість жерсті визначається повною площею циліндричного бака. Повна поверхня циліндра дорівнює

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

Об'єм циліндра –

$$V = \pi R^2 H$$

Одну з двох змінних з цих рівнянь слід виключити.
З другого рівняння:

$$H = \frac{V}{\pi R^2}$$

Розв'язання

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

Розв'язання

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{V}{\pi R^2}$$

Розв'язання

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + 2\frac{V}{R}$$

Розв'язання

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + 2\frac{V}{R}$$

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(R) = 4\pi R - 2\frac{V}{R^2}$$

Розв'язання

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + 2\frac{V}{R}$$

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(R) = 4\pi R - 2\frac{V}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}$$

Розв'язання

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + 2\frac{V}{R}$$

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(R) = 4\pi R - 2\frac{V}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}$$

$$4\pi R^3 - 2V = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Розв'язання

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + 2\frac{V}{R}$$

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(R) = 4\pi R - 2\frac{V}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}$$

$$4\pi R^3 - 2V = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$S''(x) = 4\pi + \frac{4V}{R^3}$$

Розв'язання

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + 2\frac{V}{R}$$

- Знаходимо критичну точку:

$$S'(R) = 4\pi R - 2\frac{V}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}$$

$$4\pi R^3 - 2V = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

- Перевіряємо достатню умову екстремуму:

$$S''(x) = 4\pi + \frac{4V}{R^3} > 0$$

Тобто, маємо мінімум.

Розв'язання

$$H = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2}$$

Розв'язання

$$H = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Розв'язання

$$H = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R$$

Розв'язання

$$H = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R$$

Слід взяти висоту рівною діаметру основи.

Задача

Слід виготовити циліндричну посудину заданого об'єму V, відкриту згори. Визначити її радіус і висоту так, щоб поверхня посудини була найменшою.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.