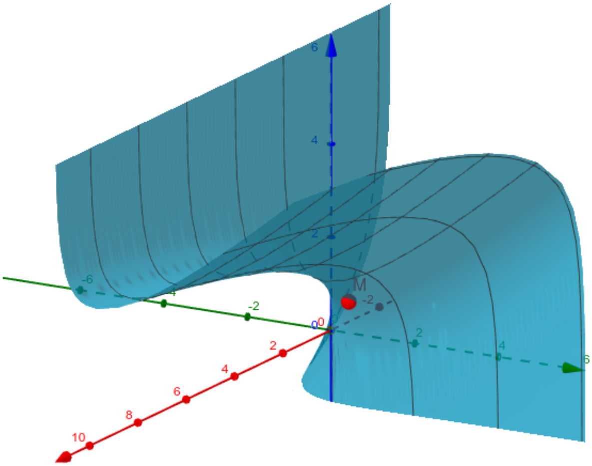
Дотична площина і нормаль до поверхні. Екстремум функції декількох змінних. Умовний екстремум функції декількох змінних

Задача

Написати рівняння дотичної площини та нормалі у вказаній точці до поверхні: $z = y + \ln \dfrac{x}{y}$ у точці $M\,(1, 1, 1)$.

Розв’язання



Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = y + \ln \frac{x}{y}$$

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = y + \ln \frac{x}{y}$$

$$f'_x = \frac{1}{x};$$

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = y + \ln \frac{x}{y}$$

$$f'_x = \frac{1}{x}; f'_y = 1 - \frac{1}{y}.$$

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = y + \ln \frac{x}{y}$$

$$f'_x = \frac{1}{x}; f'_y = 1 - \frac{1}{y}.$$

$$f'_x(1, 1) = \frac{1}{1} = 1;$$

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = y + \ln \frac{x}{y}$$

$$f'_x = \frac{1}{x}; f'_y = 1 - \frac{1}{y}.$$

$$f'_x(1, 1) = \frac{1}{1} = 1; f'_y(1, 1) = 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = y + \ln \frac{x}{y}$$

$$f'_x = \frac{1}{x}; f'_y = 1 - \frac{1}{y}.$$

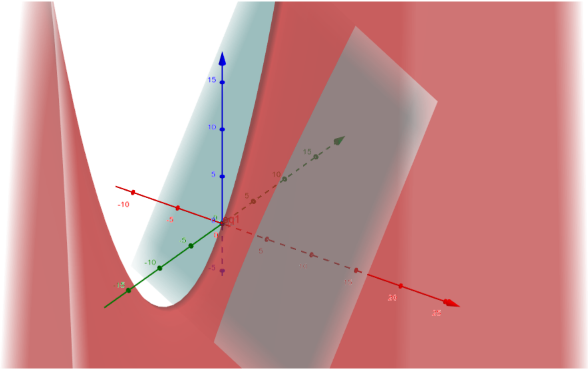
$$f'_x(1, 1) = \frac{1}{1} = 1; f'_y(1, 1) = 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

$$z - 1 = 1(x - 1) + 0(y - 1) \Rightarrow x - z = 0.$$

Задача

До поверхні $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ провести дотичну площину, паралельну до площини $x + 2y - z = 0$.

Розв'язання



Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = -x^2 + xy + 8x - 5$$

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = -x^2 + xy + 8x - 5$$

$$f'_x = -2x + y + 8;$$

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = -x^2 + xy + 8x - 5$$

$$f'_x = -2x + y + 8; f'_y = x.$$

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = -x^2 + xy + 8x - 5$$

$$f'_x = -2x + y + 8; f'_y = x.$$

Отже, вектор нормалі до дотичної площини має бути паралельним до вектора $\vec{n} = (-2x + y + 8; x; -1)$.

Розв'язання

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Маємо

$$z = f(x, y) = -x^2 + xy + 8x - 5$$

$$f'_x = -2x + y + 8; f'_y = x.$$

Отже, вектор нормалі до дотичної площини має бути паралельним до вектора $\vec{n} = (-2x + y + 8; x; -1)$.
Крім того, за умовами задачі цей вектор має бути паралельним до вектора $(1; 2; -1)$. Тому для точки дотику (x_0, y_0) мають виконуватися такі рівняння:

$$\frac{-2x_0 + y_0 + 8}{1} = \frac{x_0}{2} = \frac{-1}{-1}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} -2x_0 + y_0 + 8 = 1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} -2x_0 + y_0 + 8 = 1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

$$x_0 = 2; y_0 = -3.$$

Розв'язання

$$\begin{cases} -2x_0 + y_0 + 8 = 1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

$$x_0 = 2; y_0 = -3.$$

Підставляючи ці значення до рівняння дотичної площини, маємо

$$z - (-2^2 + 2 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 - 5) = (-2 \cdot 2 - 3 + 8)(x - 2) + 2(y - (-3)).$$

Розв'язання

$$\begin{cases} -2x_0 + y_0 + 8 = 1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

$$x_0 = 2; y_0 = -3.$$

Підставляючи ці значення до рівняння дотичної площини, маємо

$$z - (-2^2 + 2 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 - 5) = (-2 \cdot 2 - 3 + 8)(x - 2) + 2(y - (-3)).$$

Спрощуємо:

$$z - 1 = x - 2 + 2y + 6$$

Розв'язання

$$\begin{cases} -2x_0 + y_0 + 8 = 1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

$$x_0 = 2; y_0 = -3.$$

Підставляючи ці значення до рівняння дотичної площини, маємо

$$z - (-2^2 + 2 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 - 5) = (-2 \cdot 2 - 3 + 8)(x - 2) + 2(y - (-3)).$$

Спрощуємо:

$$z - 1 = x - 2 + 2y + 6 \Rightarrow x + 2y - z + 5 = 0.$$

Задача

Дослідити на екстремум функцію

$$z = ye^{-2y^2 - x^2 - x}$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{-2y^2-x^2-x} \cdot (-2x-1)$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{-2y^2-x^2-x} \cdot (-2x-1) = -y(2x+1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{-2y^2-x^2-x} \cdot (-2x-1) = -y(2x+1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-2y^2-x^2-x} + ye^{-2y^2-x^2-x} \cdot (-4y)$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{-2y^2-x^2-x} \cdot (-2x-1) = -y(2x+1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-2y^2-x^2-x} + ye^{-2y^2-x^2-x} \cdot (-4y) = (1-4y^2)e^{-2y^2-x^2-x}.$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{-2y^2-x^2-x} \cdot (-2x-1) = -y(2x+1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-2y^2-x^2-x} + ye^{-2y^2-x^2-x} \cdot (-4y) = (1-4y^2)e^{-2y^2-x^2-x}.$$

Далі, розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} -y(2x+1)e^{-2y^2-x^2-x} = 0 \\ (1-4y^2)e^{-2y^2-x^2-x} = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} -y(2x+1)e^{-2y^2-x^2-x} = 0 \\ (1-4y^2)e^{-2y^2-x^2-x} = 0 \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} 2x+1 = 0 \\ 1-4y^2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} -y(2x+1)e^{-2y^2-x^2-x} = 0 \\ (1-4y^2)e^{-2y^2-x^2-x} = 0 \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} 2x+1 = 0 \\ 1-4y^2 = 0 \end{cases}$$

Маємо

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

Розв’язання

Маємо дві критичних точки – $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ і $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Розв'язання

Маємо дві критичних точки – $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ і $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\left((-2x-1)^2 e^{-2y^2-x^2-x} - 2e^{-2y^2-x^2-x}\right)$$

Розв'язання

Маємо дві критичних точки – $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ і $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\left((-2x-1)^2 e^{-2y^2-x^2-x} - 2e^{-2y^2-x^2-x}\right) = y(4x^2+4x-1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

Розв'язання

Маємо дві критичних точки – $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ і $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\left((-2x-1)^2 e^{-2y^2-x^2-x} - 2e^{-2y^2-x^2-x}\right) = y(4x^2+4x-1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-2x-1)e^{-2y^2-x^2-x} - 4(-2x-1)y^2 e^{-2y^2-x^2-x}$$

Розв'язання

Маємо дві критичних точки – $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ і $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\left((-2x-1)^2 e^{-2y^2-x^2-x} - 2e^{-2y^2-x^2-x}\right) = y(4x^2+4x-1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-2x-1)e^{-2y^2-x^2-x} - 4(-2x-1)y^2 e^{-2y^2-x^2-x} =$$

$$= ((8x+4)y^2 - 2x - 1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

Розв'язання

Маємо дві критичних точки – $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ і $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\left((-2x-1)^2 e^{-2y^2-x^2-x} - 2e^{-2y^2-x^2-x}\right) = y(4x^2+4x-1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-2x-1)e^{-2y^2-x^2-x} - 4(-2x-1)y^2 e^{-2y^2-x^2-x} =$$

$$= ((8x+4)y^2 - 2x - 1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 16y^3 e^{-2y^2-x^2-x} - 12ye^{-2y^2-x^2-x}$$

Розв'язання

Маємо дві критичних точки – $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ і $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\left((-2x-1)^2 e^{-2y^2-x^2-x} - 2e^{-2y^2-x^2-x}\right) = y(4x^2+4x-1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-2x-1)e^{-2y^2-x^2-x} - 4(-2x-1)y^2 e^{-2y^2-x^2-x} =$$

$$= ((8x+4)y^2 - 2x - 1)e^{-2y^2-x^2-x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 16y^3 e^{-2y^2-x^2-x} - 12y e^{-2y^2-x^2-x} = 4y(4y^2-3)e^{-2y^2-x^2-x}.$$

Розв'язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Розв’язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$= \left[y(4x^2+4x-1) \cdot 4y(4y^2-3) - ((8x+4)y^2-2x-1)^2\right] e^{-4y^2-2x^2-2x}$$

Розв'язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$= \left[y(4x^2+4x-1)\cdot 4y(4y^2-3) - ((8x+4)y^2-2x-1)^2\right] e^{-4y^2-2x^2-2x}$$

$$D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) =$$

$$\left[-\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} - 1\right)\cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right)\left(4\frac{1}{4} - 3\right) - \left(\left(4 - 8\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} - 1\right)^2\right]\cdot e^{-4\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-1}$$

Розв'язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$= \left[y(4x^2+4x-1)\cdot 4y(4y^2-3) - ((8x+4)y^2-2x-1)^2\right] e^{-4y^2-2x^2-2x}$$

$$D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) =$$

$$\left[-\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} - 1\right)\cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right)\left(4\frac{1}{4} - 3\right) - \left(\left(4 - 8\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} - 1\right)^2\right] \cdot e^{-4\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-1}$$

$$= 4e^{-\frac{1}{2}}$$

Розв'язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$= \left[y(4x^2+4x-1) \cdot 4y(4y^2-3) - ((8x+4)y^2-2x-1)^2\right] e^{-4y^2-2x^2-2x}$$

$$D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) =$$

$$\left[-\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4}-4\frac{1}{2}-1\right) \cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right)\left(4\frac{1}{4}-3\right) - \left(\left(4-8\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}-1\right)^2\right] \cdot e^{-4\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-1}$$

$$= 4e^{-\frac{1}{2}} > 0$$

Розв'язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$= \left[y(4x^2+4x-1)\cdot 4y(4y^2-3) - ((8x+4)y^2-2x-1)^2\right] e^{-4y^2-2x^2-2x}$$

$$D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) =$$

$$\left[-\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} - 1\right)\cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right)\left(4\frac{1}{4} - 3\right) - \left(\left(4 - 8\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} - 1\right)^2\right] \cdot e^{-4\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-1}$$

$$= 4e^{-\frac{1}{2}} > 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ мінімум.

Розв'язання

$$D\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4}-4\frac{1}{2}-1\right)\cdot 4\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4}-3\right)-\left(\left(-8\frac{1}{2}+4\right)\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}-1\right)^{2}\right]\cdot e^{-4\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-1}$$

Розв'язання

$$D\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4}-4\frac{1}{2}-1\right)\cdot 4\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4}-3\right)-\left(\left(-8\frac{1}{2}+4\right)\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}-1\right)^2\right]\cdot e^{-4\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-1}$$

$$=4e^{-\frac{1}{2}}$$

Розв'язання

$$D\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4}-4\frac{1}{2}-1\right)\cdot 4\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4}-3\right)-\left(\left(-8\frac{1}{2}+4\right)\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}-1\right)^{2}\right]\cdot e^{-4\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-1}$$

$$=4e^{-\frac{1}{2}}>0$$

Розв'язання

$$D\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4}-4\frac{1}{2}-1\right)\cdot 4\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{4}-3\right)-\left(\left(-8\frac{1}{2}+4\right)\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}-1\right)^2\right]\cdot e^{-4\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-1}$$

$$=4e^{-\frac{1}{2}}>0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ маємо максимум.

Задача

Дослідити на екстремум функцію

$$z = 3^{x^2+y^2-2x+1}$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3^{x^2+y^2-2x+1} \ln 3 \cdot (2x-2);$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3 \cdot (2x-2); \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3 \cdot 2y.$$

Розв'язання

Спочатку визначимо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3 \cdot (2x-2); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3 \cdot 2y.$$

Далі, розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3 \cdot (2x-2) = 0 \\ 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3 \cdot 2y = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3 \cdot (2x-2) = 0 \\ 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3 \cdot 2y = 0 \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y=0 \end{cases}$$

Розв'язання

У цьому випадку

$$\begin{cases} 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3\cdot(2x-2)=0 \\ 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3\cdot 2y=0 \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y=0 \end{cases}$$

Звідси $x=1$ та $y=0$.

Розв'язання

Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3^{x^2+y^2-2x+1} \ln^2 3 \cdot (2x-2)^2 + 3^{x^2+y^2-2x+1} \ln 3 \cdot 2$$

Розв’язання

Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3^{x^2+y^2-2x+1} \ln^2 3 \cdot (2x-2)^2 + 3^{x^2+y^2-2x+1} \ln 3 \cdot 2 =$$

$$= (12x^2 \ln^2 3 - 24x \ln^2 3 + 12 \ln^2 3 + 6 \ln 3) 3^{x^2+y^2-2x+1};$$

Розв'язання

Обчислимо $D(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln^2 3\cdot(2x-2)^2 + 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3\cdot 2 =$$

$$= (12x^2\ln^2 3 - 24x\ln^2 3 + 12\ln^2 3 + 6\ln 3)3^{x^2+y^2-2x+1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4(x-1)y\ln^2 3\cdot 3^{x^2+y^2-2x+1};$$

Розв'язання

Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3^{x^2+y^2-2x+1} \ln^2 3 \cdot (2x-2)^2 + 3^{x^2+y^2-2x+1} \ln 3 \cdot 2 =$$

$$= (12x^2 \ln^2 3 - 24x \ln^2 3 + 12 \ln^2 3 + 6 \ln 3) 3^{x^2+y^2-2x+1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4(x-1)y \ln^2 3 \cdot 3^{x^2+y^2-2x+1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3^{x^2+y^2-2x+1} \ln^2 3 \cdot y^2 + 3^{x^2+y^2-2x+1} \ln 3 \cdot 2$$

Розв'язання

Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln^2 3 \cdot (2x-2)^2 + 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3 \cdot 2 =$$

$$= (12x^2\ln^2 3 - 24x\ln^2 3 + 12\ln^2 3 + 6\ln 3)3^{x^2+y^2-2x+1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4(x-1)y\ln^2 3 \cdot 3^{x^2+y^2-2x+1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln^2 3 \cdot y^2 + 3^{x^2+y^2-2x+1}\ln 3 \cdot 2 =$$

$$= (4y^2\ln^2 3 + 2\ln 3)3^{x^2+y^2-2x+1}.$$

Розв'язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Розв'язання

$$D(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2 =$$

$$\left[\left(12x^2\ln^2 3-24x\ln^2 3+12\ln^2 3+6\ln 3\right)\left(4y^2\ln^2 3+2\ln 3\right)-\left(4(x-1)y\ln^2 3\right)^2\right]\times$$

$$\times 3^{2x^2+2y^2-4x+2}.$$

Розв'язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$\left[\left(12x^2 \ln^2 3 - 24x \ln^2 3 + 12 \ln^2 3 + 6 \ln 3\right)\left(4y^2 \ln^2 3 + 2 \ln 3\right) - \left(4(x-1)y \ln^2 3\right)^2\right] \times$$

$$\times 3^{2x^2+2y^2-4x+2}.$$

$$D(1,0) = 6 \ln 3 \cdot 2 \ln 3$$

Розв'язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$\left[\left(12x^2\ln^2 3 - 24x\ln^2 3 + 12\ln^2 3 + 6\ln 3\right)\left(4y^2\ln^2 3 + 2\ln 3\right) - \left(4(x-1)y\ln^2 3\right)^2\right] \times$$

$$\times 3^{2x^2+2y^2-4x+2}.$$

$$D(1,0) = 6\ln 3 \cdot 2\ln 3 = 12\ln^2 3 > 0$$

Розв'язання

$$D(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=$$

$$\left[\left(12x^2\ln^2 3-24x\ln^2 3+12\ln^2 3+6\ln 3\right)\left(4y^2\ln^2 3+2\ln 3\right)-\left(4(x-1)y\ln^2 3\right)^2\right]\times$$

$$\times 3^{2x^2+2y^2-4x+2}.$$

$$D(1,0)=6\ln 3\cdot 2\ln 3=12\ln^2 3>0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(1;0)$ є екстремум.

Розв'язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$\left[\left(12x^2\ln^2 3 - 24x\ln^2 3 + 12\ln^2 3 + 6\ln 3\right)\left(4y^2\ln^2 3 + 2\ln 3\right) - \left(4(x-1)y\ln^2 3\right)^2\right]\times$$

$$\times 3^{2x^2+2y^2-4x+2}.$$

$$D(1,0) = 6\ln 3\cdot 2\ln 3 = 12\ln^2 3 > 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(1;0)$ є екстремум.Оскільки $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1;0)} = 6\ln 3 > 0$, маємо мінімум.

Розв'язання

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$\left[\left(12x^2 \ln^2 3 - 24x \ln^2 3 + 12 \ln^2 3 + 6 \ln 3\right)\left(4y^2 \ln^2 3 + 2 \ln 3\right) - \left(4(x-1)y \ln^2 3\right)^2\right] \times$$

$$\times 3^{2x^2+2y^2-4x+2}.$$

$$D(1,0) = 6 \ln 3 \cdot 2 \ln 3 = 12 \ln^2 3 > 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(1;0)$ є екстремум.Оскільки $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1;0)} = 6 \ln 3 > 0$, маємо мінімум.

Обчислюємо $z_{\min}$:

$$z_{\min} = 3^0$$

Розв'язання

$$D(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=$$

$$\left[\left(12x^2\ln^2 3-24x\ln^2 3+12\ln^2 3+6\ln 3\right)\left(4y^2\ln^2 3+2\ln 3\right)-\left(4(x-1)y\ln^2 3\right)^2\right]\times$$

$$\times 3^{2x^2+2y^2-4x+2}.$$

$$D(1,0)=6\ln 3\cdot 2\ln 3=12\ln^2 3>0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(1;0)$ є екстремум.Оскільки $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1;0)}=6\ln 3>0$, маємо мінімум.

Обчислюємо $z_{\min}$:

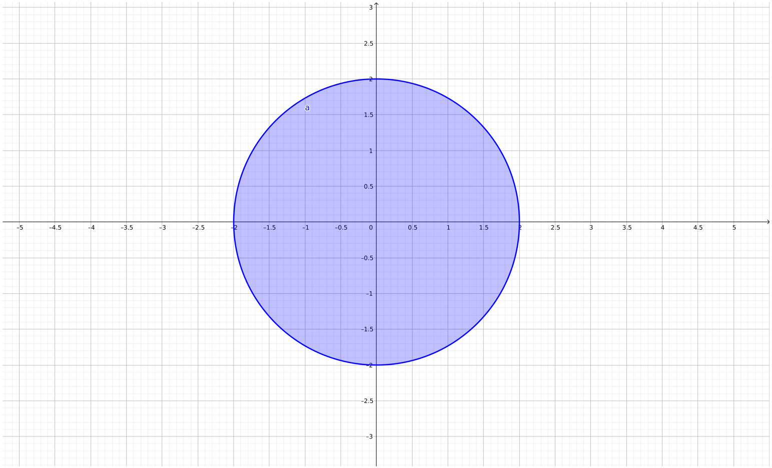
$$z_{\min}=3^0=1.$$

Задача

Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими. $z = y^2 - x^2 + 8;\ x^2 + y^2 \leqslant 4.$

Розв'язання

Екстремуму буде досягнуто або у критичній точці всередині області, або на межі області.



Розв'язання

Знаходимо критичні точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x;$$

Розв'язання

Знаходимо критичні точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Розв'язання

Знаходимо критичні точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Далі, розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Знаходимо критичні точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Далі, розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Отже, критичною точкою є точка $(0; 0)$.

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2;$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0;$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = -2 \cdot 2 - 0^2$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = -2 \cdot 2 - 0^2 = -4$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = -2 \cdot 2 - 0^2 = -4 < 0$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = -2 \cdot 2 - 0^2 = -4 < 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0; 0)$ немає екстремуму.

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Позначимо $f(x, y) = y^2 - x^2 + 8$ і $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Позначимо $f(x,y) = y^2 - x^2 + 8$ і $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 4$.
Тоді, функція Лагранжа:

$$u = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Позначимо $f(x, y) = y^2 - x^2 + 8$ і $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.
Тоді, функція Лагранжа:

$$u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = y^2 - x^2 + 8 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Позначимо $f(x, y) = y^2 - x^2 + 8$ і $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.
Тоді, функція Лагранжа:

$$u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = y^2 - x^2 + 8 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x + 2\lambda x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda y;$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Позначимо $f(x, y) = y^2 - x^2 + 8$ і $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.
Тоді, функція Лагранжа:

$$u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = y^2 - x^2 + 8 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x + 2\lambda x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda y;$$

$$\begin{cases} -2x + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Позначимо $f(x,y) = y^2 - x^2 + 8$ і $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 4$.
Тоді, функція Лагранжа:

$$u = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = y^2 - x^2 + 8 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x + 2\lambda x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda y;$$

$$\begin{cases} -2x + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 1; x = \pm 2; y = 0;$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Позначимо $f(x,y) = y^2 - x^2 + 8$ і $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 4$.
Тоді, функція Лагранжа:

$$u = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = y^2 - x^2 + 8 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x + 2\lambda x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda y;$$

$$\begin{cases} -2x + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 1; x = \pm 2; y = 0;$$

$$\lambda = -1; x = 0; y = \pm 2.$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Перевіряємо значення функції у виявлених критичних точках на межі області:

$$z(\pm 2, 0) = 0^2 - (\pm 2)^2 + 8$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Перевіряємо значення функції у виявлених критичних точках на межі області:

$$z(\pm 2, 0) = 0^2 - (\pm 2)^2 + 8 = 4$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Перевіряємо значення функції у виявлених критичних точках на межі області:

$$z(\pm 2, 0) = 0^2 - (\pm 2)^2 + 8 = 4$$

$$z(0, \pm 2) = (\pm 2)^2 - 0^2 + 8$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Перевіряємо значення функції у виявлених критичних точках на межі області:

$$z(\pm 2, 0) = 0^2 - (\pm 2)^2 + 8 = 4$$

$$z(0, \pm 2) = (\pm 2)^2 - 0^2 + 8 = 12$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Перевіряємо значення функції у виявлених критичних точках на межі області:

$$z(\pm 2, 0) = 0^2 - (\pm 2)^2 + 8 = 4$$

$$z(0, \pm 2) = (\pm 2)^2 - 0^2 + 8 = 12$$

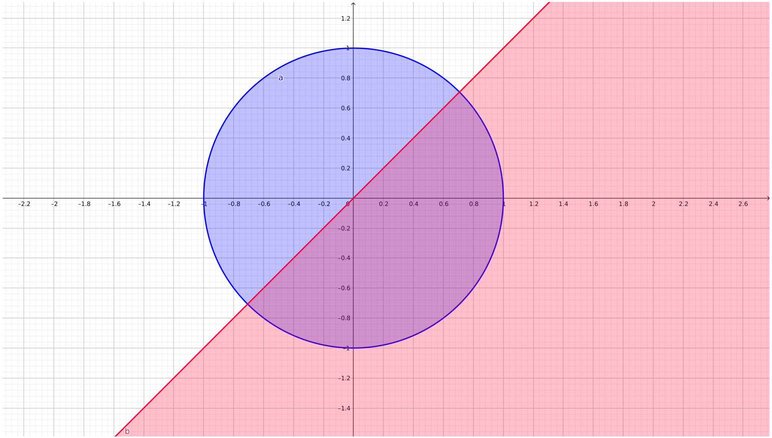
Отже, маємо $z_{\min} = 4$ у точках $(\pm 2, 0)$, $z_{\max} = 12$ у точках $(0, \pm 2)$.

Задача

Знайти найменше та найбільше значення функції в області обмеженій кривими. $z = x^2 + y^2 + 1$; $x^2 + y^2 \leqslant 1$; $x \geqslant y$.

Розв'язання

Екстремуму буде досягнуто або у критичній точці всередині області, або на межі області.



Розв'язання

Знаходимо критичні точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x;$$

Розв'язання

Знаходимо критичні точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Розв'язання

Знаходимо критичні точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Далі, розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Знаходимо критичні точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Далі, розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Отже, критичною точкою є точка $(0; 0)$.

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2;$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0;$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 2 \cdot 2 - 0^2$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$$

Розв'язання (екстремум у критичній точці)

Перевіримо достатні умови екстремуму.
Обчислимо $D(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$$

Отже, за теоремою про достатні умови екстремуму у точці $(0; 0)$ мінімум $(z_{\min} = 0^2 + 0^2 + 1 = 1)$.

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Просто підставимо значення з рівнянь, які визначають межу до рівняння функції.

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Просто підставимо значення з рівнянь, які визначають межу до рівняння функції.

- $x^2 + y^2 = 1$:

$$z = x^2 + y^2 + 1$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Просто підставимо значення з рівнянь, які визначають межу до рівняння функції.

- $x^2 + y^2 = 1$:
$$z = x^2 + y^2 + 1 = 1 + 1$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Просто підставимо значення з рівнянь, які визначають межу до рівняння функції.

- $x^2 + y^2 = 1$:
$$z = x^2 + y^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$
- $x = y$:
$$z = x^2 + y^2 + 1$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Просто підставимо значення з рівнянь, які визначають межу до рівняння функції.

- $x^2 + y^2 = 1$:

$$z = x^2 + y^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

- $x = y$:

$$z = x^2 + y^2 + 1 = 2x^2 + 1$$

  Критична точка: $4x = 0$ або $x = 0$.

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Просто підставимо значення з рівнянь, які визначають межу до рівняння функції.

- $x^2 + y^2 = 1$:
$$z = x^2 + y^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

- $x = y$:
$$z = x^2 + y^2 + 1 = 2x^2 + 1$$
Критична точка: $4x = 0$ або $x = 0$.
$$z''(x) = 4$$

Розв'язання (умовний екстремум)

Знайдемо екстремуми на межі області.
Просто підставимо значення з рівнянь, які визначають межу до рівняння функції.

- $x^2 + y^2 = 1$:
$$z = x^2 + y^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

- $x = y$:
$$z = x^2 + y^2 + 1 = 2x^2 + 1$$
Критична точка: $4x = 0$ або $x = 0$.
$$z''(x) = 4 > 0$$
За теоремою про достатні умови екстремуму функції однієї змінної маємо мінімум.

Розв'язання

Отже, маємо $z_{\min} = 1$ у точці $(0, 0)$, $z_{\max} = 2$ у точках, де $x^2 + y^2 = 1$.