Диференціювання функцій, які задано неявним чином

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$3x + 2y - 5 = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(3x)' + (2y)' - (5)' = 0$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(3x)' + (2y)' - (5)' = 0 \Rightarrow 3 + 2y' = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(3x)' + (2y)' - (5)' = 0 \Rightarrow 3 + 2y' = 0.$$

Звідки

$$2y' = -3$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(3x)' + (2y)' - (5)' = 0 \Rightarrow 3 + 2y' = 0.$$

Звідки

$$2y' = -3 \Rightarrow y' = -\frac{3}{2}.$$

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^2)' + (y^2)' = (25)'$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^2)' + (y^2)' = (25)' \Rightarrow 2x + 2yy' = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^2)' + (y^2)' = (25)' \Rightarrow 2x + 2yy' = 0.$$

Звідки

$$yy' = -x$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^2)' + (y^2)' = (25)' \Rightarrow 2x + 2yy' = 0.$$

Звідки

$$yy' = -x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$\cos y - 3y^2 x + 4e^{3x} = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$-\sin y \cdot y' - 3 \cdot 2y \cdot y' \cdot x - 3y^2 \cdot 1 + 4e^{3x} \cdot 3 = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$-\sin y \cdot y' - 3 \cdot 2y \cdot y' \cdot x - 3y^2 \cdot 1 + 4e^{3x} \cdot 3 = 0.$$

Звідки

$$-3y^2 + 12e^{3x} = y'(\sin y - 6yx).$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$-\sin y \cdot y' - 3 \cdot 2y \cdot y' \cdot x - 3y^2 \cdot 1 + 4e^{3x} \cdot 3 = 0.$$

Звідки

$$-3y^2 + 12e^{3x} = y'(\sin y - 6yx).$$

Тому

$$y' = \frac{12e^{3x} - 3y^2}{\sin y - 6yx}.$$

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3a(xy)' = 0$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3a(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3a(1 \cdot y + x \cdot y') = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3a(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3a(1 \cdot y + x \cdot y') = 0.$$

Звідки

$$(3y^2 - 3ax)y' = 3ay - 3x^2$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^3)' + (y^3)' - 3a(xy)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3a(1 \cdot y + x \cdot y') = 0.$$

Звідки

$$(3y^2 - 3ax)y' = 3ay - 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(b^2x^2)' + (a^2y^2)' - (a^2b^2)' = 0$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(b^2x^2)' + (a^2y^2)' - (a^2b^2)' = 0 \Rightarrow b^2 \cdot 2x + a^2 \cdot 2y \cdot y' = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(b^2x^2)' + (a^2y^2)' - (a^2b^2)' = 0 \Rightarrow b^2 \cdot 2x + a^2 \cdot 2y \cdot y' = 0.$$

Звідки

$$2a^2yy' = -2b^2x$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(b^2x^2)' + (a^2y^2)' - (a^2b^2)' = 0 \Rightarrow b^2 \cdot 2x + a^2 \cdot 2y \cdot y' = 0.$$

Звідки

$$2a^2yy' = -2b^2x \Rightarrow y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$x^3 + y^3 - a = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^3)' + (y^3)' - (a)' = 0$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^3)' + (y^3)' - (a)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^3)' + (y^3)' - (a)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 0.$$

Звідки

$$3y^2 y' = -3x^2$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(x^3)' + (y^3)' - (a)' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 0.$$

Звідки

$$3y^2y' = -3x^2 \Rightarrow y' = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$y^n - \frac{x+y}{x-y} = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^n)' - \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = 0$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^n)' - \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow ny^{n-1}y' - \frac{(x+y)'(x-y) - (x+y)(x-y)'}{(x-y)^2} = 0$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^n)' - \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow ny^{n-1}y' - \frac{(x+y)'(x-y) - (x+y)(x-y)'}{(x-y)^2} = 0$$

Звідки

$$ny^{n-1}y' - \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = 0$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^n)' - \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow ny^{n-1}y' - \frac{(x+y)'(x-y)-(x+y)(x-y)'}{(x-y)^2} = 0$$

Звідки

$$ny^{n-1}y' - \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$ny^{n-1}y'(x-y)^2 - x + y - xy' + yy' + x - xy' + y - yy' = 0$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^n)' - \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow ny^{n-1}y' - \frac{(x+y)'(x-y) - (x+y)(x-y)'}{(x-y)^2} = 0$$

Звідки

$$ny^{n-1}y' - \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$ny^{n-1}y'(x-y)^2 - x + y - xy' + yy' + x - xy' + y - yy' = 0 \Rightarrow$$

$$y'\left[ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x\right] = -2y$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^n)' - \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow ny^{n-1}y' - \frac{(x+y)'(x-y) - (x+y)(x-y)'}{(x-y)^2} = 0$$

Звідки

$$ny^{n-1}y' - \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$ny^{n-1}y'(x-y)^2 - x + y - xy' + yy' + x - xy' + y - yy' = 0 \Rightarrow$$

$$y'\left[ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x\right] = -2y \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{2y}{ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x}$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^n)' - \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow ny^{n-1}y' - \frac{(x+y)'(x-y)-(x+y)(x-y)'}{(x-y)^2} = 0$$

Звідки

$$ny^{n-1}y' - \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$ny^{n-1}y'(x-y)^2 - x + y - xy' + yy' + x - xy' + y - yy' = 0 \Rightarrow$$

$$y'\left[ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x\right] = -2y \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{2y}{ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x} = -\frac{2y^2}{ny^n(x-y)^2 - 2xy}$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^n)' - \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = 0 \Rightarrow ny^{n-1}y' - \frac{(x+y)'(x-y)-(x+y)(x-y)'}{(x-y)^2} = 0$$

Звідки

$$ny^{n-1}y' - \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$ny^{n-1}y'(x-y)^2 - x + y - xy' + yy' + x - xy' + y - yy' = 0 \Rightarrow$$

$$y'\left[ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x\right] = -2y \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{2y}{ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x} = -\frac{2y^2}{ny^n(x-y)^2 - 2xy} = -\frac{2y^2}{n\frac{x+y}{x-y}(x-y)^2 - 2xy}$$

Розв'язання

$$y' = -\frac{2y^2}{n(x^2 - y^2) - 2xy}$$

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$y^5 - 5axy + x^5 = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^5)' - 5a(xy)' + (x^5)' = 0$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^5)' - 5a(xy)' + (x^5)' = 0 \Rightarrow 5y^4 \cdot y' - 5ay - 5axy' + 5x^4 = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^5)' - 5a(xy)' + (x^5)' = 0 \Rightarrow 5y^4 \cdot y' - 5ay - 5axy' + 5x^4 = 0.$$

Звідки

$$(5y^4 - 5ax)y' = 5ay - 5x^4$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(y^5)' - 5a(xy)' + (x^5)' = 0 \Rightarrow 5y^4 \cdot y' - 5ay - 5axy' + 5x^4 = 0.$$

Звідки

$$(5y^4 - 5ax)y' = 5ay - 5x^4 \Rightarrow y' = \frac{ay - x^4}{y^4 - ax}.$$

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$a^x - e^{x-y} = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(a^x)' - (e^{x-y})' = 0$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(a^x)' - (e^{x-y})' = 0 \Rightarrow a^x \cdot \ln a - e^{x-y}(1 - y') = 0.$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(a^x)' - (e^{x-y})' = 0 \Rightarrow a^x \cdot \ln a - e^{x-y}(1 - y') = 0.$$

Звідки

$$y' e^{x-y} = e^{x-y} - a^x \cdot \ln a$$

Розв'язання

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$(a^x)' - (e^{x-y})' = 0 \Rightarrow a^x \cdot \ln a - e^{x-y}(1 - y') = 0.$$

Звідки

$$y' e^{x-y} = e^{x-y} - a^x \cdot \ln a \Rightarrow y' = 1 - a^x \cdot \ln a \cdot e^{y-x}.$$

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$e^y = x^{x+y}.$$

Розв'язання

Спочатку логарифмуємо:

$$y = (x + y) \ln x.$$

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$y' = ((x + y) \ln x)'$$

Розв'язання

Спочатку логарифмуємо:

$$y = (x + y)\ln x.$$

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$y' = ((x + y)\ln x)' \Rightarrow y' = (1 + y')\ln x + (x + y) \cdot \frac{1}{x}$$

Розв'язання

Спочатку логарифмуємо:

$$y = (x + y)\ln x.$$

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$y' = ((x + y)\ln x)' \Rightarrow y' = (1 + y')\ln x + (x + y) \cdot \frac{1}{x}$$

Звідки

$$y'(1 - \ln x) = \ln x + (x + y) \cdot \frac{1}{x}$$

Розв'язання

Спочатку логарифмуємо:

$$y = (x + y)\ln x.$$

Беручи похідну від обох частин рівності, яка визначає функцію, за правилами диференціювання складених функцій маємо:

$$y' = ((x + y)\ln x)' \Rightarrow y' = (1 + y')\ln x + (x + y) \cdot \frac{1}{x}$$

Звідки

$$y'(1 - \ln x) = \ln x + (x + y) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{x\ln x + x + y}{x(1 - \ln x)}.$$

Задача

Знайти похідну функції, заданої неявним чином:

$$\arcsin x - \arcsin y + x^2 y = 0.$$

Розв'язання

Розв'язати самостійно.