Розв’язання задач на диференціал функції однієї змінної

Задача

Визначити приріст і диференціал функції $y = x^3$ при переході від значення $x = 2$ до значення $x_1 = 2,01$.

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3$$

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3$$

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = (x^3)'\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = (x^3)'\mathrm{d}x = 3x^2\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = (x^3)'\mathrm{d}x = 3x^2\mathrm{d}x$$

$$\Delta y = \underbrace{3x^2\Delta x}_{L\Delta x = \mathrm{d}y} + \underbrace{3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}_{o(\Delta x)}$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2$$

Розв’язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2 = 0,01$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2 = 0,01$$

Приріст функції:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot (0,01)^2 + (0,01)^3$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2 = 0,01$$

Приріст функції:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot (0,01)^2 + (0,01)^3 = 0,12 + 0,0006 + 0,000001$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2 = 0,01$$

Приріст функції:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot (0,01)^2 + (0,01)^3 = 0,12 + 0,0006 + 0,000001 = 0,120601$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2 = 0,01$$

Приріст функції:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot (0,01)^2 + (0,01)^3 = 0,12 + 0,0006 + 0,000001 = 0,120601$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2 = 0,01$$

Приріст функції:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot (0,01)^2 + (0,01)^3 = 0,12 + 0,0006 + 0,000001 = 0,120601$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 = 0,12$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2 = 0,01$$

Приріст функції:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot (0,01)^2 + (0,01)^3 = 0,12 + 0,0006 + 0,000001 = 0,120601$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 = 0,12$$

Абсолютна похибка:

$$|\Delta y - \mathrm{d}y| = |0,120601 - 0,12|$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2 = 0,01$$

Приріст функції:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot (0,01)^2 + (0,01)^3 = 0,12 + 0,0006 + 0,000001 = 0,120601$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 = 0,12$$

Абсолютна похибка:

$$|\Delta y - \mathrm{d}y| = |0,120601 - 0,12| = 0,000601$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2 = 0,01$$

Приріст функції:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot (0,01)^2 + (0,01)^3 = 0,12 + 0,0006 + 0,000001 = 0,120601$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 = 0,12$$

Абсолютна похибка:

$$|\Delta y - \mathrm{d}y| = |0,120601 - 0,12| = 0,000601$$

Відносна похибка:

$$\left|\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta y}\right| = \frac{0,000601}{0,120601}$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 2,01 - 2 = 0,01$$

Приріст функції:

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot (0,01)^2 + (0,01)^3 = 0,12 + 0,0006 + 0,000001 = 0,120601$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 = 0,12$$

Абсолютна похибка:

$$|\Delta y - \mathrm{d}y| = |0,120601 - 0,12| = 0,000601$$

Відносна похибка:

$$\left| \frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta y} \right| = \frac{0,000601}{0,120601} \approx 0,005$$

Задача

Визначити приріст і диференціал функції $y = x^2 + 5x - 4$ при переході від значення $x = 2$ до значення $x_1 = 1,98$.

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2+5\cdot(x+\Delta x)-4-x^2-5x+4$$

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2+5\cdot(x+\Delta x)-4-x^2-5x+4 = x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+5x+5\Delta x-x^2-5x$$

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2+5\cdot(x+\Delta x)-4-x^2-5x+4 = x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+5x+5\Delta x-x^2-5x =$$

$$= (2x+5)\Delta x + (\Delta x)^2$$

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2+5\cdot(x+\Delta x)-4-x^2-5x+4 = x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+5x+5\Delta x-x^2-5x =$$

$$= (2x+5)\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2+5\cdot(x+\Delta x)-4-x^2-5x+4 = x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+5x+5\Delta x-x^2-5x =$$

$$= (2x+5)\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = (x^2+5x-4)'\mathrm{d}x$$

Розв’язання

Довільний приріст:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2+5\cdot(x+\Delta x)-4-x^2-5x+4 = x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+5x+5\Delta x-x^2-5x =$$

$$= (2x+5)\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = (x^2+5x-4)'\mathrm{d}x = (2x+5)\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.

Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2 = -0,02$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2 = -0,02$$

Приріст функції:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) + (-0,02)^2$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2 = -0,02$$

Приріст функції:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) + (-0,02)^2 = -0,18 + 0,0004$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2 = -0,02$$

Приріст функції:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) + (-0,02)^2 = -0,18 + 0,0004 = -0,1796$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2 = -0,02$$

Приріст функції:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) + (-0,02)^2 = -0,18 + 0,0004 = -0,1796$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02)$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2 = -0,02$$

Приріст функції:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) + (-0,02)^2 = -0,18 + 0,0004 = -0,1796$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) = -0,18$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2 = -0,02$$

Приріст функції:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) + (-0,02)^2 = -0,18 + 0,0004 = -0,1796$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) = -0,18$$

Абсолютна похибка:

$$|\Delta y - \mathrm{d}y| = |-0,1796 + 0,18|$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2 = -0,02$$

Приріст функції:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) + (-0,02)^2 = -0,18 + 0,0004 = -0,1796$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) = -0,18$$

Абсолютна похибка:

$$|\Delta y - \mathrm{d}y| = |-0,1796 + 0,18| = 0,0004$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2 = -0,02$$

Приріст функції:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) + (-0,02)^2 = -0,18 + 0,0004 = -0,1796$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) = -0,18$$

Абсолютна похибка:

$$|\Delta y - \mathrm{d}y| = |-0,1796 + 0,18| = 0,0004$$

Відносна похибка:

$$\left|\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta y}\right| = \frac{0,0004}{0,1796}$$

Розв'язання

Визначимо Δy і $\mathrm{d}y$ за заданих числових значень.
Приріст аргументу:

$$\Delta x = x_1 - x = 1,98 - 2 = -0,02$$

Приріст функції:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) + (-0,02)^2 = -0,18 + 0,0004 = -0,1796$$

Диференціал функції:

$$\mathrm{d}y = (2 \cdot 2 + 5) \cdot (-0,02) = -0,18$$

Абсолютна похибка:

$$|\Delta y - \mathrm{d}y| = |-0,1796 + 0,18| = 0,0004$$

Відносна похибка:

$$\left|\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta y}\right| = \frac{0,0004}{0,1796} \approx 0,0022$$

Задача

Знайти наближене значення функції $y = \sqrt{1+x}$ при $x = 0,02$.

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = 0,02$.

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = 0,02$.

$$\sqrt{1+x}\Big|_{x_0=0} = \sqrt{1} = 1$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = 0,02$.

$$\left.\sqrt{1+x}\right|_{x_0=0} = \sqrt{1} = 1$$

$$y' = \left(\sqrt{1+x}\right)'$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = 0,02$.

$$\sqrt{1+x}\Big|_{x_0=0} = \sqrt{1} = 1$$

$$y' = \left(\sqrt{1+x}\right)' = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = 0,02$.

$$\left.\sqrt{1+x}\right|_{x_0=0} = \sqrt{1} = 1$$

$$y' = \left(\sqrt{1+x}\right)' = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \Rightarrow y'(x_0 = 0) = \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}}$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = 0,02$.

$$\sqrt{1+x}\Big|_{x_0=0} = \sqrt{1} = 1$$

$$y' = \left(\sqrt{1+x}\right)' = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \Rightarrow y'(x_0 = 0) = \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Застосовуємо формулу Лагранжа:

$$\sqrt{1+0,02} = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = 0,02$.

$$\sqrt{1+x}\Big|_{x_0=0} = \sqrt{1} = 1$$

$$y' = \left(\sqrt{1+x}\right)' = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \Rightarrow y'(x_0 = 0) = \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Застосовуємо формулу Лагранжа:

$$\sqrt{1+0,02} = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,02$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = 0,02$.

$$\sqrt{1+x}\Big|_{x_0=0} = \sqrt{1} = 1$$

$$y' = \left(\sqrt{1+x}\right)' = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \Rightarrow y'(x_0 = 0) = \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Застосовуємо формулу Лагранжа:

$$\sqrt{1+0,02} = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 1,01$$

Задача

Знайти наближено значення $\sin 31^\circ$.

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sin x$ опорною точкою $x_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$ і приростом $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533$.

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sin x$ опорною точкою $x_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$ і приростом $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533$.

$$\sin x|_{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6}$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sin x$ опорною точкою $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ і приростом $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533$.

$$\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sin x$ опорною точкою $x_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$ і приростом $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533$.

$$\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y' = (\sin x)'$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sin x$ опорною точкою $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ і приростом $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533$.

$$\sin x|_{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y' = (\sin x)' = \cos x$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sin x$ опорною точкою $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ і приростом $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533$.

$$\sin x|_{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y' = (\sin x)' = \cos x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sin x$ опорною точкою $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ і приростом $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533.$

$$\sin x|_{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y' = (\sin x)' = \cos x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86603$$

Застосовуємо формулу Лагранжа:

$$\sin 31^\circ = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sin x$ опорною точкою $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ і приростом $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533$.

$$\sin x|_{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y' = (\sin x)' = \cos x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86603$$

Застосовуємо формулу Лагранжа:

$$\sin 31^\circ = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x = 0,5 + 0,86603 \cdot 0,0174533$$

Розв'язання

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sin x$ опорною точкою $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ і приростом $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533$.

$$\sin x\big|_{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y' = (\sin x)' = \cos x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86603$$

Застосовуємо формулу Лагранжа:

$$\sin 31^\circ = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x = 0,5 + 0,86603 \cdot 0,0174533 \approx 0,5150$$

Задача

Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення $\sqrt[4]{267}$.

Розв'язання

Розкладемо 267 так:

$$267 = 256 + 11$$

Розв'язання

Розкладемо 267 так:

$$267 = 256 + 11$$

Тоді

$$\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11}$$

Розв'язання

Розкладемо 267 так:

$$267 = 256 + 11$$

Тоді

$$\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11} = \sqrt[4]{256\left(1 + \frac{11}{256}\right)}$$

Розв'язання

Розкладемо 267 так:

$$267 = 256 + 11$$

Тоді

$$\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11} = \sqrt[4]{256\left(1 + \frac{11}{256}\right)} = 4\sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}}$$

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt[4]{1 + x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = \frac{11}{256}$.

Розв'язання

Розкладемо 267 так:

$$267 = 256 + 11$$

Тоді

$$\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11} = \sqrt[4]{256\left(1 + \frac{11}{256}\right)} = 4\sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}}$$

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt[4]{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = \frac{11}{256}$.

$$\sqrt[4]{1+x}\Big|_{x_0=0} = \sqrt[4]{1} = 1$$

Розв'язання

Розкладемо 267 так:

$$267 = 256 + 11$$

Тоді

$$\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11} = \sqrt[4]{256\left(1 + \frac{11}{256}\right)} = 4\sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}}$$

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt[4]{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = \frac{11}{256}$.

$$\sqrt[4]{1+x}\Big|_{x_0=0} = \sqrt[4]{1} = 1$$

$$y' = \left(\sqrt[4]{1+x}\right)'$$

Розв'язання

Розкладемо 267 так:

$$267 = 256 + 11$$

Тоді

$$\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11} = \sqrt[4]{256\left(1 + \frac{11}{256}\right)} = 4\sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}}$$

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt[4]{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = \frac{11}{256}$.

$$\sqrt[4]{1+x}\Big|_{x_0=0} = \sqrt[4]{1} = 1$$

$$y' = \left(\sqrt[4]{1+x}\right)' = \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}} \cdot 1$$

Розв'язання

Розкладемо 267 так:

$$267 = 256 + 11$$

Тоді

$$\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256+11} = \sqrt[4]{256\left(1+\frac{11}{256}\right)} = 4\sqrt[4]{1+\frac{11}{256}}$$

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt[4]{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = \frac{11}{256}$.

$$\sqrt[4]{1+x}\Big|_{x_0=0} = \sqrt[4]{1} = 1$$

$$y' = \left(\sqrt[4]{1+x}\right)' = \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}} \cdot 1 \Rightarrow y'(x_0=0) = \frac{1}{4}(1)^{-\frac{3}{4}}$$

Розв'язання

Розкладемо 267 так:

$$267 = 256 + 11$$

Тоді

$$\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11} = \sqrt[4]{256\left(1 + \frac{11}{256}\right)} = 4\sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}}$$

Для знаходження наближеного значення скористаймося $y(x) = \sqrt[4]{1+x}$ опорною точкою $x_0 = 0$ і приростом $\Delta x = \frac{11}{256}$.

$$\sqrt[4]{1+x}\Big|_{x_0=0} = \sqrt[4]{1} = 1$$

$$y' = \left(\sqrt[4]{1+x}\right)' = \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}} \cdot 1 \Rightarrow y'(x_0 = 0) = \frac{1}{4}(1)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}$$

Розв'язання

Застосовуємо формулу Лагранжа:

$$4\sqrt[4]{1+\frac{11}{256}} = 4y(x_0+\Delta x) \approx 4(y(x_0)+y'(x_0)\Delta x)$$

Розв'язання

Застосовуємо формулу Лагранжа:

$$4\sqrt[4]{1+\frac{11}{256}} = 4y(x_0+\Delta x) \approx 4(y(x_0)+y'(x_0)\Delta x) = 4+\frac{11}{256}$$

Розв'язання

Застосовуємо формулу Лагранжа:

$$4\sqrt[4]{1+\frac{11}{256}} = 4y(x_0+\Delta x) \approx 4(y(x_0)+y'(x_0)\Delta x) = 4+\frac{11}{256} \approx 4,043$$

Задача

Користуючись правилами наближеного обчислення знайти числове значення виразу $\sqrt[5]{36}$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

При нагріванні об'єм твердого тіла росте пропорційно до кубу його лінійного розширення. Якщо α – коефіцієнт лінійного розширення, β – коефіцієнт об'ємного розширення, а t – температура, має місце загальна формула $1 + \beta t = (1 + \alpha t)^3$. Довести, що має місце приблизна рівність $\beta \approx 3\alpha$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно, скориставшись тим, що $\alpha t \ll 1$.

Задача

Висоту ртутного стовпчика у барометрі при температурі t можна привести до $0°$ за формулою $h_0 = h\frac{1+\alpha' t}{1+\alpha t}$, де α – коефіцієнт розширення ртуті, а α' – коефіцієнт розширення латунної шкали. Спростити формулу так, щоб вона не містила дробів.

Розв'язання

Температурне розширення є малою величиною $\alpha t \ll 1$, тому можна скористатися наближенням за формулою Лагранжа.

Розв'язання

Температурне розширення є малою величиною $\alpha t \ll 1$, тому можна скористатися наближенням за формулою Лагранжа.
Виберемо для функції $y(x) = \frac{1}{1+x}$ опорну точку $x_0 = 0$ і приріст $\Delta x = \alpha t$.

Розв'язання

Температурне розширення є малою величиною $\alpha t \ll 1$, тому можна скористатися наближенням за формулою Лагранжа.
Виберемо для функції $y(x) = \frac{1}{1+x}$ опорну точку $x_0 = 0$ і приріст $\Delta x = \alpha t$.
Тоді

$$\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x_0=0} = \frac{1}{1} = 1$$

Розв'язання

Температурне розширення є малою величиною $\alpha t \ll 1$, тому можна скористатися наближенням за формулою Лагранжа.
Виберемо для функції $y(x) = \frac{1}{1+x}$ опорну точку $x_0 = 0$ і приріст $\Delta x = \alpha t$.
Тоді

$$\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x_0=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+x}\right)'$$

Розв'язання

Температурне розширення є малою величиною $\alpha t \ll 1$, тому можна скористатися наближенням за формулою Лагранжа.
Виберемо для функції $y(x) = \frac{1}{1+x}$ опорну точку $x_0 = 0$ і приріст $\Delta x = \alpha t$.
Тоді

$$\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x_0=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \cdot 1$$

Розв'язання

Температурне розширення є малою величиною $\alpha t \ll 1$, тому можна скористатися наближенням за формулою Лагранжа.
Виберемо для функції $y(x) = \frac{1}{1+x}$ опорну точку $x_0 = 0$ і приріст $\Delta x = \alpha t$.
Тоді

$$\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x_0=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

Розв'язання

Температурне розширення є малою величиною $\alpha t \ll 1$, тому можна скористатися наближенням за формулою Лагранжа.
Виберемо для функції $y(x) = \frac{1}{1+x}$ опорну точку $x_0 = 0$ і приріст $\Delta x = \alpha t$.
Тоді

$$\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x_0=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow y'(x_0 = 0) = -\frac{1}{1^2}$$

Розв'язання

Температурне розширення є малою величиною $\alpha t \ll 1$, тому можна скористатися наближенням за формулою Лагранжа.
Виберемо для функції $y(x) = \frac{1}{1+x}$ опорну точку $x_0 = 0$ і приріст $\Delta x = \alpha t$.
Тоді

$$\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x_0=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow y'(x_0 = 0) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

Застосовуємо формулу:

$$\frac{1}{1+\alpha t} = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$$

Розв'язання

Температурне розширення є малою величиною $\alpha t \ll 1$, тому можна скористатися наближенням за формулою Лагранжа.
Виберемо для функції $y(x) = \frac{1}{1+x}$ опорну точку $x_0 = 0$ і приріст $\Delta x = \alpha t$.
Тоді

$$\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x_0=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow y'(x_0 = 0) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

Застосовуємо формулу:

$$\frac{1}{1+\alpha t} = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x = 1 - \Delta x$$

Розв'язання

Температурне розширення є малою величиною $\alpha t \ll 1$, тому можна скористатися наближенням за формулою Лагранжа.
Виберемо для функції $y(x) = \frac{1}{1+x}$ опорну точку $x_0 = 0$ і приріст $\Delta x = \alpha t$.
Тоді

$$\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x_0=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow y'(x_0 = 0) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

Застосовуємо формулу:

$$\frac{1}{1+\alpha t} = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x = 1 - \Delta x = 1 - \alpha t$$

Розв'язання

Маємо

$$h_0 = h\frac{1+\alpha' t}{1+\alpha t} \approx h(1+\alpha' t)(1-\alpha t)$$

Розв'язання

Маємо

$$h_0 = h\frac{1+\alpha' t}{1+\alpha t} \approx h(1+\alpha' t)(1-\alpha t) = h(1+\alpha' t - \alpha t - \alpha\alpha' t^2)$$

Розв'язання

Маємо

$$h_0 = h\frac{1+\alpha' t}{1+\alpha t} \approx h(1+\alpha' t)(1-\alpha t) = h(1+\alpha' t - \alpha t - \alpha\alpha' t^2)$$

$\alpha\alpha' t^2$ – добуток двох малих величин (мала другого порядку). Тому $\alpha\alpha' t^2 \approx 0$.

Розв'язання

Маємо

$$h_0 = h\frac{1+\alpha' t}{1+\alpha t} \approx h(1+\alpha' t)(1-\alpha t) = h(1+\alpha' t - \alpha t - \alpha\alpha' t^2)$$

$\alpha\alpha' t^2$ – добуток двох малих величин (мала другого порядку). Тому $\alpha\alpha' t^2 \approx 0$.

$$h_0 = h\left(1 - (\alpha - \alpha')t\right)$$

Задача

Прискорення сили тяжіння g_h на висоті h над рівнем моря визначають за формулою

$$g_h = g\frac{R^2}{(R+h)^2},$$

де g – прискорення сили тяжіння на рівні моря, а R – радіус Землі. Вважаючи, що h є малим порівняно з R, довести, що має місце наближена формула

$$g_h \approx g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

Розв'язання

Розв'язати самостійно.