Розв'язання задач на границі функцій. Складніші випадки

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right)$$

Розв'язання

Зведемо дроби до спільного знаменника.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right)$$

Розв'язання

Зведемо дроби до спільного знаменника.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(15x+1)-3x^2(5x^2+1)}{(5x^2+1)(15x+1)}$$

Розв'язання

Зведемо дроби до спільного знаменника.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(15x+1)-3x^2(5x^2+1)}{(5x^2+1)(15x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{15x^4+x^3-15x^4-3x^2}{(5x^2+1)(15x+1)}$$

Розв'язання

Зведемо дроби до спільного знаменника.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(15x+1)-3x^2(5x^2+1)}{(5x^2+1)(15x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{15x^4+x^3-15x^4-3x^2}{(5x^2+1)(15x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2}{(5x^2+1)(15x+1)}$$

Розв'язання

Зведемо дроби до спільного знаменника.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(15x+1)-3x^2(5x^2+1)}{(5x^2+1)(15x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{15x^4+x^3-15x^4-3x^2}{(5x^2+1)(15x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2}{(5x^2+1)(15x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{\left(5+\frac{1}{x^2}\right)\left(15+\frac{1}{x}\right)}$$

Розв'язання

Зведемо дроби до спільного знаменника.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(15x+1)-3x^2(5x^2+1)}{(5x^2+1)(15x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{15x^4+x^3-15x^4-3x^2}{(5x^2+1)(15x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2}{(5x^2+1)(15x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{\left(5+\frac{1}{x^2}\right)\left(15+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{75}$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}$$

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

Розв’язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8-8x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{(5-x-7x+3)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+8-8x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{(5-x-7x+3)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})} = \lim_{x\to 1} \frac{-7(x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{-8(x-1)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8-8x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{(5-x-7x+3)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=\lim_{x\to 1}\frac{-7(x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{-8(x-1)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=$$

$$=\frac{7\cdot(2+2)}{8\cdot(3+3)}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3})(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8-8x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{(5-x-7x+3)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=\lim_{x\to 1}\frac{-7(x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3})}{-8(x-1)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=$$

$$=\frac{7\cdot(2+2)}{8\cdot(3+3)}=\frac{7}{12}$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до знаменника значення.

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до знаменника значення.

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{7x\left((\sqrt[3]{6x-1})^2-\sqrt[3]{6x-1}\cdot\sqrt[3]{2x+1}+(\sqrt[3]{2x+1})^2\right)}{(\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1})\left((\sqrt[3]{6x-1})^2-\sqrt[3]{6x-1}\cdot\sqrt[3]{2x+1}+(\sqrt[3]{2x+1})^2\right)}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до знаменника значення.

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{7x\left((\sqrt[3]{6x-1})^2 - \sqrt[3]{6x-1}\cdot\sqrt[3]{2x+1} + (\sqrt[3]{2x+1})^2\right)}{(\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1})\left((\sqrt[3]{6x-1})^2 - \sqrt[3]{6x-1}\cdot\sqrt[3]{2x+1} + (\sqrt[3]{2x+1})^2\right)} =$$

$$= \frac{7\cdot 3}{8}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до знаменника значення.

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{7x\left((\sqrt[3]{6x-1})^2 - \sqrt[3]{6x-1}\cdot\sqrt[3]{2x+1} + (\sqrt[3]{2x+1})^2\right)}{(\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1})\left((\sqrt[3]{6x-1})^2 - \sqrt[3]{6x-1}\cdot\sqrt[3]{2x+1} + (\sqrt[3]{2x+1})^2\right)} =$$

$$= \frac{7\cdot 3}{8} = \frac{21}{8}$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3} - 1}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(2x-1-3x+2)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{(4x-3-1)\left((\sqrt[3]{2x-1})^2 + \sqrt[3]{3x-2}\sqrt[3]{2x-1} + (\sqrt[3]{3x-2})^2\right)}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1-3x+2)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{(4x-3-1)\left((\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{3x-2}\sqrt[3]{2x-1}+(\sqrt[3]{3x-2})^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}-\frac{(x-1)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{4\,(x-1)\left((\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{3x-2}\sqrt[3]{2x-1}+(\sqrt[3]{3x-2})^2\right)}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(2x-1-3x+2)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{(4x-3-1)\left((\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{3x-2}\sqrt[3]{2x-1}+(\sqrt[3]{3x-2})^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} -\frac{(x-1)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{4\,(x-1)\left((\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{3x-2}\sqrt[3]{2x-1}+(\sqrt[3]{3x-2})^2\right)} = -\frac{2}{4\cdot 3}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника значення.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(2x-1-3x+2)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{(4x-3-1)\left((\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{3x-2}\,\sqrt[3]{2x-1}+(\sqrt[3]{3x-2})^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}-\frac{(x-1)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{4\,(x-1)\left((\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{3x-2}\,\sqrt[3]{2x-1}+(\sqrt[3]{3x-2})^2\right)}=-\frac{2}{4\cdot3}=-\frac{1}{6}$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{x} \right)$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$$

Розв’язання

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} = 0$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{\log_2 x^2}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{\log_2 x^2} = \left| \begin{array}{l} y = x-1 \Rightarrow x = y+1 \\ x \to 1 \Rightarrow y \to 0 \end{array} \right|$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{\log_2 x^2} = \left| \begin{array}{l} y = x-1 \Rightarrow x = y+1 \\ x \to 1 \Rightarrow y \to 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{(y+1)^2+y+1-2}{2\log_2(1+y)}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{\log_2 x^2} = \left| \begin{array}{l} y = x-1 \Rightarrow x = y+1 \\ x \to 1 \Rightarrow y \to 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{(y+1)^2+y+1-2}{2\log_2(1+y)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y^2+3y}{2y\log_2 e}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{\log_2 x^2} = \left| \begin{array}{l} y = x-1 \Rightarrow x = y+1 \\ x \to 1 \Rightarrow y \to 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{(y+1)^2+y+1-2}{2\log_2(1+y)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y^2+3y}{2y\log_2 e} = \frac{3}{2\log_2 e}$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2^x-2}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2^x-2}=\left|\begin{array}{l} y=x-1\Rightarrow x=y+1 \\ x\to 1\Rightarrow y\to 0 \end{array}\right|$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2^x-2} = \left| \begin{array}{l} y = x-1 \Rightarrow x = y+1 \\ x \to 1 \Rightarrow y \to 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0}\frac{(y+1)^2-1}{2^{y+1}-2}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2^x-2} = \left| \begin{array}{l} y = x-1 \Rightarrow x = y+1 \\ x \to 1 \Rightarrow y \to 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{(y+1)^2-1}{2^{y+1}-2} = \lim_{y\to 0} \frac{y(y+2)}{2\left(2^y-1\right)}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2^x-2}=\left|\begin{array}{l} y=x-1\Rightarrow x=y+1 \\ x\to 1\Rightarrow y\to 0 \end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{(y+1)^2-1}{2^{y+1}-2}=\lim_{y\to 0}\frac{y(y+2)}{2\left(2^y-1\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y(y+2)}{2y\ln 2}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2^x-2} = \left|\begin{array}{l} y = x-1 \Rightarrow x = y+1 \\ x\to 1 \Rightarrow y\to 0 \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{(y+1)^2-1}{2^{y+1}-2} = \lim_{y\to 0}\frac{y(y+2)}{2\left(2^y-1\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y(y+2)}{2y\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln x - \ln\left(x+2\right)\right]$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln x - \ln\left(x+2\right)\right]$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln x - \ln\left(x+2\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln x - \ln(x+2)\right] = \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^x == \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln x - \ln(x+2)\right] = \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x} == \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \ln\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln x - \ln(x+2)\right] = \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^x == \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \ln\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = -\ln e^2$$

Розв’язання

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln x - \ln(x+2)\right] = \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^x == \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \ln\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = -\ln e^2 = -2$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{5}{x}}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{5}{x}}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0}\,(1+\sin x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to 0}\,(1+x)^{\frac{5}{x}}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}} = e^5$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 1}(1+5\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Розв'язання

Розв'язати самостійно.