Розв'язання задач на границі функцій. Еквівалентність, границі на нескінченності, визначні границі

Задача

Знайти границю

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 5x}{2x + \sin 3x}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 5x}{2x + \sin 3x}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin 5x}{2x + \sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - 5x}{2x + 3x}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin 5x}{2x + \sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - 5x}{2x + 3x} = -\frac{4}{5}$$

Задача

Знайти границю

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2}$$

Розв'язання

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\dfrac{2a+2h}{2}\cos\dfrac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h-1)}{h^2}=2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=$$

$$=2\sin a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sin a$$

Задача

Знайти границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot \operatorname{tg}^2 x}{1 - \cos x + \sin x}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \cdot \operatorname{tg}^2 x}{1 - \cos x + \sin x}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot \operatorname{tg}^2 x}{1 - \cos x + \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \cdot x^2}{1 - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + x}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot \operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\cdot x^2}{1-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\frac{x^2}{2}}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot \operatorname{tg}^2 x}{1 - \cos x + \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \cdot x^2}{1 - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x - \frac{x^2}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - \frac{x}{2}}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot \operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\cdot x^2}{1-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\frac{x^2}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\frac{x}{2}}=0$$

Задача

Знайти границю

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x - 1}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x - 1} = \left| \begin{array}{l} y = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \frac{\pi}{2} \\ x \to \pi/2 \Rightarrow y \to 0 \end{array} \right|$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x - 1} = \left|\begin{array}{l} y = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \frac{\pi}{2} \\ x \to \pi/2 \Rightarrow y \to 0 \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 y}{\cos y - 1}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x-1}=\left|\begin{array}{l} y=x-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=y+\frac{\pi}{2} \\ x\to\pi/2\Rightarrow y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 y}{\cos y-1}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1-\frac{y^2}{2}-1}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x - 1} = \left|\begin{array}{l} y = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \frac{\pi}{2} \\ x \to \pi/2 \Rightarrow y \to 0 \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 y}{\cos y - 1} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1 - \frac{y^2}{2} - 1} = -2$$

Задача

Вважаючи, що x — нескінченно мала першого порядку, визначити порядок малості функції $\sin x - \operatorname{tg} x$.

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k \cos x}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^k \cos x}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^k \cos x} = -2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^k}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x - \sin x}{x^k\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x - \sin x}{x^k} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^k\cos x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^k}$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{4}}{x^k}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x - \sin x}{x^k\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x - \sin x}{x^k} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^k\cos x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^k}$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{4}}{x^k} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^{3-k}.$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^k \cos x} = -2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^k}$$

$$= -2 \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{4}}{x^k} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} x^{3-k}.$$

Скінченне, відмінне від нуля значення маємо лише для $k = 3$.

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k} = 1 \cdot \lim_{x\to0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^k \cos x} = -2 \lim_{x\to0} \frac{\sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^k}$$

$$= -2 \lim_{x\to0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{4}}{x^k} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to0} x^{3-k}.$$

Скінченне, відмінне від нуля значення маємо лише для $k = 3$.
Отже, $\sin x - \operatorname{tg} x$ має третій порядок малості щодо x.

Задача

Вважаючи, що x — нескінченно мала першого порядку, визначити порядок малості функції $\ln(1 + x^2 + x^3)$.

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3}{x^k}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+x)}{x^k}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+x)}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^k}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+x)}{x^k} =$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^k} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} x^{2-k}$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+x)}{x^k} =$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^k} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} x^{2-k} = \lim_{x\to 0} x^{2-k}.$$

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+x)}{x^k} =$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^k} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} x^{2-k} = \lim_{x\to 0} x^{2-k}.$$

Скінченне, відмінне від нуля значення маємо лише для $k=2$.

Розв'язання

За означенням слід знайти таке k, щоб $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ мала скінченне значення, яке є відмінним від нуля.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+x)}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^k}=1\cdot\lim_{x\to 0}x^{2-k}=\lim_{x\to 0}x^{2-k}.$$

Скінченне, відмінне від нуля значення маємо лише для $k=2$.
Отже, $\ln(1+x^2+x^3)$ має другий порядок малості щодо x.

Задача

Вважаючи, що x — нескінченно мала першого порядку, визначити порядок малості функції $\cos 3x - \cos x$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-2)\,(1-x)\,(2+x)}{2x^3+x^2-1}$$

Розв'язання

Ділимо чисельник і знаменник на найбільший зі степенів x – x^3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-2)(1-x)(2+x)}{2x^3+x^2-1}$$

Розв'язання

Ділимо чисельник і знаменник на найбільший зі степенів x – x^3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-2)(1-x)(2+x)}{2x^3+x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(3-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{2}{x}+1\right)}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}$$

Розв'язання

Ділимо чисельник і знаменник на найбільший зі степенів x – x^3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-2)(1-x)(2+x)}{2x^3+x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(3-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{2}{x}+1\right)}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}} = \frac{3\cdot(-1)\cdot 1}{2}$$

Розв'язання

Ділимо чисельник і знаменник на найбільший зі степенів x – x^3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-2)\,(1-x)\,(2+x)}{2x^3+x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(3-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{2}{x}+1\right)}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}} = \frac{3\cdot(-1)\cdot 1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Задача

Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$$

Розв'язання

Ділимо чисельник і знаменник на найбільший зі степенів x – x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$$

Розв'язання

Ділимо чисельник і знаменник на найбільший зі степенів x – x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}$$

Розв'язання

Ділимо чисельник і знаменник на найбільший зі степенів x – x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{5}{3}$$

Задача

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \left\{\begin{array}{l} y = x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{array}\right\} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4} =$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \left\{\begin{array}{l} y = x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{array}\right\} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4} =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y} \cdot \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4} =$$

$$= \left\{z = \frac{y}{4}\right\} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z} = \left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4} = e^{4}$$

Задача

Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{3x-1}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{3x-1}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{3x-1} = \left| \begin{array}{c} \frac{x-3}{x} = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow y = -\frac{x}{3}; x = -3y \Rightarrow 3x - 1 = -9y - 1 \\ x \to \infty \Rightarrow y \to \infty \end{array} \right|$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{3x-1} = \left| \begin{array}{c} \frac{x-3}{x} = 1+\frac{1}{y} \Rightarrow y = -\frac{x}{3}; x = -3y \Rightarrow 3x-1 = -9y-1 \\ x\to\infty \Rightarrow y\to\infty \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-9y-1}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{3x-1} = \left| \begin{array}{c} \frac{x-3}{x} = 1+\frac{1}{y} \Rightarrow y = -\frac{x}{3}; x = -3y \Rightarrow 3x-1 = -9y-1 \\ x\to\infty \Rightarrow y\to\infty \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-9y-1} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-9} \cdot \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-1}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{3x-1} = \left|\begin{array}{c} \frac{x-3}{x} = 1+\frac{1}{y} \Rightarrow y = -\frac{x}{3}; x = -3y \Rightarrow 3x-1 = -9y-1 \\ x\to\infty \Rightarrow y\to\infty \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-9y-1} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-9} \cdot \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-1} = e^{-9}$$

Задача

Знайти границю

$$\lim_{x\to 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x \to 1} (7 - 6x)^{\frac{x}{3x-3}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}} = \left| \begin{array}{c} 7-6x=1+\frac{1}{y} \Rightarrow y=\frac{1}{6-6x}; x=1-\frac{1}{6y} \Rightarrow \\ \frac{x}{3x-3}=-2y+\frac{1}{3}; x\to 1 \Rightarrow y\to\infty \end{array} \right|$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}} = \left| \begin{array}{c} 7-6x = 1+\frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{6-6x}; x = 1-\frac{1}{6y} \Rightarrow \\ \frac{x}{3x-3} = -2y+\frac{1}{3}; x\to 1 \Rightarrow y\to\infty \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2y+\frac{1}{3}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}} = \left| \begin{array}{c} 7-6x = 1+\frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{6-6x}; x = 1-\frac{1}{6y} \Rightarrow \\ \frac{x}{3x-3} = -2y+\frac{1}{3}; x \to 1 \Rightarrow y \to \infty \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2y+\frac{1}{3}} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-2} \cdot \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}} = \left|\begin{array}{c} 7-6x=1+\frac{1}{y} \Rightarrow y=\frac{1}{6-6x}; x=1-\frac{1}{6y} \Rightarrow \\ \frac{x}{3x-3}=-2y+\frac{1}{3}; x\to1 \Rightarrow y\to\infty \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2y+\frac{1}{3}} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-2} \cdot \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{-2}$$