Розв'язання задач на границі послідовностей та функцій

Приклад

Представити послідовність $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{n^2}{2n^2 + 1} \right\}$ у вигляді сталого числа (її границі) та нескінченно малої послідовності.

Розв'язання

Знайдемо декілька перших елементів послідовності:

$$x_1 = \frac{1^2}{2 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{3}$$

Розв'язання

Знайдемо декілька перших елементів послідовності:

$$x_1 = \frac{1^2}{2 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{2^2}{2 \cdot 2^2 + 1} = \frac{4}{9}$$

Розв'язання

Знайдемо декілька перших елементів послідовності:

$$x_1 = \frac{1^2}{2 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{2^2}{2 \cdot 2^2 + 1} = \frac{4}{9}$$

$$x_3 = \frac{3^2}{2 \cdot 3^2 + 1} = \frac{9}{19}$$

Розв'язання

Знайдемо декілька перших елементів послідовності:

$$x_1 = \frac{1^2}{2 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{2^2}{2 \cdot 2^2 + 1} = \frac{4}{9}$$

$$x_3 = \frac{3^2}{2 \cdot 3^2 + 1} = \frac{9}{19}$$

$$x_4 = \frac{4^2}{2 \cdot 4^2 + 1} = \frac{16}{33}$$

Розв'язання

Значення наближаються до $\frac{1}{2}$.

Розв'язання

Значення наближаються до $\frac{1}{2}$.
Покажемо, що $\left\{x_n - \frac{1}{2}\right\}$ – нескінченно мала послідовність.

Розв'язання

Значення наближаються до $\frac{1}{2}$.
Покажемо, що $\left\{x_n - \frac{1}{2}\right\}$ – нескінченно мала послідовність.

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right|$$

Розв'язання

Значення наближаються до $\frac{1}{2}$.
Покажемо, що $\left\{x_n - \frac{1}{2}\right\}$ – нескінченно мала послідовність.

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right|$$

Розв'язання

Значення наближаються до $\frac{1}{2}$.
Покажемо, що $\left\{x_n - \frac{1}{2}\right\}$ – нескінченно мала послідовність.

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)}\right|$$

Розв'язання

Значення наближаються до $\frac{1}{2}$.
Покажемо, що $\left\{x_n - \frac{1}{2}\right\}$ – нескінченно мала послідовність.

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)}\right| = \frac{1}{2(2n^2+1)}$$

Розв'язання

Значення наближаються до $\frac{1}{2}$.
Покажемо, що $\left\{x_n - \frac{1}{2}\right\}$ – нескінченно мала послідовність.

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)}\right| = \frac{1}{2(2n^2+1)} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2(2n^2+1)} < \varepsilon$$

Розв'язання

Значення наближаються до $\frac{1}{2}$.
Покажемо, що $\left\{x_n - \frac{1}{2}\right\}$ – нескінченно мала послідовність.

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)}\right| = \frac{1}{2(2n^2+1)} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2(2n^2+1)} < \varepsilon \Rightarrow 2n^2 + 1 > \frac{1}{2\varepsilon}$$

Розв'язання

Значення наближаються до $\frac{1}{2}$.
Покажемо, що $\left\{x_n - \frac{1}{2}\right\}$ – нескінченно мала послідовність.

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)}\right| = \frac{1}{2(2n^2+1)} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2(2n^2+1)} < \varepsilon \Rightarrow 2n^2 + 1 > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow n^2 > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)$$

Розв'язання

Значення наближаються до $\frac{1}{2}$.
Покажемо, що $\left\{x_n - \frac{1}{2}\right\}$ – нескінченно мала послідовність.

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)}\right| = \frac{1}{2(2n^2+1)} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2(2n^2+1)} < \varepsilon \Rightarrow 2n^2 + 1 > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow n^2 > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right) \Rightarrow n > \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)}\right] + 1$$

Приклад

Чи буде нескінченно великою необмежена послідовність $\{x_n\} = \left\{\left(2 + \sin\frac{n\pi}{2}\right)\lg n\right\}$?

Розв'язання

Нескінченно великою послідовність буде, якщо

$$\forall M > 0 \, \exists N > 0 : \forall n > N : |x_n| > M.$$

Розв'язання

Нескінченно великою послідовність буде, якщо

$$\forall M > 0\, \exists N > 0 : \forall n > N : |x_n| > M.$$

Маємо:

$$2 + \sin \frac{n\pi}{2} \geqslant 1$$

Розв'язання

Нескінченно великою послідовність буде, якщо

$$\forall M > 0\, \exists N > 0 : \forall n > N : |x_n| > M.$$

Маємо:

$$2 + \sin \frac{n\pi}{2} \geqslant 1$$

Отже, можна вибрати N так, щоб

$$\Rightarrow |x_n| \geqslant \lg N > M \Rightarrow N = \left[10^M\right] + 1.$$

Розв'язання

Нескінченно великою послідовність буде, якщо

$$\forall M > 0\ \exists N > 0 : \forall n > N : |x_n| > M.$$

Маємо:

$$2 + \sin\frac{n\pi}{2} \geqslant 1$$

Отже, можна вибрати N так, щоб

$$\Rightarrow |x_n| \geqslant \lg N > M \Rightarrow N = \left[10^M\right] + 1.$$

Це і означає, що $\{x_n\}$ – нескінченно велика.

Приклад

Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{\dfrac{3^n}{n!}\right\}$ – монотонно спадна при всіх $n > 2$ та обмежена знизу.

Розв'язання

Послідовність буде монотонно спадною, якщо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$

Розв'язання

Послідовність буде монотонно спадною, якщо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$

Маємо:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}$$

Розв'язання

Послідовність буде монотонно спадною, якщо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$

Маємо:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$$

Розв'язання

Послідовність буде монотонно спадною, якщо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$

Маємо:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1}$$

Розв'язання

Послідовність буде монотонно спадною, якщо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$

Маємо:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} < 1, \text{ якщо } n > 2$$

Розв'язання

Послідовність буде монотонно спадною, якщо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$

Маємо:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} < 1, \text{ якщо } n > 2$$

Послідовність обмежена знизу, оскільки усі $x_n > 0$.

Приклад

Подати приклад необмеженої монотонної послідовності.

Розв'язання

Послідовність $\{x_n\} = \{n\}$ є монотонно зростаючою $(n+1 > n)$ і необмеженою:

$$\forall M > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : |x_n| = n > M.$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left|x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right|$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \left|x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right| = \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} =$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \left| x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \right| = \lim_{x\to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

Розв'язання

Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3),$$

Приклад

$$
\begin{array}{rrrrl}
\big(\quad x^3 & -\,6x^2 & +\,11x & -\,6 \big) & \div \big(x-1\big) = x^2 - 5x + 6 \\
-\,x^3 & +\,x^2 & & & \\
\cline{1-2}
 & -\,5x^2 & +\,11x & & \\
 & 5x^2 & -\,5x & & \\
\cline{2-3}
 & & 6x & -\,6 & \\
 & & -\,6x & +\,6 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Приклад

$$
\begin{array}{r}
\big(\quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6\big) \div \big(x - 1\big) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-x^3 \quad + x^2 \qquad\qquad\quad} \\
-5x^2 + 11x \qquad \\
\underline{5x^2 \quad - 5x \qquad} \\
6x - 6 \\
\underline{-6x + 6} \\
0
\end{array}
$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

Розв'язання

Для знаходження цієї границі розкладемо на множники чисельник і знаменник даного дробу.

$$x^2 - 6x + 8 = 0; x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$D = 36 - 32 = 4; D = 64 - 48 = 16;$$

$$x_1 = (6 + 2)/2 = 4; x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$$

$$x_2 = (6 - 2)/2 = 2; x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$$

Розв'язання

Для знаходження цієї границі розкладемо на множники чисельник і знаменник даного дробу.

$$x^2 - 6x + 8 = 0; x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$D = 36 - 32 = 4; D = 64 - 48 = 16;$$

$$x_1 = (6 + 2)/2 = 4; x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$$

$$x_2 = (6 - 2)/2 = 2; x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$$

Тоді $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-4}{x-6} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Приклад

Знайти границю.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}}{x^2 - x}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} =$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x + x^2 - 1 + x - x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} = \frac{2}{-1\cdot(1+1)} = -1.$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$$

Розв’язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{x^2 + 6x}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x})(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}{x(x+6)(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x})(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}{x(x+6)(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x+6)(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x})(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}{x(x+6)(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x+6)(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\frac{2}{6(3+3)}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x})(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}{x(x+6)(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x+6)(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\frac{2}{6(3+3)}=\frac{1}{18}$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}{(x-3)\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}{(x-3)\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}{(x-3)\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{5}}$$

Розв'язання

Домножимо чисельник і знаменник на спряжене до чисельника значення.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}{(x-3)\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)\cdot(\sqrt{2x-1}+\sqrt{5})}=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x^2}$.

Розв'язання

Скористаємося еквівалентностями.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}$$

Розв'язання

Скористаємося еквівалентностями.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty.$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{nx}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0}$.

Розв’язання

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0}$$

Розв’язання

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(x - x_0)\cos x \cos x_0} =$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\pi - 4x}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{2\sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{2\sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Приклад

Знайти границю $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left\{ \begin{array}{l} y = \pi/2 - x \\ x = \pi/2 - y \\ \pi - 2x = \pi - \pi + 2y \end{array} \right\} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{2y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2}$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x + 1)}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x + 1)}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)} = |\sin(x+1) \sim (x+1), x \to -1|$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)} = \left|\sin(x+1) \sim (x+1), x \to -1\right| = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)} = \left|\sin(x+1) \sim (x+1), x \to -1\right| = \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = 3$$

Приклад

Знайти границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{5}}{x^2}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{5}}{x^2}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{5}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^2}{x^2}$$

Розв'язання

Скористаймося еквівалентністю.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{5}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x}{5}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{25}$$